気泡を含む圧縮性液体中における高速圧力波の準単色伝播を記述する非線形方程式の導出

Derivation of a Nonlinear Wave Equation for Fast Propagation of Quasi-Monochromatic Pressure Waves in Compressible Liquid Containing Microbubbles

慶本 天謹
Takanori YOSHIMOTO
(指導教員 金川 哲也)

Abstract – This study tackles the derivation of a nonlinear wave equation for plane progressive quasi-monochromatic waves in a bubbly liquid containing a number of spherical small gas bubbles that oscillate rapidly due to the pressure wave approaching the bubbles. Important assumptions are as follows: (i) the compressibility of the liquid phase is taken into account, and (ii) the effect of viscosity in the gas phase, heat conduction in the gas and liquid phases, phase change across the bubble wall, and thermal conductivities of the gas and liquid, and so on, are neglected. The basic equations for bubbly flows are composed of a set of conservation equations of mass and momentum in a two-fluid model and the equation of bubble dynamics. Appropriate choices of scaling relations of some physical parameters, i.e., wavelength, wave frequency, propagation speed, and amplitude of waves concerned, yields the derivation. By the help of the method of multiple scales, we can derive a nonlinear wave equation that describes the long range propagation of wave, where the phase velocity is always greater than the speed of sound in the absence of bubbles. The result shows that an envelope of a carrier wave is described by the nonlinear Schrödinger (NLS) equation with an attenuation term and some correction terms. The NLS equation derived here is different compared with the NLS equation (Kanagawa *et al.*, 2010) for the wave where the velocity speed is always smaller than the speed of sound in the absence of bubbles.

1 緒言

1.1 学術的背景

圧力波は, 多数の気泡を含む水 (気泡流) 中においては, 単相水中に比べて著しく様相が異なる．その最も重要な性質の 1 つに, 分散性が挙げられる [1]. すなわち, 単相水中においては, 波の周波数は波長に依存しないが, 気泡流中においては, 波の周波数が波長に依存し, 波の伝播速度も波長の関数となることが知られている．分散性は, 水中で多数の気泡が振動することに起因する [1].

静止気泡流における線形分散関係を図 1 に示す. 静止気泡流の線形分散関係によれば, 気泡流における位相速度が, 単相水における位相速度より常に小さくなる Slow mode, および, 常に大きくなる Fast

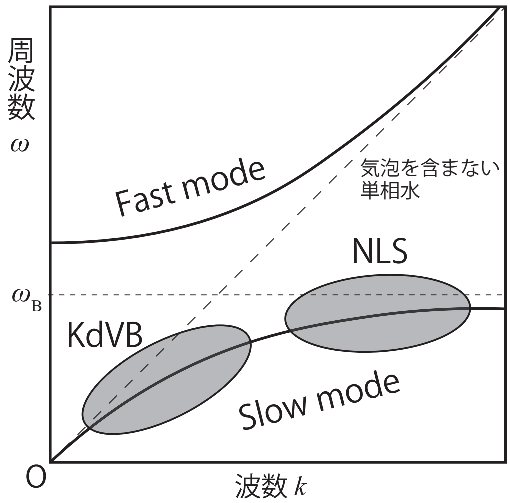

図 1: 静止気泡流における線形分散関係

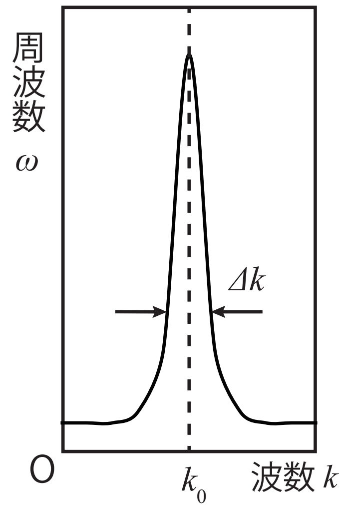

図 2: 準単色波

mode の 2 つのモードが存在する [2,3]. Slow mode は水の圧縮性を無視したモードであることに対して, Fast mode は水の圧縮性の効果が生み出すモードである. Slow mode は約 50 年前に発見されており [1], 理論と実験の両面から長い研究の歴史を有する. なお, 実験に関しては KdV 方程式の波形のみ観測されている. Kanagawa らは最近, Slow mode に対して, 低周波数の長波を記述する Korteweg–de Vries–Burgers (KdVB) 方程式を導出した [4]:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Pi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = 0. \tag{1}$$

また, Kanagawa らは固有周波数程度の短波を記述する非線形 Schrödinger (NLS) 方程式

$$i\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \nu_1 |A|^2 A + i\nu_2 A = 0, \tag{2}$$

を導出し, 統一的な見解を示した. ここで, Kanagawa らが用いたパラメータスケーリングは次のとおりである [4]:

$$\left(\frac{U^*}{c^*_{L0}}, \frac{R^*_0}{L^*}, \frac{\omega^*}{\omega^*_B}\right) \equiv \begin{cases} \left(O(\sqrt{\epsilon}), O(\sqrt{\epsilon}), O(\sqrt{\epsilon})\right), & \text{(KdVB)}, \\ \left(O(\epsilon^2), O(1), O(1)\right), & \text{(NLS)}. \end{cases} \tag{3}$$

なお, パラメータスケーリングについては 3.1 節で詳細を述べる.

一方で, Fast mode に相当する波は [2], 従来より液体の圧縮性を無視する解析が多く, 実験的観測も遅かったため [5], 存在があまり知られていないように見受けられる. 2002 年に大谷・杉山は, 衝撃波管を用いて, 気泡流中を伝播する衝撃波の特性について, 系統的かつ詳細な実験を行い, 衝撃波圧力特性に及ぼす衝撃波圧力ステップ強さの影響, および, 衝撃波通過後の気泡の挙動と圧力振動の関連性を明らかにした [5]. その過程で, 大谷・杉山は, 衝撃波の前方に, 単相水中の音速に近い速度で伝播する波 (プリカーサ) の存在を観測した. 観測されたプリカーサは, 振幅が極めて小さく, 伝播するにつれ急激に減衰する [5] ため, 計測の困難さを鑑みれば, 理論的予測が強く望まれている. 波の振幅は, 実現象ゆえに有限だが極めて小さいため, 線形でも強非線形でもない, 弱非線形理論解析が手法として適合する [6].

1.2　準単色波

波数 k_0 の正弦波は振幅が一定な無限に長い波列を表す. 波数 k_0 のまわりに $\Delta k = O(\epsilon)$ のスペクトル幅をもつ波の集まりは, 振幅が $1/\Delta k$ のスケールで変わる波束となり, このような波を準単色波という (図 2). このことは, つぎのように波の重ね合わせを考えることで示すことが可能である. 物理量 u

を Fourier 成分の重ね合わせで,

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(k)\exp(ikx-i\omega t)\mathrm{d}k, \tag{4}$$

と書く．ここで, u が実数であるために, $\omega(-k)=-\omega(k)$, $f(-k)=\bar{f}(k)$ ($\bar{\ }$: 複素共役) とする．なお, f は複素変数である．分散関係式を k_0 のまわりにテイラー展開すると,

$$\begin{aligned}\omega(k)&=\omega(k_0+\Delta k)\\&=\omega(k_0)+\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k=k_0}\Delta k\\&\qquad+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k=k_0}(\Delta k)^2+\cdots\\&=\omega_0+v_g\Delta k+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k=k_0}(\Delta k)^2+\cdots.\end{aligned} \tag{5}$$

これを式 (4) に代入し, スペクトルが k_0 のまわりに Δk の幅をもつと仮定し, k の積分を k_0 に関する積分に書き直すと,

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(k_0+\Delta k)\\&\qquad\times\exp[i(k_0+\Delta k)x-i\omega t]\mathrm{d}(k_0+\Delta k)\\&\approx\exp(ik_0x-i\omega_0t)\\&\qquad\times\int_{\Delta k} f(k_0+\Delta k)\exp\Bigg[i\Delta k(x-v_gt)\\&\qquad\qquad-\frac{1}{2}i\left.\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k=k_0}(\Delta k)^2t\Bigg]\mathrm{d}(\Delta k)\\&\quad+\mathrm{c.c.}.\end{aligned} \tag{6}$$

上式の積分において, 独立変数である空間座標 x と時間 t は, それぞれ $\Delta k(x-v_gt)$ と $(\Delta k)^2t$ の形で含まれている．そこで, スペクトルの幅が $O(\epsilon)$ であるとして $\Delta k\equiv\epsilon\Delta K$ とすると, 式 (6) の積分は,

$$\xi\equiv\epsilon(x-v_gt),\qquad\tau\equiv\epsilon^2t, \tag{7}$$

の関数であるとみなせる．したがって, ϵ が微小であれば, 変数 ξ, τ を用いて物理量 u を

$$u\approx A(\xi,\tau)\exp(ik_0x-i\omega_0t)+\mathrm{c.c.}, \tag{8}$$

のように表すことができる．A は複素数で複素振幅とよばれる．式 (8) は, 指数関数で表され波長 $1/k_0$ で変化する搬送波の部分と, $A(\xi,\tau)$ で表され波長 $1/\Delta k$ の程度で緩やかに変化する包絡波の部分の 2 つの異なるスケールに分けた表現になっている．式 (6) の積分の項を $A(\xi,\tau)$ とおいたことから, A について,

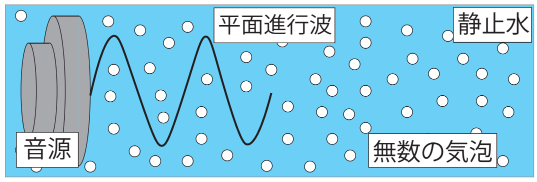

図 3: 本解析の問題設定

$$i\frac{\partial A}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k=k_0}\frac{\partial^2A}{\partial\xi^2}=0, \tag{9}$$

が成り立つ．これは, 線形 Schrödinger 方程式である．全般にあたって文献 [7] [8] [9] を参考にした．

1.3　目的

本稿では, 気泡流の基礎方程式系から, Fast mode における準単色波の伝播を記述する弱非線形波動方程式の導出を行う．

2　問題設定と基礎方程式系

2.1　問題設定

図 3 のような, 多数の気泡を含む静止水 (気泡流) を考える．初期状態では, 気泡流は静止平衡を保っているものとする．水の圧縮性を考慮する．気泡は, すべて球形であり, 一様に分布しており, 生成, 消滅, 合体, 分裂しないものとする．この気泡流の中に音源を置き, 平面 (1 次元) 進行波を入射させる．気体は水と比べて弾性が大きいため, 音波の入射によって気泡は激しく振動 (非線形振動) する．簡単のため, 気体の粘性, 気体と液体の熱伝導性, 気液界面を通しての相変化および物質輸送, さらに Reynolds 応力は無視する．本解析では, 波数のスペクトル幅を $\Delta k\equiv\epsilon$ としており, スペクトル幅の狭さが振幅と同じとする．

2.2 基礎方程式系

まず, 気相と液相それぞれに対する質量保存式, および, 運動量保存式を用いる [3,10]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_G^*) + \dfrac{\partial}{\partial x^*}(\alpha\rho_G^* u_G^*) = 0, & (10) \\
\dfrac{\partial}{\partial t^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^*\right] + \dfrac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^* u_L^*\right] = 0, & (11) \\
\dfrac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_G^* u_G^*) + \dfrac{\partial}{\partial x^*}\left(\alpha\rho_G^* {u_G^*}^2\right) + \alpha\dfrac{\partial p_G^*}{\partial x^*} = F^*, & (12) \\
\dfrac{\partial}{\partial t^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^* u_L^*\right] + \dfrac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^* {u_L^*}^2\right] + (1-\alpha)\dfrac{\partial p_L^*}{\partial x^*} + P^*\dfrac{\partial \alpha}{\partial x^*} = -F^*. & (13)
\end{cases}
$$

なお, 当該モデルにおいて, 粘性の効果は組み込まれておらず, エネルギー保存式も導かれていないため用いない [3,10]. ここで, t^* は時間, x^* は空間座標, ρ^* は密度, u^* は流速, p^* は圧力であり, $*$は有次元数を表し, 添え字 G と L はそれぞれ気相と液相を表す. 単相の水に対する基礎方程式系と異なる点の 1 つは, 気相の体積分率 (ボイド率) α という変数を含む点といえる. また, 液相の運動量保存式 (13) には, 気泡の気液界面における局所的な液相圧力 P^* を含む項が存在し, さらに両運動量保存式 (12)(13) において, 気相・液相間の付加質量力 F^* を含む項が存在する. 本研究では, F^* に以下のモデルを用いる [10,11]:

$$
\begin{aligned}
F^* = &-\beta_1\alpha\rho_L^*\left(\frac{\mathrm{D}_G u_G^*}{\mathrm{D}t^*} - \frac{\mathrm{D}_L u_L^*}{\mathrm{D}t^*}\right) \\
&- \beta_2\rho_L^*(u_G^* - u_L^*)\frac{\mathrm{D}_G\alpha}{\mathrm{D}t^*} \\
&- \beta_3\alpha(u_G^* - u_L^*)\frac{\mathrm{D}_G\rho_L^*}{\mathrm{D}t^*}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

ここに, 係数 β_j $(j = 1,2,3)$ を含むが, 球形気泡においては β_j はすべて 1/2 である. また, $\mathrm{D}_G/\mathrm{D}t^*$ および $\mathrm{D}_L/\mathrm{D}t^*$ は, それぞれ, 気相と液相に対する Lagrange 微分である:

$$
\frac{\mathrm{D}_G}{\mathrm{D}t^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} + u_G^*\frac{\partial}{\partial x^*}, \quad \frac{\mathrm{D}_L}{\mathrm{D}t^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} + u_L^*\frac{\partial}{\partial x^*}. \tag{15}
$$

周囲水の圧縮性を考慮した気泡の膨張・収縮運動を表す Keller の式を用いる [12]:

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)R^*\frac{\mathrm{D}_G^2 R^*}{\mathrm{D}t^{*2}} \\
&\quad + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)\left(\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)\frac{P^*}{\rho_{L0}^*} \\
&\quad + \frac{R^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G}{\mathrm{D}t^*}(p_L^* + P^*).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ここで, R^* は気泡半径であり, 時間 t^* のみならず空間座標 x^* の関数に拡張したことで, 気泡流中のすべての気泡に適用することが可能となる [3]. Keller の式の左辺は時間の 2 階微分を含むため慣性項であり, 右辺第 1 項は弾性および駆動力項, 右辺第 2 項は時間の 1 階微分を含むため減衰項である. 慣性項を見てわかるとおり, Keller の式は 3 次の非線形偏微分方程式であって, 実際に, 本解析において 3 次の非線形項が現れる. なお, 従来の研究では Lagrange 微分 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ ではなく, 偏微分 $\partial/\partial t$ が用いられている [13].

方程式系 (10)–(13) と (16) は, 以下に示す, 気相のポリトロープ変化の状態方程式, 液相の Tait の状態方程式, 気泡内の気体の質量保存式, 気液界面における力のつり合いを表す式 (Young–Laplace の式) によって閉じられる:

$$
\begin{cases}
\dfrac{p_G^*}{p_{G0}^*} = \left(\dfrac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*}\right)^\gamma, & (17) \\
p_L^* = p_{L0}^* + \dfrac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n}\left[\left(\dfrac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*}\right)^n - 1\right], & (18) \\
\dfrac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} = \left(\dfrac{R_0^*}{R^*}\right)^3, & (19) \\
p_G^* - (p_L^* + P^*) = \dfrac{2\sigma^*}{R^*} + \dfrac{4\mu^*}{R^*}\dfrac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}. & (20)
\end{cases}
$$

ここで, γ はポリトロープ指数, σ^* は表面張力, μ^* は液相の粘性係数を表す. Tait の状態方程式 (18) には n という物性値を含むが, 水の場合は $n = 7.15$ であり, これは, 水は空気よりも 7 倍程度縮みにくいことを意味する. なお, Tait の状態方程式 (18) の導出を付録 1 に示す.

添え字 0 が付いた量は初期静止状態における値であり, すべて定数である.

3 解析手法

3.1 パラメータスケーリング

Kanagawa らによって提案されたパラメータスケーリング法を用いる [4]. 波の代表的な群速度 U^*, 波長 L^*, 角振動数 ω^* の間には, $U^* = L^*\omega^*$ の関係が成り立ち, $\omega^* \equiv 1/T^*$ とする (T^* は波の代表的な周期). ここで, 3 つの無次元パラメータの大きさを定める:

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv O(\epsilon^1) = V\epsilon, \tag{21}$$

$$\frac{R_0^*}{L^*} \equiv O(\epsilon^0) = \mathit{\Delta}, \tag{22}$$

$$\frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv O(\epsilon^{-1/2}) = \frac{\mathit{\Omega}}{\sqrt{\epsilon}}. \tag{23}$$

無次元パラメータ (21)–(23) は, 上から順にそれぞれ, 速度, 長さ, 時間についてのスケーリングを意味する. ここで, 摂動 ϵ は, 波の代表的な無次元振幅であり, 1 より十分小さいが有限値をとる (弱非線形波動); V, $\mathit{\Delta}$, $\mathit{\Omega}$ はすべて $O(1)$ の定数である; c_{L0}^* は単相水中の音速, R_0^* は初期気泡径, ω_B^* は単一気泡の固有角振動数である:

$$\omega_B^* \equiv \sqrt{\frac{3\gamma(p_{L0}^* + 2\sigma^*/R_0^*) - 2\sigma^*/R_0^*}{\rho_{L0}^* R_0^{*2}}}. \tag{24}$$

固有角振動数のスケールの例を挙げる:
$p_{L0}^* = 101325\,\mathrm{Pa}$, $\sigma^* = 0.0728\,\mathrm{N/m}$,
$\rho_{L0}^* = 998\,\mathrm{kg/m^3}$, $\gamma = 1$ とすると, 気泡径が $R_0^* = 0.01\,\mathrm{mm}$ の時, $\omega_B^* \approx 1\,\mathrm{MHz}$ 程度である. さらに, 波の代表的な群速度, 波長, 角振動数のスケールの例を挙げる: $c_{L0}^* = 1500\,\mathrm{m/s}$, $R_0^* = 0.01\,\mathrm{mm}$, $\omega_B^* = 1\,\mathrm{MHz}$, $V = 10$, $\mathit{\Delta} = 0.1$, $\mathit{\Omega} = 1$, $\epsilon = 0.01$ とすると, $U^* = 150\,\mathrm{m/s}$, $L^* = 0.1\,\mathrm{mm}$, $\omega^* = 10\,\mathrm{MHz}$ である. また, 式 (22) において, $R_0^* \approx L^*$ ではあるが, 気泡径は波長よりも小さいため $R_0^* < L^*$ であることに注意しておく.

このパラメータスケーリング法がどのように有用であるかを, 実験を例に述べる. 本解析を実験的に再現する場合, まず, 装置に水を張り, 気泡を分散させる. その後, トランスデューサを用いて, 任意の振幅と周波数で音波を入射させる. この時, パラメータスケーリングを参考にすることにより, 適切な振幅と周波数もった音波を入射することが可能となる. 実験者が任意に指定できる音波の物理量と, 実験装置の音速や気泡の物理量との比率を解析に取り込めることが, パラメータスケーリングを用いる利点の 1 つである. また, 速度, 長さ, 周波数というわかりやすく身近な物理量の設定から出発するため敷居が低いこと, さらに, 長さのスケーリング R_0^*/L^* が分散性の大きさを表すことなどが利点として挙げられる.

3.2 多重尺度法による解析

パラメータスケーリング法を, 多重尺度法 [6] と組み合わせて解析を行う.

独立変数として, 時間 t^* と空間座標 x^* を, $t \equiv t^*/T^*, x \equiv x^*/L^*$ と無次元化する. これらを用いて, 近傍場用, その次のオーダすなわち $O(1/\epsilon)$ の時空間スケールの遠方場 (遠方場 I) 用, さらにその次の $O(1/\epsilon^2)$ の時空間スケールの遠方場 (遠方場 II) 用に, 計 6 つの新たな独立変数を準備する:

$$\begin{cases} t_0 = t, & x_0 = x, \\ t_1 = \epsilon t, & x_1 = \epsilon x, \\ t_2 = \epsilon^2 t, & x_2 = \epsilon^2 x. \end{cases} \tag{25}$$

これらを用いて, 時間と空間座標の偏微分演算子を展開する (微分展開法) [6]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{27}$$

従属変数の全ては, 新たな独立変数 (25) の関数とみなされる. これらを摂動展開する:

$$\alpha/\alpha_0 = 1 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + O(\epsilon^3), \tag{28}$$

$$R^*/R_0^* = 1 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + O(\epsilon^3), \tag{29}$$

$$u_G^*/U^* = \epsilon u_{G1} + \epsilon^2 u_{G2} + O(\epsilon^3), \tag{30}$$

$$u_L^*/U^* = \epsilon u_{L1} + \epsilon^2 u_{L2} + O(\epsilon^3), \tag{31}$$

$$\rho_G^*/\rho_{G0}^* = 1 + \epsilon\rho_{G1} + \epsilon^2\rho_{G2} + O(\epsilon^3), \tag{32}$$

$$P/p_{L0}^* = \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + O(\epsilon^3), \tag{33}$$

$$p_G^*/p_{G0}^* = 1 + \epsilon p_{G1} + \epsilon^2 p_{G2} + O(\epsilon^3), \tag{34}$$

$$p_L^*/p_{L0}^* = 1 + \epsilon p_{L1} + \epsilon^2 p_{L2} + O(\epsilon^3). \tag{35}$$

いずれも無次元振幅 ϵ^1 から展開している．無次元圧力の展開 (35) が 1 から始まるが, これまでの著者らの摂動展開 [4, 14] とは異なることに注意されたい．気泡径 R^* と気相密度 ρ_G^* の摂動展開 (29)(32) を, 気相のポリトロープ変化の状態方程式 (17) と気泡内の気体の質量保存式 (19) と組み合わせることで, 気相密度 ρ_G^* および気相圧力 p_G^* の摂動を, 気泡径 R^* の摂動を用いて表すことができる:

$$\rho_{G1} = -3R_1, \tag{36}$$

$$\rho_{G2} = -3R_2 + 6R_1^2, \tag{37}$$

$$\rho_{G3} = -3R_3 + 12R_1R_2 - 10R_1^3, \tag{38}$$

$$p_{G1} = -3\gamma R_1, \tag{39}$$

$$p_{G2} = -3\gamma R_2 + \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2}R_1^2, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} p_{G3} = &-3\gamma R_3 + 3\gamma(3\gamma+1)R_1R_2 \\ &- \frac{\gamma(3\gamma+1)(3\gamma+2)}{2}R_1^3. \end{aligned} \tag{41}$$

導出過程を付録 2 に示す．

つづいて, 液相密度 ρ_L^* の展開を以下のように定める:

$$\rho_L^*/\rho_{L0}^* = 1 + \epsilon^3\rho_{L1} + \epsilon^4\rho_{L2} + O(\epsilon^5). \tag{42}$$

すなわち, ϵ^3 から展開を始めるが, 3 という指数は一意に定まることを注意しておく．式 (42) の導出過程を示す．液相密度 ρ_L^* の展開を, 以下のように仮定する:

$$\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} = 1 + \epsilon^\kappa\rho_{L1} + \epsilon^{\kappa+1}\rho_{L2} + O(\epsilon^{\kappa+2}). \tag{43}$$

Tait の状態方程式 (18) に代入すると,

$$\begin{aligned} p_L^* &= p_{L0}^* + \frac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n}\left[\left(\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*}\right)^n - 1\right] \\ &= p_{L0}^* + \frac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n}\Big\{\big[1 + \epsilon^\kappa\rho_{L1} + \epsilon^{\kappa+1}\rho_{L2} \\ &\qquad + O(\epsilon^{\kappa+2})\big]^n - 1\Big\} \\ &= p_{L0}^* + \rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}\left[\epsilon^\kappa\rho_{L1} + \epsilon^{\kappa+1}\rho_{L2} + O(\epsilon^{\kappa+2})\right]. \end{aligned} \tag{44}$$

両辺を p_{L0}^* で割ると,

$$\frac{p_L^*}{p_{L0}^*} = 1 + \frac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{p_{L0}^*}\left[\epsilon^\kappa\rho_{L1} + \epsilon^{\kappa+1}\rho_{L2} + O(\epsilon^{\kappa+2})\right]. \tag{45}$$

ここで, 下記スケーリング (49) を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{p_L^*}{p_{L0}^*} &= 1 + \frac{1}{\epsilon^2 p_{L0}}\left[\epsilon^\kappa\rho_{L1} + \epsilon^{\kappa+1}\rho_{L2} + O(\epsilon^{\kappa+2})\right] \\ &= 1 + \epsilon^{\kappa-2}\frac{\rho_{L1}}{p_{L0}} + \epsilon^{\kappa-1}\frac{\rho_{L2}}{p_{L0}} + O(\epsilon^\kappa). \end{aligned} \tag{46}$$

式 (35) と比較すると, $\kappa = 3$ と定まる．したがって, 液相密度 ρ_L^* の展開は

$$\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} = 1 + \epsilon^3\rho_{L1} + \epsilon^4\rho_{L2} + O(\epsilon^5), \tag{30}$$

と定まる．また,

$$p_{L1} = \frac{\rho_{L1}}{p_{L0}}, \quad p_{L2} = \frac{\rho_{L2}}{p_{L0}}, \quad \cdots, \tag{47}$$

である．

さらに, 気相と液相の初期圧力 p_{G0}^* と p_{L0}^* のスケーリングを定める:

$$\frac{p_{G0}^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}} \equiv O(\epsilon^2) = \epsilon^2 p_{G0}, \tag{48}$$

$$\frac{p_{L0}^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}} \equiv O(\epsilon^2) = \epsilon^2 p_{L0}. \tag{49}$$

ここで, 無次元化された気相と液相の圧力 p_{G0} と p_{L0} はともに $O(1)$ であり, p_{G0}^* と p_{L0}^* は単相水中の音速 c_{L0}^* を用いて無次元化されているが, これもこれまでの著者らの無次元化 [4, 14] とは異なる．

最後に, 液体の粘性係数のスケーリングを以下のように定める:

$$\frac{\mu^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^* L^*} = \mu\epsilon^3. \tag{50}$$

ここで, 無次元化された液体の粘性係数 μ は $O(1)$ であり, 単相水中の音速 c_{L0}^* を用いて無次元化されているが, これもこれまでの著者らの無次元化 [4, 14] とは異なる．気泡流に働く粘性は, 気泡の気液界面に働く液体の粘性が最も大きく, 次いで周囲水の粘性, 気泡内の気体の粘性となる．本解析では, 最も影響が大きい気泡の気液界面に働く液体の粘性のみを考慮している．粘性の影響は, 最も遠方である遠方場 II で初めて現れる．

4 結果

4.1 近傍場—— 分散波の線形伝播

基礎方程式系 (10)–(13) と (16) に対応する, ϵ に対する最低次の方程式として, 線形方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - 3\dfrac{\partial R_1}{\partial t_0} + \dfrac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} = 0, & (51) \\ \alpha_0 \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - (1-\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} = 0, & (52) \\ -3\gamma \dfrac{p_{G0}}{V^2}\dfrac{\partial R_1}{\partial x_0} + \beta_1 \dfrac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} - \beta_1 \dfrac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} = 0, & (53) \\ (1-\alpha_0+\beta_1\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} - \beta_1\alpha_0 \dfrac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} + (1-\alpha_0)\dfrac{p_{L0}}{V^2}\dfrac{\partial p_{L1}}{\partial x_0} = 0, & (54) \\ \dfrac{p_{L0}}{V^2 \Delta^2} p_{L1} + \dfrac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} = 0, & (55) \end{cases}$$

を得る. 気相の質量保存式 (51) の導出過程のみ, 付録 3 に示す. 質量保存式 (51)(52) は, 気相と液相ともに Slow mode の線形近似と全く同じ式が導かれた [4,14]. したがって, 質量保存式 (51)(52) だけを眺めても, Fast mode, Slow mode のいずれの波であるかを判別できないものと示唆される. 運動量保存式 (53)(54) は, 気相・液相ともに, Slow mode とは異なり, 速度に関する定数 V が圧力項の係数に現れている. Keller の式 (55) には, 速度に関する V, および, 長さに関する Δ が現れている.

液相が非圧縮性ならば, $c_{L0}^* \to \infty$ の極限が対応するが, 無次元振幅 ϵ が有限の値をとることを踏まえると, 非圧縮性極限は $V \to 0$ と表現できる. しかし, 本解析では, 液相の圧縮性を考慮しており, そもそも $V = O(1)$ である. 液相の圧縮性の効果が, V によって表現されることから, 圧縮性に起因する Fast mode を表すためには V が必要である. 実際に, V が運動量保存式 (53)(54) に含まれていることは, 式 (53)(54) が Fast mode に対応することを示す.

無次元化した基礎方程式系 (51)–(55) は, R_1 を従属変数とする単一偏微分方程式にまとめることができる:

$$\mathcal{L}[R_1] = 0, \tag{56}$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - \frac{(1-\alpha_0+\beta_1)\gamma p_{G0}}{\beta_1(1-\alpha_0)V^2}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0}\frac{\partial^4}{\partial x_0^2 \partial t_0^2}. \tag{57}$$

これは, 分散項を伴う線形波動方程式である. なお, 導出過程を付録 4 に示す. その解に準単色波を仮定する:

$$R_1 = A(t_1, t_2, x_1, x_2)\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{c.c.}, \tag{58}$$

$$\theta = kx_0 - \Omega(k)t_0. \tag{59}$$

ここで, A は複素振幅, $k \equiv k^* L^*$ は無次元波数, θ は位相関数である. すなわち, 搬送波 $\mathrm{e}^{i\theta}$ のゆっくりとした変化が, 包絡波 A によって記述される. 線形分散関係を求めておく:

$$\begin{aligned} &D(k,\Omega) \\ &= \frac{(1-\alpha_0+\beta_1)\gamma p_{G0}}{\beta_1(1-\alpha_0)V^2}k^2 - \frac{\Delta^2 k^2 \Omega^2}{3\alpha_0} - \Omega^2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{60}$$

ここで, $D(k,\Omega)$ は線形分散関係の陰関数表現であり, k と Ω の関数関係は線形ではないため, 分散性を有することがわかる. また, 虚部を含まないため, 近傍場においては散逸性は現れない. 位相速度 v_p と群速度 v_g を導く:

$$v_p = \frac{\Omega}{k} = \sqrt{\frac{(1-\alpha_0+\beta_1)\gamma p_{G0}}{\beta_1(1-\alpha_0)V^2}\frac{3\alpha_0}{3\alpha_0+\Delta^2 k^2}}, \tag{61}$$

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}k} = \frac{3\alpha_0 \Omega}{k(3\alpha_0+\Delta^2 k^2)}. \tag{62}$$

Kanagawa らは, これらを根拠に U^* と L^* を定めたが [4], 本解析ではそこまで踏み込まない.

式 (58) を式 (51)–(55) に代入し, 境界条件として無限遠 $(x_0 \to \infty)$ で気泡流は静止しているとし, t_0 および x_0 について積分すると, 1 次の摂動は,

$$\alpha_1 = b_1 R_1, \tag{63}$$

$$u_{G1} = b_2 R_1, \tag{64}$$

$$u_{L1} = b_3 R_1, \tag{65}$$

$$p_{L1} = b_4 R_1, \tag{66}$$

となり, すべては, R_1 の実定数 $b_j\ (j=1,2,3,4)$ 倍として表現可能である:

$$b_4 = \frac{V^2\Delta^2\Omega^2}{p_{L0}}, \tag{67}$$

$$b_1 = \frac{(1-\alpha_0)\left[3\beta_1\alpha_0 - (1-\alpha_0)p_{L0}b_4k^2/\left(V^2\Omega^2\right)\right]}{\alpha_0(1-\alpha_0+\beta_1)}, \tag{68}$$

$$b_2 = (b_1-3)\frac{\Omega}{k}, \tag{69}$$

$$b_3 = -\frac{\alpha_0 b_1\Omega}{(1-\alpha_0)k}. \tag{70}$$

4.2 遠方場 I—— 包絡波の線形伝播

基礎方程式系 (10)–(13) と (16) に対応する, ϵ^2 に対する非同次方程式系は, 次式である:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - 3\dfrac{\partial R_2}{\partial t_0} + \dfrac{\partial u_{G2}}{\partial x_0} = M_1, & (71)\\ \alpha_0\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - (1-\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L2}}{\partial x_0} = M_2, & (72)\\ -3\gamma\dfrac{p_{G0}}{V^2}\dfrac{\partial R_2}{\partial x_0} + \beta_1\dfrac{\partial u_{G2}}{\partial t_0} \\ \qquad\qquad - \beta_1\dfrac{\partial u_{L2}}{\partial t_0} = M_3, & (73)\\ (1-\alpha_0+\beta_1\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L2}}{\partial t_0} - \beta_1\alpha_0\dfrac{\partial u_{G2}}{\partial t_0} \\ \qquad\qquad + (1-\alpha_0)\dfrac{p_{L0}}{V^2}\dfrac{\partial p_{L2}}{\partial x_0} = M_4, & (74)\\ \dfrac{p_{L0}}{V^2\Delta^2}p_{L2} + \dfrac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} = M_5. & (75) \end{cases}$$

ここで, 左辺は未知変数の添え字が 1 から 2 に変わっただけである. また, 右辺には近傍場で求めた 1 次の摂動のみから構成される. 非同次項 $M_j\ (j=1,2,3,4,5)$ は, それぞれ,

$$\begin{aligned} M_1 =& -\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t_1}(3R_1-\alpha_1) \\ &+ 3\frac{\partial R_1(\alpha_1-2R_1)}{\partial t_0} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_0}[u_{G1}(3R_1-\alpha_1)], \end{aligned} \tag{76}$$

$$M_2 = (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_1} - \alpha_0\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_1} - \alpha_0\frac{\partial \alpha_1 u_{L1}}{\partial x_0}, \tag{77}$$

$$\begin{aligned} M_3 =& 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial R_1}{\partial x_1} - \beta_1\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G1}-u_{L1}) \\ &- \beta_1\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0}\right) \\ &- \beta_1\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G1}-u_{L1}) \\ &- \beta_2(u_{G1}-u_{L1})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} \\ &+ 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\left[\alpha_1\frac{\partial R_1}{\partial x_0} - (3\gamma+1)R_1\frac{\partial R_1}{\partial x_0}\right], \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} M_4 =& -(1-\alpha_0)\left(\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{L1}}{\partial t_1}\right) \\ &+ \beta_1\alpha_0\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G1}-u_{L1}) + \alpha_0\frac{\partial \alpha_1 u_{L1}}{\partial t_0} \\ &+ \beta_1\alpha_0\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0}\right) \\ &+ \beta_1\alpha_0\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G1}-u_{L1}) \\ &+ \beta_2\alpha_0(u_{G1}-u_{L1})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} \\ &+ \alpha_0\alpha_1\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_0} - (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}^2}{\partial x_0} \\ &+ \alpha_0 p_{L1}\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0}, \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} M_5 =& -2\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial t_1} - R_1\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - 2u_{G1}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial x_0} \\ &- \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0}\frac{\partial R_1}{\partial t_0} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\right)^2 \\ &+ \frac{3\gamma(3\gamma-1)}{2V^2\Delta^2}p_{G0}R_1^2 - \frac{1}{\Omega^2}R_1. \end{aligned} \tag{80}$$

近傍場の場合と同様に, 遠方場 I でも, 質量保存式 (71)(72) は Slow mode の場合と同一で, 運動量保存式 (73)(74) の左辺の係数には, 近傍場同様に V が現れている. 新たな違いは非同次項に潜む. すなわち, 運動量保存式の非同次項 (78)(79) の係数に V を含む. 具体的には, 気相と液相それぞれの無次元初期圧力 p_{G0} および p_{L0} に, $1/V^2$ がかけられている. Keller の式 (75) の左辺も, V と Δ を含む点は近傍場同様であるが, 非同次項 (80) において, 運動量保存式と同様に, p_{G0} に $1/V^2$ がかけられている. さらに, (80) の最右辺に, Slow mode では現れない R_1 を含む線形項が現れた.

連立非同次方程式系 (71)–(75) を, 単一の非同次

方程式にまとめる:

$$\mathcal{L}[R_2] = \mathit{\Gamma} A^2 \mathrm{e}^{i2\theta} + i\left(-\frac{\partial D}{\partial \mathit{\Omega}}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_1} + i\eta A\right)\mathrm{e}^{i\theta} + \text{c.c.}. \tag{81}$$

ここで, 実定数は以下のように与えられる:

$$\eta = -\frac{k}{2\mathit{\Omega}^4}(v_p + v_g) < 0, \quad (\because k > 0,\ \mathit{\Omega} > 0,\ v_p > 0,\ v_g > 0), \tag{82}$$

$$\mathit{\Gamma} = -\frac{2}{3}\left[\mathit{\Omega} m_1 - \frac{\mathit{\Omega} m_2}{\alpha_0} + \frac{1-\alpha_0+\beta_1}{\beta_1(1-\alpha_0)} k m_3 + \frac{k m_4}{\alpha_0(1-\alpha_0)} - \frac{2\mathit{\Delta}^2 k^2 m_5}{\alpha_0}\right], \tag{83}$$

$$m_1 = 6(2-b_1)\mathit{\Omega} + 2b_2(3-b_1)k, \tag{84}$$

$$m_2 = -2\alpha_0 b_1 b_3 k, \tag{85}$$

$$\hat{m} = (\beta_1+\beta_2)(b_2-b_3)b_1\mathit{\Omega} - \beta_1(b_2^2 - b_3^2)k, \tag{86}$$

$$m_3 = \hat{m} + 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}(b_1 - 3\gamma - 1)k, \tag{87}$$

$$m_4 = -\alpha_0\hat{m} + 2\alpha_0 b_1 b_4 \frac{p_{L0}}{V^2}k - 2(1-\alpha_0)b_3^2 k - 2\alpha_0 b_1 b_3 \mathit{\Omega}, \tag{88}$$

$$m_5 = -3b_2\mathit{\Omega} k + \frac{3\gamma(3\gamma-1)p_{G0}}{2V^2\mathit{\Delta}^2} + \frac{5\mathit{\Omega}^2}{2}. \tag{89}$$

式 (81) の共振を抑制するためには, 非同次方程式の可解条件を満たさなければならない. 非同次方程式 (81) の可解条件より, 次式が課される:

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g\frac{\partial A}{\partial x_1} + i\eta A = 0. \tag{90}$$

Slow mode の第 2 次近似の場合 [4] と比較すると, Fast mode では新たに次の項が現れた:

$$i\eta A = -i\frac{k}{2\mathit{\Omega}^4}(v_p + v_g)A. \tag{91}$$

この項は, Keller の式の右辺第 1 項を介し Laplace の式より起因する項である.

式 (90) を式 (81) に代入すると,

$$\mathcal{L}[R_2] = \mathit{\Gamma} A^2 \mathrm{e}^{i2\theta} + \text{c.c.}, \tag{92}$$

となり, その解は,

$$R_2 = c_0 A^2 \mathrm{e}^{i2\theta} + \text{c.c.}, \tag{93}$$

$$c_0 \equiv \frac{\mathit{\Gamma}}{D_{22}}, \tag{94}$$

$$D_{22} \equiv D(2k, 2\mathit{\Omega}) = -\frac{4\mathit{\Delta}^2\mathit{\Omega}^2 k^2}{\alpha_0}, \tag{95}$$

であった [4]. さらに, 式 (93) を式 (71)–(75) に代入すると, 2 次の摂動が求まる:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ u_{G2} \\ u_{L2} \\ p_{L2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & 0 \\ c_3 & d_3 & e_3 & 0 \\ \dfrac{V^2}{p_{L0}}c_4 & \dfrac{V^2}{p_{L0}}d_4 & \dfrac{V^2}{p_{L0}}e_4 & \dfrac{V^2}{p_{L0}}f_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2\mathrm{e}^{i2\theta} + \text{c.c.} \\ i\partial A/\partial t_1 \mathrm{e}^{i\theta} + \text{c.c.} \\ A\mathrm{e}^{i\theta} + \text{c.c.} \\ |A|^2 \end{pmatrix}. \tag{96}$$

ここで, 実定数 $c_j, d_j, e_j\ (j = 1,2,3,4)$ と f_s は, それぞれ,

$$c_4 = \mathit{\Delta}^2(4c_0\mathit{\Omega}^2 + m_5), \tag{97}$$

$$c_3 = \left[c_4 - \frac{3\gamma p_{G0}\alpha_0 c_0}{(1-\alpha_0)V^2}\right]\frac{k}{\mathit{\Omega}} - \frac{\alpha_0 m_3 + m_4}{2(1-\alpha_0)\mathit{\Omega}}, \tag{98}$$

$$c_1 = -\frac{(1-\alpha_0)c_3 k}{\alpha_0\mathit{\Omega}} - \frac{m_2}{2\alpha_0\mathit{\Omega}}, \tag{99}$$

$$c_2 = (c_1 - 3c_0)\frac{\mathit{\Omega}}{k} + \frac{m_1}{2k}, \tag{100}$$

$$d_4 = 2\mathit{\Delta}^2\mathit{\Omega}, \tag{101}$$

$$d_1 = \frac{d_4}{3\alpha_0 v_p^2}[b_1 - 3(1-\alpha_0)], \tag{102}$$

$$d_2 = \frac{d_4}{v_p}\left(1 + \frac{b_2}{6\alpha_0 v_p}\right), \tag{103}$$

$$d_3 = \frac{d_4}{v_p}\left(1 + \frac{b_3}{6\alpha_0 v_p}\right), \tag{104}$$

$$e_4 = -\frac{\mathit{\Delta}^2}{\mathit{\Omega}^2}, \tag{105}$$

$$e_3 = \frac{e_4}{v_p} - \frac{b_3}{k}\frac{\eta}{v_g}, \tag{106}$$

$$e_1 = -\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\left(\frac{e_3}{v_p} - \frac{b_3}{\mathit{\Omega}}\frac{\eta}{v_g}\right), \tag{107}$$

$$e_2 = e_1 v_p + \frac{b_2}{k}\frac{\eta}{v_g}, \tag{108}$$

$$f_s = -\mathit{\Delta}^2(\mathit{\Omega}^2 + 2b_2\mathit{\Omega} k) + \frac{3\gamma(3\gamma-1)p_{G0}}{V^2}, \tag{109}$$

と与えられるが, $e_j\ (j = 1,2,3,4)$ を係数とする $A\mathrm{e}^{i\theta} + \text{c.c.}$ なる項は, Slow mode では現れなかった [4] ことを強調しておきたい. この項は, 前述の (91) に起因して現れる項である.

4.3 遠方場II—— 包絡波の散逸と分散を伴う非線形伝播

基礎方程式系 (10)–(13) と (16) に対応する, ϵ^3 に対する方程式系は, 次式である:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial t_0} - 3\dfrac{\partial R_3}{\partial t_0} + \dfrac{\partial u_{G3}}{\partial x_0} = N_1, & (110) \\ \alpha_0 \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial t_0} - (1-\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L3}}{\partial x_0} = N_2, & (111) \\ -3\gamma \dfrac{p_{G0}}{V^2}\dfrac{\partial R_3}{\partial x_0} + \beta_1 \dfrac{\partial u_{G3}}{\partial t_0} - \beta_1 \dfrac{\partial u_{L3}}{\partial t_0} = N_3, & (112) \\ (1-\alpha_0+\beta_1\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L3}}{\partial t_0} - \beta_1\alpha_0\dfrac{\partial u_{G3}}{\partial t_0} + (1-\alpha_0)\dfrac{p_{L0}}{V^2}\dfrac{\partial p_{L3}}{\partial x_0} = N_4, & (113) \\ \dfrac{p_{L0}}{V^2 \Delta^2} p_{L3} + \dfrac{\partial^2 R_3}{\partial t_0^2} = N_5, & (114) \end{cases}$$

ここで, 非同次項 N_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ は, それぞれ,

$$\begin{aligned} N_1 = &- \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial t_2}(3R_1 - \alpha_1) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t_1}[3R_1(\alpha_1 - 2R_1) + 3R_2 - \alpha_2] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1}[u_{G1}(3R_1 - \alpha_1) - u_{G2}] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_0}\left[3(u_{G2}R_1 + u_{G1}R_2) - (\alpha_1 u_{G2} + \alpha_2 u_{G1})\right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial t_0}\left[3(\alpha_1 R_2 + \alpha_2 R_1) - 12R_1R_2 - 6\alpha_1 R_1^2 + 10R_1^3\right] \\ &+ 3\frac{\partial u_{G1}R_1(\alpha_1 - 2R_1)}{\partial x_0}, \end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned} N_2 = &(1-\alpha_0)\left(\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{L2}}{\partial x_1}\right) \\ &- \alpha_0\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial t_1}\right) - \alpha_0\frac{\partial \alpha_1 u_{L1}}{\partial x_1} \\ &- \alpha_0\frac{\partial}{\partial x_0}(\alpha_2 u_{L1} + \alpha_1 u_{L2}) \\ &+ (1-\alpha_0)\frac{\partial \rho_{L1}}{\partial t_0}, \end{aligned} \tag{116}$$

$$\begin{aligned} N_3 = &3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial R_1}{\partial x_2} - \beta_1\frac{\partial}{\partial t_2}(u_{G1} - u_{L1}) \\ &- \beta_1\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_1} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_1}\right) \\ &+ 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial R_2}{\partial x_1} - \beta_1\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G1} - u_{L1}) \\ &- \beta_2(u_{G1} - u_{L1})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_1} - \beta_1\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G2} - u_{L2}) \\ &+ 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\left[\alpha_1\frac{\partial R_1}{\partial x_1} - (3\gamma+1)R_1\frac{\partial R_1}{\partial x_1}\right] \\ &- \beta_2(u_{G1} - u_{L1})\left(u_{G1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0}\right) \\ &- \beta_1\left[\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G2} - u_{L2}) + \alpha_2\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G1} - u_{L1})\right] \\ &- \beta_2(u_{G2} - u_{L2})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} \\ &- \beta_1\left[\frac{\partial}{\partial x_0}(u_{G1}u_{G2} - u_{L1}u_{L2}) + \alpha_1\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0}\right)\right] \\ &+ 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\left[\alpha_1\frac{\partial R_2}{\partial x_0} + \alpha_2\frac{\partial R_1}{\partial x_0} - (3\gamma+1)\left(\frac{\partial R_1R_2}{\partial x_0} + \alpha_1 R_1\frac{\partial R_1}{\partial x_0} - \frac{3\gamma+2}{6}\frac{\partial R_1^3}{\partial x_0}\right)\right], \end{aligned} \tag{117}$$

$$
\begin{aligned}
N_4 =& -(1-\alpha_0)\left(\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{L1}}{\partial t_2}\right)\\
&+\beta_1\alpha_0\frac{\partial}{\partial t_2}(u_{G1}-u_{L1})\\
&+\beta_1\alpha_0\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G1}-u_{L1})\\
&+\beta_1\alpha_0\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_1}-u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_1}\right)\\
&+\beta_2\alpha_0(u_{G1}-u_{L1})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_1}\\
&+\alpha_0\alpha_1\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_1}+\alpha_0\frac{\partial \alpha_1 u_{L1}}{\partial t_1}\\
&-(1-\alpha_0)\left(\frac{\partial u_{L1}^2}{\partial x_1}+\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L2}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{L2}}{\partial t_1}\right)\\
&+\beta_1\alpha_0\left[\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G2}-u_{L2})\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\alpha_2\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G1}-u_{L1})\right]\\
&+\alpha_0 p_{L1}\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\\
&+\beta_1\alpha_0\left[\frac{\partial}{\partial x_0}(u_{G1}u_{G2}-u_{L1}u_{L2})\right.\\
&\qquad\left.+\alpha_1\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0}-u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0}\right)\right]\\
&+\beta_1\alpha_0\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G2}-u_{L2})\\
&+\beta_2\alpha_0\left[(u_{G1}-u_{L1})\left(u_{G1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+(u_{G2}-u_{L2})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0}\right]\\
&+\alpha_0\frac{\partial \alpha_1 u_{L1}^2}{\partial x_0}+\alpha_0\frac{\partial}{\partial t_0}(\alpha_1 u_{L2}+\alpha_2 u_{L1})\\
&-2(1-\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}u_{L2}}{\partial x_0}\\
&+\alpha_0\left(\alpha_1\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L2}}{\partial x_0}+\alpha_2\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_0}\right)\\
&+\alpha_0 p_{L1}\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_0}\\
&+\alpha_0\left[p_{L2}\frac{p_{L0}}{V^2}-\frac{3\gamma(3\gamma-1)}{2}\frac{p_{G0}}{V^2}R_1^2\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{p_{L0}}\frac{V^2\mathit{\Delta}^2}{\mathit{\Omega}^2}R_1\right]\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0},
\end{aligned}
\tag{118}
$$

$$
\begin{aligned}
N_5 =& -2\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial t_2}-\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_1^2}-2\frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0\partial t_1}\\
&-2R_1\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial t_1}-2u_{G1}\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_1\partial x_0}+\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial x_1}\right)\\
&-3\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\frac{\partial R_1}{\partial t_1}-\frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0}\frac{\partial R_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_{G1}}{\partial t_1}\frac{\partial R_1}{\partial x_0}\\
&-R_1\frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2}-R_2\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2}\\
&-2u_{G1}\left(R_1\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial x_0}+\frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0\partial x_0}\right)\\
&-3\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\frac{\partial R_2}{\partial t_0}-\frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0}\frac{\partial R_2}{\partial x_0}\\
&-2u_{G2}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial x_0}-u_{G1}^2\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2}\\
&-\frac{\partial R_1}{\partial x_0}\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0}+\frac{\partial u_{G2}}{\partial t_0}\right.\\
&\qquad\left.+R_1\frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0}+3u_{G1}\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\right)\\
&+V\mathit{\Delta}\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2}-\frac{1}{V\mathit{\Delta}}p_{L1}\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\\
&+\frac{p_{G0}}{V^2\mathit{\Delta}}\frac{3\gamma(3\gamma-1)}{2}\frac{\partial R_1^2}{\partial t_0}\\
&+\frac{3\gamma(3\gamma-1)}{\mathit{\Delta}^2}\frac{p_{G0}}{V^2}R_1R_2\\
&-\frac{\gamma(3\gamma-1)(3\gamma+4)}{2\mathit{\Delta}^2}\frac{p_{G0}}{V^2}R_1^3\\
&-\left(\frac{4\mu}{V\mathit{\Delta}^2}+\frac{V\mathit{\Delta}}{\mathit{\Omega}^2}\right)\frac{\partial R_1}{\partial t_0}+\frac{1}{\mathit{\Omega}^2}(R_1^2-R_2).
\end{aligned}
\tag{119}
$$

近傍場と遠方場 I と同様に, 遠方場 II でも, 質量保存式 (110)(111) に Slow mode との差異はなく, 運動量保存式 (112)(113) に V が現れ, Keller の式 (114) に V と $\mathit{\Delta}$ が現れる. 一方, 非同次項に Slow mode では現れない以下の項が現れた:

(i) 液相の質量保存式の非同次項 (116) より,

$$(1-\alpha_0)\frac{\partial \rho_{L1}}{\partial t_0}. \tag{120}$$

Slow mode の NLS では, 液相密度 ρ_L^* の摂動展開が $O(\epsilon^5)$ から始まるため, この項は現れない [4].

(ii) 液相の運動量保存式の非同次項 (118) より,

$$\alpha_0\frac{1}{p_{L0}}\frac{V^2\mathit{\Delta}^2}{\mathit{\Omega}^2}R_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0}. \tag{121}$$

(iii) Keller の式の非同次項 (119) より,

$$V\Delta\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2}-\frac{1}{V\Delta}p_{L1}\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{p_{G0}}{V^2\Delta}\frac{3\gamma(3\gamma-1)}{2}\frac{\partial R_1^2}{\partial t_0}+\frac{1}{\Omega^2}(R_1^2-R_2). \tag{122}$$

近傍場と遠方場 I 同様, 方程式系 (110)–(114) を単一の非同次方程式にまとめる:

$$\mathcal{L}[R_3]=\Lambda_1 \mathrm{e}^{i3\theta}+\Lambda_2 \mathrm{e}^{i2\theta}+\Lambda_3 \mathrm{e}^{i\theta}+\text{c.c.}. \tag{123}$$

ここで, Λ_j $(j=1,2,3)$ は複素振幅 A を含む複素変数である (本解析では, Λ_1 および Λ_2 の具体形は用いない). 非同次方程式 (123) の可解条件より,

$$\begin{aligned}\Lambda_3=&\left(-\frac{\partial D}{\partial\Omega}\right)\left[i\left(\frac{\partial A}{\partial t_2}+v_g\frac{\partial A}{\partial x_2}\right)+\frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}\right.\\ &\left.+C_1|A|^2A+iC_2A+C_3A+iC_4\frac{\partial A}{\partial x_1}\right]\\ =&\,0,\end{aligned} \tag{124}$$

が課される. ここに, 実定数係数は以下のとおりである:

$$q=\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}k}=-\frac{9\alpha_0\Delta^2\Omega}{(3\alpha_0+\Delta^2k^2)^2}<0, \quad (\because \alpha_0>0,\ \Delta>0,\ \Omega>0,\ k>0), \tag{125}$$

$$C_1=\frac{1}{3}\frac{1}{\partial D/\partial\Omega}\left[\Omega n_1-\frac{\Omega n_2}{\alpha_0}+\frac{1-\alpha_0+\beta_1}{(1-\alpha_0)\beta_1}kn_3 + \frac{kn_4}{\alpha_0(1-\alpha_0)}-\frac{\Delta^2k^2n_5}{\alpha_0}\right], \tag{126}$$

$$n_1=3\Omega[c_0(4-b_1)-c_1+6b_1-10] + k\,[c_2(3-b_1) + b_2(3c_0-c_1+9b_1-18)], \tag{127}$$

$$n_2=-\alpha_0(b_1c_3+b_3c_1), \tag{128}$$

$$\begin{aligned}\hat{n}=&(2\beta_1-\beta_2)b_1(c_2-c_3)\Omega\\ &-(\beta_1-2\beta_2)(b_2-b_3)c_1\Omega\\ &-kb_1(b_2-b_3)[\beta_1(b_2+b_3)+\beta_2b_2]\\ &-\beta_1k(b_2c_2-b_3c_3),\end{aligned} \tag{129}$$

$$n_3=\hat{n}+3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}k\left[2b_1c_0-c_1 + (3\gamma+1)\left(1-b_1-c_0+\frac{3\gamma}{2}\right)\right], \tag{130}$$

$$\begin{aligned}n_4=&-\alpha_0\hat{n}+\frac{\Omega n_2}{k}-2(1-\alpha_0)b_3c_3k\\ &+\alpha_0k\left\{b_1c_4-\frac{p_{L0}}{V^2}b_4c_1+2\alpha_0b_4\frac{p_{L0}}{V^2}\right.\\ &\left.-b_1\left[-3b_3^2+\frac{3\gamma(3\gamma-1)p_{G0}}{2V^2}\right]\right\},\end{aligned} \tag{131}$$

$$n_5=5c_0\Omega^2+2b_2k[b_2k-(1+3c_0)\Omega] + 3\gamma(3\gamma-1)\left(c_0-2-\frac{3\gamma}{2}\right)\frac{p_{G0}}{V^2\Delta^2}, \tag{132}$$

$$C_2=\frac{(4\mu/V+V\Delta^3/\Omega^2)k^2}{2(3\alpha_0+\Delta^2k^2)}\geq 0, \quad \left(\begin{aligned}\because\ \ &\mu>0,\quad V>0,\quad \Delta>0,\\ &\Omega>0,\quad k>0,\quad \alpha_0>0\end{aligned}\right), \tag{133}$$

$$C_{41}=(b_1-3)^2\frac{\Omega^2}{k}+e_2\Omega+\frac{1}{\alpha_0}e_4k, \tag{134}$$

$$C_{42}=e_2k+\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}e_3(\Omega+k), \tag{135}$$

$$C_4=\frac{1}{3}\frac{1}{\partial D/\partial\Omega}\left(C_{41}-C_{42}v_g+\frac{\Delta^2k\Omega}{\alpha_0}\eta\right), \tag{136}$$

$$C_3=\frac{1}{3}\frac{1}{\partial D/\partial\Omega}\left(C_{42}\eta+\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}V^2\Delta^2\Omega^4\right). \tag{137}$$

群速度 v_g の波数 k 導関数 q は負値であり, q を与える式の形は, Slow mode の場合と全く同じである. 一方で, C_2 は Slow mode とは異なる [4].

式 (124) の解として, 包絡波の複素振幅 A を正弦波解に仮定する:

$$A=\mathrm{e}^{i\Theta},\quad \Theta=K\xi-W(K)\tau. \tag{138}$$

ここで, K は包絡波 A の無次元波数, W は無次元周波数, Θ は位相関数である.

式 (90)(124) を, 微分展開法 (26)(27) に立ち戻って組み合わせると, 独立変数として x と t が回復し, 近傍場, 遠方場 I, 遠方場 II までを接続できる:

$$\begin{aligned}&i\left(\frac{\partial A}{\partial t}+v_g\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\epsilon\eta A\\ &\quad+\epsilon^2\left(C_1|A|^2A+iC_2A+C_3A+i\frac{C_4}{\epsilon}\frac{\partial A}{\partial x}\right)\\ &=0.\end{aligned} \tag{139}$$

変数変換

$$\begin{cases} \tau = \epsilon^2 \left(1 - \dfrac{C_3}{W}\right) t, \\ \xi = \epsilon \left[x - \left(v_g + \dfrac{\eta}{K} + \epsilon C_4\right) t\right], \end{cases} \tag{140}$$

を用いると, 微分演算子は,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon^2 \left(1 - \frac{C_3}{W}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon \left(v_g + \frac{\eta}{K} + \epsilon C_4\right) \frac{\partial}{\partial \xi}, \tag{141}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \tag{142}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \tag{143}$$

と変形され, 式 (139) は,

$$i\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + C_1 |A|^2 A + iC_2 A = 0, \tag{144}$$

と書きかえられる．これは, 減衰項を含む NLS 方程式である．ここで, $C_2 \geq 0$ より, 左辺第 4 項は減衰項であり, 減衰は液体の粘性と液体の圧縮性の両効果に起因する (熱による減衰は無視したことを改めて強調する)．左辺第 2 項は分散性, 第 3 項は 3 次の非線形性をそれぞれ表す．遠方場 II では, 分散性, 非線形性, 散逸性の 3 つの性質が現れ, これらが競合しながら, 包絡波が伝播する．また, τ と ξ の中に, Slow mode の NLS 方程式には存在しなかった項が現れた．特に, ξ については, 群速度 v_g を低下させる項が現れているが, これは Slow mode では現れない [4]. τ に含まれる C_3 の物理的意味は続報で述べる.

式 (144) より包絡波の複素振幅 A が求まり, これを式 (58) に代入することで, 気泡径の 1 次の摂動 R_1 が求まる．さらに, 従属変数の 1 次の摂動は (63)–(66) より R_1 の実定数倍で表されるため, 有次元の従属変数の近似解を求めることが可能となり, 最終的に気泡流中の圧力波のふるまいを予測することができる.

NLS 方程式の解の簡単な説明として, 式 (144) の散逸項のない場合, つまり, $C_2 = 0$ の場合を考える:

$$i\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + C_1 |A|^2 A = 0. \tag{145}$$

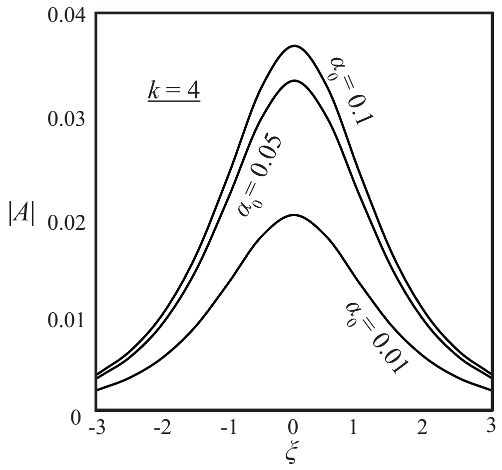

図 4: 包絡波の実振幅 $|A|$

この式の厳密解は, 包絡ソリトン

$$A(\tau, \xi) = A_0 \sqrt{\frac{q(k)}{C_1(k)}} \operatorname{sech}[A_0(\xi - \xi_0)] \exp\left[\frac{iA_0^2 q(k)\tau}{2}\right], \tag{146}$$

として知られている [6, 15]．ここで, A_0 と ξ_0 はともに任意の実定数である．式 (146) は $C_1 \leq 0$ および $q \leq 0$ の場合のみ有効であることに注意しておく．任意定数をそれぞれ $A_0 = 1$, $\xi_0 = 0$ と定めると, 式 (146) より, 包絡波の実振幅 $|A|$ は

$$|A| = \sqrt{\frac{q(k)}{C_1(k)}} \operatorname{sech}\xi, \tag{147}$$

となる．無次元波数を $k = 4$ で固定した時, 初期ボイド率が $\alpha_0 = 0.1$, $\alpha_0 = 0.05$, $\alpha_0 = 0.01$ における包絡波の実振幅 $|A|$ を図 4 に示す．ここで, $\Delta = 0.1$, $\Omega = 1$ と仮定し, C_1 は Kanagawa らのデータ [4] を参考に, $\alpha_0 = 0.1$ で $C_1 = -14.5$, $\alpha_0 = 0.05$ で $C_1 = -13.2$, $\alpha_0 = 0.01$ で $C_1 = -12.2$ と判断して図 4 を描いた．初期ボイド率 α_0 の増加に伴い, 包絡ソリトンの高さも増加することがわかる．これは, 気泡はまわり水と比べて弾性が大きいため非線形振動子と考えることができ, 水中の気泡が多いほど非線形振動子が増えるため, 包絡ソリトンの高さが増加するのではないかと考えられる.

5 結言

5.1 結果のまとめ

多数の気泡を含む圧縮性のある水中を伝わる 1 次元進行波の中でも, 水の圧縮性に起因して発現する, 位相速度が極めて大きな圧力波の弱非線形伝播を理論的に調べた. 多重尺度法を用いて, 高周波数の準単色波のゆるやかな変調を記述する NLS 方程式を導いた. この NLS 方程式には, Slow Mode の NLS 方程式 [4] では現れなかった項がいくつか現れた.

5.2 今後の展望

(a) 式 (140)(144) を数値的に解いて, 波動伝播のふるまいの詳細な理解に迫る.

(b) 本解析で導いた非線形波動方程式は, 随所に長さに関する V を含むが, $V \to 0$, $V \to 1$, $V \to \infty$ などの極限をとり, Slow mode の結果 [4] と比較する.

(c) 本解析では 2 流体モデルの基礎方程式系を用いて非線形波動方程式の導出を行ったが, 混合体モデルを用いて同様に非線形波動方程式の導出を行い, 非線形係数の比較を行う. その際, 熱伝導や粘性の効果の影響を含めて考察を行う.

(d) 本解析で用いた物理量の無次元化では, 非線形波動方程式を導出することが可能な物理パラメータは 1 通りにしか定まらなかったが, 無次元化の定義を変えることで Fast mode の長波の領域を記述する波動方程式の導出が可能か, より踏み込んだ考察を行う.

主な記号一覧

以下に本研究に使用した記号を示す.

t : 時間
x : 空間座標
ρ : 密度
u : 流速
p : 圧力
α : ボイド率 (気相の体積分率)
P : 気泡壁における局所的液相圧力
R : 気泡の半径
c : 音速
γ : ポリトロープ指数
σ : 表面張力
μ : 液体の粘性
n : 物性値
U : 代表的な速度
L : 代表的な波長
T : 代表的な周期
k : 波数
ω : 角振動数
ω_B : 単一気泡の固有角振動数
ϵ : 振幅
v_p : 位相速度
v_g : 群速度

添え字
0 : 初期状態
G : 気相
L : 液 相
有次元量に $*$ をつけ, 無次元量と区別した.

謝辞

本研究を行うにあたり, 筑波大学理工学群工学システム学類金川研究室の方々に多くのご指導とご支援をいただきました.

筑波大学システム情報系構造エネルギー工学域助教の金川哲也先生には, 指導教員としてとりわけ多大なるご指導をいただきました. 心から感謝の意を表します.

普段からコミュニケーションをとっていただき, 楽しく研究室で過ごすことができた同期の圷 亮輔君に心からの感謝の意を表します.

本論文完成につながる有意義な話をいただきました, 福岡工業大学工学部知能機械工学科准教授の江頭 竜先生に心から感謝の意を表します.

最後に, 4 年間の大学生活を支えて頂き, 日頃より温かく見守ってくださった両親に心から感謝の意を表します.

参考文献

[1] L. van Wijngaarden, "On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles," *J. Fluid Mech.*, **33** (1968), 465.

[2] R. I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media* (Hemisphere, New York, 1991).

[3] R. Egashira, T. Yano and S. Fujikawa, "Linear wave propagation of fast and slow modes in mixtures of liquid and gas bubbles," *Fluid Dyn. Res.*, **34** (2004), 317.

[4] T. Kanagawa, T. Yano, M. Watanabe and S. Fujikawa, "Unified theory based on parameter scaling for derivation of nonlinear wave equations in bubbly liquids," *J. Fluid Sci. Technol.*, **5** (2010), 351.

[5] 大谷清伸, 杉山 弘, 溝端一秀, "気泡を含む液体中を伝播する強い衝撃波と気泡崩壊," 日本機械学会論文集 B 編, **68** (2002), 1646.

[6] A. Jeffrey and T. Kawahara, *Asymptotic methods in nonlinear wave theory* (Pitman, London, 1982).

[7] 川原琢治, ソリトンからカオスへ (朝倉書店, 1993).

[8] 渡辺慎介, ソリトン物理入門 (培風館, 1985).

[9] 田中光宏, 非線形波動の物理 (森北出版, 2017).

[10] T. Yano, R. Egashira and S. Fujikawa, "Linear analysis of dispersive waves in bubbly flows based on averaged equations," *J. Phys. Soc. Jpn.*, **75** (2006), 104401.

[11] I. Eames and J. C. R. Hunt, "Forces on bodies moving unsteadily in rapidly compressed flows," *J. Fluid Mech.*, **505** (2004), 349.

[12] J. B. Keller and I. I. Kolodner, "Damping of underwater explosion bubble oscillations," *J. Appl. Phys.*, **27** (1956), 1152.

[13] 金川哲也, 渡部正夫, 矢野猛, 藤川重雄: 気泡を含む液体中の圧力波伝播の非線形波動方程式 (二流体モデルと混合体モデルとの比較), 日本機械学会論文 B 編, **76** (2010), 1802.

[14] T. Kanagawa, "Two types of nonlinear wave equations for diffractive beams in bubbly liquids with nonuniform bubble number density," *J. Acoust. Soc. Am.*, **137** (2015), 2642.

[15] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves* (Wiley, New York, 1974).

付録1 Tait の状態方程式の導出

本解析で用いた形の Tait の状態方程式 (18) の導出過程を示す:

$$\frac{p_L^* + B}{p_{L0}^* + B} = \left(\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*}\right)^n. \tag{148}$$

ここで, n, B は定数で, 水の場合, $n = 7.15$, $B = 304.9\,\mathrm{MPa}$ である． 両辺に $p_{L0}^* + B$ をかけ, 変形する:

$$p_L^* + B = \left(\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*}\right)^n (p_{L0}^* + B), \tag{149}$$

$$\Longleftrightarrow p_L^* + B = \left[\left(\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*}\right)^n - 1\right](p_{L0}^* + B) + (p_{L0}^* + B). \tag{150}$$

両辺から B を引き, 単相水中の音速

$$c_{L0} = \sqrt{\frac{n(p_{L0}^* + B)}{\rho_{L0}^*}}, \tag{151}$$

を組み込み, 整理する:

$$p_L^* = p_{L0}^* + \frac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n}\left[\left(\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*}\right)^n - 1\right]. \tag{18}$$

付録2 気相密度 ρ_G^*・気相圧力 p_G^* の摂動の導出

気相密度 ρ_G^* および気相圧力 p_G^* の摂動を, 気泡径 R^* の摂動を用いて表す． 気泡内の気体の質量保存式 (19) に, 気泡径 R^* の摂動展開 (29) を代入する:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} &= \left(\frac{R_0^*}{R^*}\right)^3 \\ &= \left[\frac{1}{1 + \epsilon(R_1 + \epsilon R_2 + \cdots)}\right]^3.\end{aligned} \tag{152}$$

二項定理を用いて展開する:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} &= 1 - 3\epsilon(R_1 + \epsilon R_2 + \epsilon^2 R_3 + \cdots) \\ &\quad + \frac{-3(-3-1)}{2!}\epsilon^2(R_1^2 + 2\epsilon R_1 R_2 + \cdots)^2 \\ &\quad + \frac{-3(-3-1)(-3-2)}{3!}\epsilon^3(R_1 + \epsilon R_2 + \cdots)^3 \\ &\quad + \cdots \\ &= 1 - \epsilon(3R_1) - \epsilon^2(3R_2 - 6R_1^2) \\ &\quad - \epsilon^3(3R_3 - 12R_1R_2 + 10R_1^3) + \cdots.\end{aligned} \tag{153}$$

上式と気相密度 ρ_G^* の摂動展開 (32) は恒等式なので, 係数を比較して,

$$\rho_{G1} = -3R_1, \tag{36}$$

$$\rho_{G2} = -3R_2 + 6R_1^2, \tag{37}$$

$$\rho_{G3} = -3R_3 + 12R_1R_2 - 10R_1^3. \tag{38}$$

次に, 気相のポリトロープ変化の状態方程式 (17) に気泡内の気体の質量保存式 (19) を代入し, さらに気泡径 R^* の摂動展開 (29) を代入する:

$$\begin{aligned}\frac{p_G^*}{p_{G0}^*} &= \left(\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*}\right)^\gamma \\ &= \left(\frac{R_0^*}{R^*}\right)^{3\gamma} \\ &= \left[\frac{1}{1 + \epsilon(R_1 + \epsilon R_2 + \cdots)}\right]^{3\gamma}.\end{aligned} \tag{154}$$

同様に, 二項定理を用いて展開する:

$$\begin{aligned}\frac{p_G^*}{p_{G0}^*} &= 1 - 3\gamma\epsilon(R_1 + \epsilon R_2 + \epsilon^2 R_3 + \cdots) \\ &\quad + \frac{-3\gamma(-3\gamma-1)}{2!}\epsilon^2(R_1^2 + 2\epsilon R_1R_2 + \cdots)^2 \\ &\quad + \frac{-3\gamma(-3\gamma-1)(-3\gamma-2)}{3!} \\ &\qquad \times \epsilon^3(R_1 + \epsilon R_2 + \cdots)^3 + \cdots \\ &= 1 - \epsilon(3\gamma R_1) - \epsilon^2\left[3\gamma R_2 - \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2}R_1^2\right] \\ &\quad - \epsilon^3\left[3\gamma R_3 - 3\gamma(3\gamma+1)R_1R_2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\gamma(3\gamma+1)(3\gamma+2)}{2}R_1^3\right] + \cdots.\end{aligned} \tag{155}$$

上式と気相圧力 p_G^* の摂動展開 (34) は恒等式なので, 係数を比較して,

$$p_{G1} = -3\gamma R_1, \tag{39}$$

$$p_{G2} = -3\gamma R_2 + \frac{3\gamma(3\gamma+1)}{2}R_1^2, \tag{40}$$

$$p_{G3} = -3\gamma R_3 + 3\gamma(3\gamma+1)R_1R_2 - \frac{\gamma(3\gamma+1)(3\gamma+2)}{2}R_1^3. \tag{41}$$

付録 3 近傍場の気相の質量保存式の導出

近傍場の気相の質量保存式 (51) の導出過程を示す. 気相の質量保存式 (10) に, 微分展開法 (26)(27), 初期ボイド率 α_0, 気相流速 u_G^*, 気相密度 ρ_G^* の摂動展開 (28)(30)(32) を代入する:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\alpha\rho_G^* u_G^*) = 0, \\
\iff &\frac{1}{T^*}\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2}\right) \\
&\quad \times [\alpha_0(1+\epsilon\alpha_1+\cdots)\rho_{G0}^*(1+\epsilon\rho_{G1}+\cdots)] \\
&+ \frac{1}{L^*}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&\quad \times [\alpha_0(1+\epsilon\alpha_1+\cdots)\rho_{G0}^*(1+\epsilon\rho_{G1}+\cdots) \\
&\quad \times U^*(\epsilon u_{G1}+\cdots)] = 0, \\
\iff &\frac{\alpha_0\rho_{G0}^*}{T^*}\left[\epsilon\frac{\partial}{\partial t_0}(\alpha_1+\rho_{G1}) + O(\epsilon^2)\right] \\
&+ \frac{\alpha_0\rho_{G0}^* U^*}{L^*}\left[\epsilon\frac{\partial}{\partial x_0}u_{G1} + O(\epsilon^2)\right] = 0. \quad (156)
\end{aligned}$$

ここで, $U^*/L^* = 1/T^*$ であることに注意して, 両辺を $\alpha_0\rho_{G0}^*/T^*$ で割る:

$$\epsilon\frac{\partial}{\partial t_0}(\alpha_1+\rho_{G1}) + \epsilon\frac{\partial}{\partial x_0}u_{G1} + O(\epsilon^2) = 0. \quad (157)$$

近傍場は, ϵ に対する最低次の近似であるため, ϵ^1 の項のみ取り出し, 式 (36) の関係を用いて整理すると,

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial t_0} - 3\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} = 0. \quad (51)$$

付録 4 近傍場の線形波動方程式の導出

近傍場における線形波動方程式 (56) の導出過程を示す. 気相の質量保存式 (51) を, 液相の質量保存式 (52) に代入する:

$$\alpha_0\left(3\frac{\partial R_1}{\partial t_0} - \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0}\right) - (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} = 0. \quad (158)$$

さらに, β_1 をかけ, t_0 で偏微分する:

$$\begin{aligned}
&\beta_1\alpha_0\left(3\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 u_{G1}}{\partial t_0\partial x_0}\right) \\
&\quad - \beta_1(1-\alpha_0)\frac{\partial^2 u_{L1}}{\partial t_0\partial x_0} = 0. \quad (159)
\end{aligned}$$

ここで, 気相の運動量保存式 (53) に α_0 をかけ, x_0 で偏微分する:

$$\begin{aligned}
&-3\gamma\alpha_0\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} + \beta_1\alpha_0\frac{\partial^2 u_{G1}}{\partial x_0\partial t_0} \\
&\quad - \beta_1\alpha_0\frac{\partial^2 u_{L1}}{\partial x_0\partial t_0} = 0. \quad (160)
\end{aligned}$$

式 (159) を式 (160) に加える:

$$\begin{aligned}
&-3\gamma\alpha_0\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} + 3\beta_1\alpha_0\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} \\
&\quad - \beta_1\frac{\partial^2 u_{L1}}{\partial t_0\partial x_0} = 0. \quad (161)
\end{aligned}$$

Keller の式 (55) を, 液相の運動量保存式 (54) に代入する:

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha_0+\beta_1\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} - \beta_1\alpha_0\frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} \\
&\quad + (1-\alpha_0)\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(-\frac{V^2\mathit{\Delta}^2}{p_{L0}}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2}\right) = 0. \quad (162)
\end{aligned}$$

気相の運動量保存式 (53) に α_0 をかけて, 上式に加える:

$$\begin{aligned}
&-3\gamma\alpha_0\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial R_1}{\partial x_0} + (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} \\
&\quad - (1-\alpha_0)\mathit{\Delta}^2\frac{\partial^3 R_1}{\partial x_0\partial t_0^2} = 0. \quad (163)
\end{aligned}$$

上式に β_1 をかけて, x_0 で偏微分する:

$$\begin{aligned}
&-3\gamma\beta_1\alpha_0\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} + \beta_1(1-\alpha_0)\frac{\partial^2 u_{L1}}{\partial x_0\partial t_0} \\
&\quad - \beta_1(1-\alpha_0)\mathit{\Delta}^2\frac{\partial^4 R_1}{\partial x_0^2\partial t_0^2} = 0. \quad (164)
\end{aligned}$$

式 (161) に $(1-\alpha_0)$ をかけ, 上式に加える:

$$\begin{aligned}
&-3\gamma\alpha_0(1-\alpha_0+\beta_1)\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} + 3\beta_1\alpha_0(1-\alpha_0)\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} \\
&\quad - \beta_1(1-\alpha_0)\mathit{\Delta}^2\frac{\partial^4 R_1}{\partial x_0^2\partial t_0^2} = 0. \quad (165)
\end{aligned}$$

両辺を $3\beta_1\alpha_0(1-\alpha_0)$ で割って, 整理すると,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - \frac{(1-\alpha_0+\beta_1)\gamma p_{G0}}{\beta_1(1-\alpha_0)V^2}\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} \\
&\quad - \frac{\mathit{\Delta}^2}{3\alpha_0}\frac{\partial^4 R_1}{\partial x_0^2\partial t_0^2} = 0. \quad (56)
\end{aligned}$$