応用流体力学 小テスト [1]　　2024 年 10 月 29 日 (火) 12:15–14:55 実施

(注意) 表面の注意事項を隅々まで読んでから解答のこと.

1. 以下の各式について, 左辺から出発し, 右辺の成立を示せ.

$$(1)\ \boldsymbol{u} = u_j \boldsymbol{e}_j \quad (2)\ \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3)\ \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \quad (4)\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (5)\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} = u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

2. 多変数関数の Taylor 展開を用いて, Lagrange 微分 D/Dt の Euler 的な表現を導け.

3. 流体中に固定された体積 V を考え, その表面積を S とする[1]. 表面にとられた外向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする. 固定体積内の質量の増減を考察し,「連続の式 (質量保存則を意味する偏微分方程式)」を導け. Gauss の発散定理を証明せずに既知として用いてよい.

4. ある時刻において, 流体中の 2 点の速度を Euler 的に表現し, 速度差に着目する. このとき, 速度勾配テンソル $\partial u_i/\partial x_j$ を誘導せよ (2 次以上の項を無視してよい). さらに, 速度勾配テンソルを対称成分 (ひずみ速度テンソル e_{ij}) と反対称成分 (渦度テンソル ω_{ij}) に分割せよ. 対称性と反対称性の確認は不要である. 問 2 との違いに注意のこと.

5. 保存則を閉じるための構成則について考える.
   (1) 一般に構成則 (構成式) とは何か, 等方性とは何か, それぞれ, 日本語で簡潔に述べよ.
   (2) Newton 流体と Hooke 弾性体の定義を, 応力やひずみ等の用語を用いて日本語で簡潔に述べよ.
   (3) Taylor 展開を用いて, 等方性の Newton 流体の構成式を導け. 最終的に, 圧力 p, 第一粘性係数 μ, 第二粘性係数 λ を導入のこと. ただし, 以下の 2 階と 4 階の等方テンソルを既知として用いてよい (係数 a, A, B, C はいずれもスカラー).

$$2\text{階：}\ a\delta_{ij} \qquad 4\text{階：}\ A\delta_{ij}\delta_{k\ell} + B\delta_{ik}\delta_{j\ell} + C\delta_{i\ell}\delta_{kj}$$

6. 運動量保存則を意味する以下の偏微分方程式を既知とする.

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i\ (i = 1, 2, 3)$$

   (1) 任意の連続体の「運動方程式」を導け. ただし, Lagrange 微分を用いて表現のこと.
   (2) それぞれの項の物理的意味を日本語で簡潔に述べよ.
   (3) 「Navier–Stokes (NS) 方程式」を導け. ただし, μ と λ は定数であるとする.

7. 非圧縮性流れの定義式を書き, その物理的な意味を日本語で簡潔に述べよ.

8. 2 次元流れにおいて, ここまでの数式を, 変数添字 (i や j) ではなく定数添字 (1 や 2) を用いて, より具体的に表現することを考える.
   (1) 2 次元流れの連続の式と NS 方程式を定数添字を用いて書き下せ.
   (2) (1) に「非圧縮性流れ」も仮定するとき, 両式はどのように簡略化されるか.
   (3) (2) に「定常流れ」も仮定するとき, 両式はどのように簡略化されるか.
   (4) (3) に「1 次元流れ」も仮定するとき, 両式はどのように簡略化されるか.

[1]名称 V と体積 V を区別せず用いる. 面積も同様.