応用流体力学 小テスト [2] (表面も参照)　実施: 2024 年 12 月 3 日 (火) 12:15–15:00

1. 任意の連続体において次のエネルギー方程式が成立する. 次式から出発し, 粒子の移動に沿って (すなわち, Lagrange 微分を用いて), さまざまな未知変数がどのように変化するのかを与える偏微分方程式 (本小テストでは "発展方程式" とよぶ) を導きたい. 質量保存則を与える偏微分方程式や任意の連続体の "運動方程式" を既知として導出せずに用いてよい.

$$\frac{\partial \rho(u_k^2/2+e)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u_k^2/2+e)u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ij}u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho K_j u_j + Q \tag{A}$$

(1) "比" 運動エネルギーと "比" 内部エネルギーの総和に対する発展方程式を導け.

(2) "比" 運動エネルギーの発展方程式と, "比" 内部エネルギーの発展方程式を, それぞれ導け.

2. 任意の連続体に対して, 散逸関数 Φ は次式で定義される.

$$\Phi = p_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{B}$$

(1) ひずみ速度 e_{ij} を用いれば, 散逸関数は $p_{ij}e_{ij}$ とも書けることを示せ.

(2) 任意の連続体から, 任意の粘性流体へと対象を狭めて, 散逸関数 Φ を粘性散逸関数 $\hat{\Phi}$ と圧力起因の項に分解せよ.

(3) Newton 流体を仮定し, 粘性散逸関数が正となることを示せ. Newton 流体の構成式の導出は不要である.

3. Euler 的に表現した連続体力学の未知変数が, 熱力学的状態変数 (状態量) でもあるとする. 加えて, 連続体力学に熱力学の第一法則を持ち込む.

(1) "比" 内部エネルギーの発展方程式を, "比" エントロピーの発展方程式へと書き換えよ.

(2) 流体力学において, "比" 内部エネルギーが流体粒子の流れに沿って不変であるためには, どのような流れであることが要求されるか. 粘性や圧縮性などの有無の観点から, 数式を用いて考察せよ.

(3) 孤立断熱系の不可逆過程を記述する熱力学第二法則に相当する数式が, 熱力学第一法則と流体力学の融合によって, Lagrange 微分を用いた形で導かれることを説明せよ.

4. 熱力学でいうところの理想気体に対し, 流体力学における次のエネルギー発展方程式を導け.

$$\rho c_{\mathrm{P}}\frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \hat{\Phi} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + Q \tag{C}$$

5. **密度が定数とは限らない**非圧縮性流れを考える. 流れは, 定常で非粘性, また外力は働かないとする. Euler の運動方程式 (非粘性流体の運動量保存則を意味する偏微分方程式) から出発して, Bernoulli の定理を導け.

6. 次の概念に対応する定義式を書け. 書くだけでよいが, 未定義の記号には説明を添えよ.

(注) 知識問題である. 出来なかった場合には速やかな復習をすすめる. 期末試験では, 知識ではなく理屈を問うためである.

(1) 圧力関数　(2) 渦度ベクトル　(3) 循環　(4) 速度ポテンシャル　(5) 流れ関数
(6) 体積流量　(7) 複素速度ポテンシャル　(8) 複素速度　(9) 運動学 (言葉で述べよ)

7. 次の事項を簡潔に説明せよ. 数式を用いても用いなくても構わない.

(注) 基礎中の基礎である. 出来なかった場合には速やかに復習をすすめる.

(1) Stokes の定理　(2) 線積分と線要素　(3) Laplace 方程式と調和関数　(4) 正則関数　(5) 特異点
(6) 複素積分　(7) Cauchy–Riemann の関係式　(8) Cauchy の積分定理　(9) Cauchy の積分公式 (表示)