注意事項 [応用流体力学 期末試験] 2024 年 12 月 24 日 (火) 11:45–15:00 実施

注 1) **不正行為には学群学則で定める厳罰が課される**. 学生証要提示. 両面印刷を要確認.

注 2) シャープペンシルと替え芯, 消しゴム, 時計のみ使用可. 学生証を提示. 電卓, 筆箱, 定規などは一切使用不可. **携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまう**. 鞄のチャックをしめて床におく.

注 3) 13:45 より提出を許可する予定. やむなくトイレなどの一時退室を希望する場合は挙手のこと. **携帯電話をポケットに入れたまま退室すると, 不正行為とみなす**. 13:45 以降は不可. 複数名が同時に一時退室することは認めない.

注 4) 用いた答案用紙全てに記名のこと. 未使用答案用紙も提出のこと. 不足時には挙手のこと. 答案用紙右肩に, **1/3, 2/3, $\cdots$ のように, 計何枚中何枚目かを明記**のこと.

注 5) ある問題の解答において**導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 導出や証明を繰り返すことなく, 引用の形で用いてよい**. 引用の際は, 答案の式の番号と問題の番号などを区別の上で記載し, **どの公式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと.

注 6) 考え方の筋道, 式変形の根拠, 途中計算を, 論理的かつ正確に略さず記述のこと. **答えだけが正しいことは正答とみなさない**. 日本語での説明中に数式を挿入の形で解答のこと. 乱雑な答案や読みにくい答案は大幅に減点する.

注 7) [**重要!!**] 以下の記号, および問題文中で与えられている記号は, 説明なしに用いてよい. その他の記号は答案内で定義せよ. 記号の定義を改めても構わないが, 説明のこと.

- 時間を t, 密度を ρ, 空間座標ベクトル (の成分) を x_i, 速度ベクトル (の成分) を u_i, 応力テンソル (の成分) を p_{ij}, 粘性応力テンソル (の成分) を σ_{ij}, 熱流束ベクトル (の成分) を q_i, ひずみ速度テンソル (の成分) を e_{ij}, 散逸関数を Φ, 粘性散逸関数を $\hat{\Phi}$, “比” 内部エネルギーを e, “比” エントロピーを s, “比” エンタルピーを h, “比” 容積を v, 第一粘性係数を μ, 第二粘性係数を λ, 体積粘性係数を ζ, 圧力を p, 温度を T, 定圧比熱 (定圧 “比” 熱容量) を c_{P}, 流れ関数を Ψ, 循環を Γ, 複素速度ポテンシャルを $F(z)$ とする.
- 単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_i \, (i = 1, 2, 3)$, Kronecker デルタを δ_{ij} とする.
- ひずみ速度テンソル e_{ij}, “比” 内部エネルギー e, 単位ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ の混同の心配はないであろうが, 気になるならば, 異なる記号を定義の上で用いるとよい.
- 本試験問題において, “比” とは “単位質量あたり” を意味する.
- 無効添字 (ダミーインデックス, 死んだ添字) に対しては, Einstein の総和規約を用いる. もちろん, 総和記号を消去せずに残しても正答とする.
- 空間座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x_j\boldsymbol{e}_j$ について, その成分を $x_i \, (i = 1, 2, 3)$ とかく. 他のベクトルも同様であり, たとえば, 速度 $\boldsymbol{u}$ の x_i 方向成分は u_i である.

注 8) [**重要!!**] 大問 4 の解答時, 次の熱力学の公式を証明なしに用いてよい. 熱力学の慣例どおり, 下添字 p は p 固定下の偏微分演算を意味する.

$$c_{\mathrm{P}} = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p, \qquad T\left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho} - \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T$$

注 9) [**重要!!**] 添字表現を用いること. なお, 添字表現に加えてベクトル表現や成分表現も書いてもよい.

注 10) 熱力学の法則を使う際に, 問題の趣旨に即して, 準静的過程や可逆過程を仮定しても構わない.

注 11) 各種数学で既習の公式は証明不要.

注 12) Twins から授業評価アンケートへの回答をお願いいたします.

応用流体力学 (金川) 期末試験問題 (表面をまず参照)　実施: 2024 年 12 月 24 日 (火) 11:45–15:00

簡単のため, 外力 (ベクトル) と発熱 (スカラー) は考慮しない. 記号の定義は表面に記載.

1. 連続体力学において, 最も根幹となる次の偏微分方程式を用いて, 次の小問および大問を調べてゆく.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{A}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \tag{B}$$

$$\frac{\partial \rho(u_k^2/2+e)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u_k^2/2+e)u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ij}u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \tag{C}$$

   1) 2 次元の場合に, 変数添字 i, j, k を使うことなく, 定数添字 1 と 2 を用いて, (C) 式を書き下せ.
   2) (A)(B)(C) 式の各項の物理的意味をそれぞれ簡潔に述べよ. (A) 式の右辺は説明不要.

2. 等方性の Newton 流体の中でも, 粘性係数が定数とは限らない場合を考える.
   1) Newton 流体の構成式を導け. (注) ひずみ速度 e_{ij} を与える式は導出不要だが, Newton 流体の定義から出発すること. 次の 2 階と 4 階の等方テンソルは既知とする (a, A, B, C はスカラー).

$$2\text{階}:\ a\delta_{ij} \qquad 4\text{階}:\ A\delta_{ij}\delta_{k\ell} + B\delta_{ik}\delta_{j\ell} + C\delta_{i\ell}\delta_{kj}$$

   2) Navier–Stokes 方程式を導け. (注) Lagrange 微分の Euler 的表現は導出不要.

3. 熱流束を伴わない流れを考える. 流体力学において, 孤立断熱系の熱力学第二法則の主張に相当する, 等号付き不等式が存在する.

$$\frac{Ds}{Dt} \geq 0 \tag{D}$$

   (注) 熱力学における第二法則を用いてはならない. (ヒント) $\hat{\Phi} > 0$ を示す.

   1) 等号を示せ. 流れは熱力学でいうところの可逆的とし, 非粘性流れを仮定せよ.
   2) 不等号を示せ. 流れは不可逆的とし, 粘性流体の中でも等方性 Newton 流体に限定してよい.

4. 任意の粘性流体を考える. 流体力学のエネルギー保存式を, 熱力学と融合して, 次式に変形せよ.

   (ヒント) 定圧比熱 c_P は変数である. 表面記載の熱力学の公式を参考にするとよい.

$$\rho c_\mathrm{P}\frac{DT}{Dt} = \rho T\left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_p \frac{Dp}{Dt} + \sigma_{ij}e_{ij} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \tag{E}$$

5. 粘性と熱流束が無視できる定常流れを考える. “比” 運動エネルギーと “比” エンタルピーの総和 $u_j^2/2+h$ が流線に沿って一定となることを示せ. つまり, エネルギー保存則を意味する偏微分方程式から代数的な関係式を抽出せよ.

6. 2 次元非圧縮性の渦なし流れを考える. 座標を (x, y), 速度の x 方向成分を u, y 方向成分を v とする.
   1) 命題「2 次元非圧縮性の流れ $\Longrightarrow$ 流れ関数 Ψ が存在」を示せ.
   2) 1) を踏まえ, 流線と流れ関数 Ψ の関係を見出せ.
   3) 流れ関数 Ψ が調和関数であることを示せ.
   4) 循環の定義から出発し, 次式を示せ. ただし, $F(z)$ は複素速度ポテンシャル ($z \equiv x + \mathrm{i}y$), Γ_C は複素平面上の任意の閉曲線 C に沿う循環, 記号 Re は複素数の実部を意味する.

$$\Gamma_C = \mathrm{Re}\left[\oint_C \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right] \tag{F}$$