

- 注 1) 監督者の指示に従うこと。不正行為には学群学則で定める厳罰を課す。
- 注 2) 表面 (本頁) に注意事項 (要精読), 裏面に問題が載っている。両面印刷を確認のこと。
- 注 3) 鉛筆 (シャープペンシルと替え芯), 消しゴム, 時計のみ使用, 提示可。電卓, 筆箱, 定規などは一切使用不可。携帯電話は電源をオフにして鞆の底にしまう。鞆のチャックをしめて床におく。
- 注 4) やむなくトイレなどの一時退室を希望する場合は挙手のこと。携帯電話をポケットに入れたまま退室すると、不正行為とみなす。ただし, 13:45 以降は認めない。複数名が同時に一時退室することも認めない。
- 注 5) 13:45 より提出退席を許可する予定。
- 注 6) 答案用紙全てに記名のこと。不足時には挙手のこと。答案用紙右肩に, $1/3$, $2/3$, $\dots$ のように, 計何枚中何枚目かを明記のこと。
- 注 7) ある問題の解答において導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 導出や証明を繰り返すことなく, 引用の形で用いてよい。引用の際は, 答案の式の番号と問題の番号などを区別の上で記載し, どの式をどこでどのように用いたのかを明記のこと。
- 注 8) 考え方の筋道, 式変形の根拠, 途中計算を, 論理的かつ正確に略さず記述のこと。答えだけが正しいことは正答とみなさない。日本語での説明中に数式を挿入の形で解答のこと。
- 注 9) [重要!!] 以下の記号, および問題文中で与えられている記号は, 説明なしに用いてよい。その他の記号は答案内で定義せよ。記号の定義を改めても構わないが, 説明のこと。
- 時間を t , 密度を ρ , 空間座標ベクトル (の成分) を x_i , 速度ベクトル (の成分) を u_i , 熱流束ベクトル (の成分) を q_i , 単位質量あたりの体積力 (外力) ベクトル (の成分) を K_i , 応力テンソル (の成分) を p_{ij} , ひずみ速度テンソル (の成分) を e_{ij} , 発熱を Q , 散逸関数を Φ , 粘性散逸関数を $\hat{\Phi}$, “比” 内部エネルギーを e , “比” エントロピーを s , “比” 容積を v , 第一粘性係数を μ , 第二粘性係数を λ , 体積粘性係数を ζ , 圧力を p , 温度を T , 粘性応力テンソル (の成分) を σ_{ij} とする。
 - “比” とは単位質量あたりを意味する。しかし, この表現を使わなくても構わない。
 - 単位ベクトル (の成分) を e_i , Kronecker デルタを δ_{ij} とする。
 - 空間座標を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ の成分を x_i ($i = 1, 2, 3$) とかく。他のベクトルも同様であり, たとえば, 速度 $\boldsymbol{u}$ の x_i 方向成分は u_i である。
 - 無効添字 (ダミーインデックス, 死んだ添字) に対しては, Einstein の総和規約を用いる。もちろん, 総和記号を消去せずに残しても正答とする。
- 注 10) [重要!!] 問題文に指示がない限り, 添字表現を用いること。ただし, 添字表現に加えて, 成分表現やベクトル表現も付記することは妨げない。

(注意) 表面の注意事項や記号の定義を、隅々まで確認の上で、隙のない答案を作成すること。

任意の連続体の質量、運動量、全エネルギーの変化は次式によって記述される:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i \quad (\text{B})$$

$$\frac{\partial \rho(u_k^2/2 + e)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u_k^2/2 + e)u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ij}u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho K_j u_j + Q \quad (\text{C})$$

1. 式 (A) を導け。ただし、Gauss の発散定理を証明せずに既知として用いてよい。
2. ある時刻において、2 つの粒子の速度差に着目し、Taylor 展開を考える。ただし、2 次以上の項を無視する。このとき、速度勾配テンソル $\partial u_i / \partial x_j$ を導き、そこから、対称テンソルとしてのひずみ速度テンソル e_{ij} を抽出せよ。
3. Lagrange 微分 D/Dt の Euler 的な表現を導け。
4. 運動量保存式 (B) とエネルギー保存式 (C) を、質量保存式 (A) と融合する。以下の設問に、いずれも Lagrange 微分を用いて解答のこと。
 - (1) 式 (B) から出発し、“運動方程式” を導け。
 - (2) “運動方程式” を用いて、単位質量あたりの運動エネルギー $u_k^2/2$ の変化を記述する方程式を導け。
 - (3) 式 (C) から出発し、単位質量あたりの内部エネルギー e の変化を記述する方程式を導け。
 - (4) 準静的可逆過程に対する熱力学第一法則を連続体力学的に表現することによって、単位質量あたりのエントロピー s の変化を記述する方程式を導け。
5. 連続体の一例として、等方性の Newton 流体に議論を限定する。その構成式を導き、Navier–Stokes 方程式を導け。ただし、圧力 p 、第一粘性係数 μ 、第二粘性係数 λ を導入のこと。なお、以下の等方テンソルを既知として用いてよい (係数 a, A, B, C はいずれもスカラー)。

$$2 \text{ 階} : a \delta_{ij} \quad 4 \text{ 階} : A \delta_{ij} \delta_{kl} + B \delta_{ik} \delta_{jl} + C \delta_{il} \delta_{kj} \quad (\text{D})$$

6. 熱力学における可逆過程と不可逆過程と、流体力学における粘性の有無の関連性を調べたい。
 - (1) 散逸関数 Φ に対して成立する次式 (最右辺の成立) を示せ。

$$\Phi \equiv p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = p_{ij} e_{ij} \quad (\text{E})$$

- (2) 連続体の一例として、任意の粘性流体を考えると、散逸関数 Φ を粘性散逸関数 $\hat{\Phi}$ と圧力起因の項に分解せよ。
- (3) 粘性流体の一例として、等方性の Newton 流体を考えると、粘性散逸関数が正となることを示せ。粘性係数は非負であるとする。
- (4) さらに、断熱的な流れを考えると、どのような結論が導かれるか。すなわち、流体力学における粘性流体と非粘性流体とは、熱力学における可逆過程と不可逆過程とどのように対応するのか。講義に即してまとめよ。