目 次

応用数学 A (後半)(秋 AB) 講義資料

担当教員: 金川哲也
3F305 教員室, 内線 5254
kanagawa.tetsuya.fu♣u.tsukuba.ac.jp

後半のはじめに——応用数学の位置づけ, 評価方針, 学習指針——

1. 「応用数学」とは工学システム学類の造語であって, 「**物理数学**」や「**工業数学**」などという書物も多い[†1][†2]. ここでの応用[†3] とは, 1 年次よりも具体的で, 物理そしてその先にある**工学に直結する (応用される) 数学**[†4]を意味する.

2. 応用数学 B のシラバスを眺めると「**"波動"**方程式」や「**"熱伝導"**方程式」[†5]という名前に気づくだろう. **物理現象が方程式の名前に現れるほどに応用に近い数学**なのである[†6]. また, Fourier 変換は, データ解析において欠かせない道具である[†7].

[†1] たとえば複素解析 (複素関数) や常微分方程式を「応用数学」と名付ける科目の範囲に含める大学もある.

[†2] 工学システム学類とは異なり, 数学類では, 「応用数学」とは, 純粋数学の対義語として, 確固たる術語として用いられる. 数学者の研究分野にも, 「応用数学 (純粋数学を自然科学や社会科学に応用する分野」がある.

[†3] 本科目は, **数学の「応用問題」を解くものではない**. 問題集の「基礎問題」と「応用問題」という意味合いと混同してはならない. そもそも, 「基礎」が簡単だとか, 「応用」が難しいとは限らない. ここでの「応用」とは, 具体的, すなわち, 現実の現象や工学に近いという意味である. 反面, 「基礎」とは, 抽象的, すなわち, 実際の応用までは距離があるが, 普遍的な真理の探究にある——と解釈するとよい. 基礎が難しいこともあれば, 応用が簡単なこともある.

[†4] 本科目は, **いわば "微積分 4"**, すなわち微積分 1, 2, 3 (と解析学総論) の延長線上に位置づけられる. 1 年次の数学を, 文句なしに楽しめたと回答できる学生よりも, (一部の数学好きな学生を除き) 少なからず苦しんだ学生の方が多いと推測される. このような感情は, 工学を志して入学した学生なら普通の感情と考えるが, 1 年次で学んだ数学は, 本科目を含め全科目の基礎であるから, これを避けて通ることはできない.

[†5] これらは, **偏微分方程式** (partial differential equation) といい, 偏導関数すなわち多変数関数の微分を含む方程式である (春にで学んだ常微分方程式よりも発展的かつ応用に近い). その中でも, 波動方程式や熱伝導方程式は, 最も基本的かつ, 最も簡単に解ける方程式に属する. 「応用数学」という講義のゴールも, これらを解けることにあるといえる.

[†6] これらは, **物理からの要請で数学が確立した方程式**に属する. すなわち, 数学を物理に応用する通例とは逆であって, われわれが学ぶ必然性も理解できるだろう.

[†7] [残念な実態 (意外かもしれないが **···**)] 微分方程式が解けない技術者や大学院生は, 少なからず存在する. しかしながら, Fourier 変換できない者はいない. この意味で, 必須のスキルである.

3. 本科目を前提として, 3 年次以降の全講義が展開される[†8]. したがって, **履修および単位取得が必須であって, 放棄・未履修者のハンデは計り知れない**[†9].

4. 後半の内容は, Fourier (フーリエ) 級数と Fourier 変換にある. その先に, 前半で学んだ Laplace (ラプラス) 変換を再度振り返る[†10].

5. 講義の進め方—— 本資料に沿って板書で解説する. 図表は板書する[†11][†12].

   単位取得のためには, **本資料の事項を「理解」した上で, 演習問題が解ければよい**.

6. 前提知識—— 「数式変形 “だけ”」を眺めると[†13], **高校数学 (三角関数) の微積分の知識で「8 割方」は閉じている**ことに気づくだろう. だからといって, 理解と習得が容易であることを意味しない. 応用数学という科目名から想像がつくように, **物理的意味の理解と工学応用**が重要となるからである[†14]. 初等関数[†15]の微積分や重積分の計算 (微積分 1, 2, 3) は前提とする[†16][†17]. また,「複素解析」の知識[†18]を用いる箇所が一部あるが, 必要事項は, 適宜, 本講義

[†8] [たとえば] 流体力学, 振動工学, 伝熱工学, 構造力学, フィードバック制御, などが挙げられるが, これらは一例に過ぎないし, 本学類のカリキュラムに限らず研究などでも必須の道具となる.

[†9] **数学関連の講義は 2 年秋で終わり**である. したがって, 以降に学ぶ工学に活かすためにも, 数学が嫌いあるいは不得手な学生も努力してほしい.

[†10] たとえば Taylor のカタカナ表記が, 書物によって “テイラー” と “テーラー” のように異なることを避ける意味で, 本資料では数学者の名前を英字で記すが (他の理由もある), もちろんカタカナでもよい.

[†11] 本単元の理解には, 図を描くことが必須だが, 本資料には, 原則, 図表は載せない. そもそも, **図表とは諸君が描くべきもの**だからである.

[†12] 講義と板書は, 講義資料をさらに噛み砕いたものとする. その意味で, 板書は, 資料と一対一には必ずしも対応しない.

[†13] [**重要**] 多数の積分記号に目を奪われて, 一見, 公式まみれの分野だと勘違いしがちである. しかし, 整理すれば, 実は, **「Fourier 級数が何か」さえ知っておれば Fourier 変換も Laplace 変換も全て再現できる**ことに気づく. **三角関数の微積分だけで閉じている**といっても過言ではない.

[†14] したがって, 数式変形は難しくはないが, 概念の理解は容易ではないことを意味する.

[†15] [問] 初等関数 (elementary function) とは何かを調べ, 特殊関数 (special function) の例を挙げよ.

[†16] 常微分方程式の知識もあるとよいが, 本講義には, 既習の常微分方程式の解法を一新させるという重要な目的もある (Laplace 変換) ので, 全て復習しなくとも理解は可能である.

[†17] このように, 1 年次の数学 (とくに微積分) の単位を取得済み, かつ, その講義内容を習得済みという前提のもとで講義をすすめるが, 実は, その多くを直接用いるわけではない. 履修者の理解度を観察しつつ, 随時, 微積分の復習を取り入れてはゆくものの, 自助努力を期待している.

[†18] とくに, Laplace 変換を数学的に厳密に学ぼうとすると, 複素関数の知識を多用するのだが, たとえ複素解析を前提としなくとも形式的には学べることから, これに深入りすることはしない.

内で補う.

7. 復習—— 数学の習得のためには, 復習が必須である[†19]. すなわち, 本資料内で行われている計算の全てを, 各自のノートなどに書き下し, 何も見ずに再現できるまで[†20], 訓練を積むことが重要である[†21]. **復習を怠るとあっという間についてゆけなくなる**[†22†23].

8. manaba の活用—— 聴講にあたっては, 丸写しにならないように留意してほしい. **書くこと, 聴くこと, 理解することが同時にできる**ためには, 前回の講義内容の復習が必須であるが, それでもなお, 容易に身に付けることはできない. これを助ける意図で, **manaba で板書の画像を公開**するので, 積極的に活用してほしい[†24†25].

厳密に扱いたい者には, 脚注提示する補足を活用するとよい.

[†19] **[単位の定義] 75 分の講義の単位取得のためには, 75 分の予習および 150 分の復習が前提となるが**, 本科目の場合, 予習は不要であって, 225 分の復習を期待する.

[†20] これは解法や公式の丸暗記を意味しない.

[†21] これを怠ると, たとえ理解した「気」になっても, 単位は取得できない. **たとえ当たり前と思えるような (脳内でできるような) 式変形であっても, その 1 行 1 行を自身で紙に書き下して愚直に確かめる作業が重要**である.

[†22] これを防ぎ, 復習の助けの意味で, あえて**毎回**小テストを実施し学習の習慣化を図る. 本科目に限らず, 基礎科目とは積み重ね科目であって, 復習抜きに講義についてゆけることはありえない.

[†23] **[高校時代は ⋯]** 復習などしなくても, 数学の授業についてゆけたという者が一定数いるはずである. その理由は以下の通りではなかろうか——(i) 高校は毎日数学の授業があるから, (ii) 大学受験があるから. [反面, 大学では] どの科目も週 1 (か週 2) であって, 大学受験のような大きな試験も存在しない. したがって, 勉強しない者は, ごく普通の大学生ともいってよい. だからこそ, 教員側は, 毎回小テストを課して, 数学の習得に欠かせない復習を強制するのである. 既に体感済みであろうが, 数学の講義は, 復習抜きに聴講しても, 何の意味もないからである. いま, 数学は難しいあるいは嫌いと感じている者は, 高校数学は易しかったとか, 大学数学は難しいなどと思ってはならない. 勉強しているか, いないか, ただそれだけのことである.

[†24] 熱力学 I を履修した者が多いと思われるが, 熱力学に比べ, 大量にかつスピーディーに板書する. その理由を述べる—— (i) 数学という科目の性質上, 数式の変形が主眼となるがゆえに, 物理学よりも板書量が必然的に多くなる. (ii) 本講義は, 筑波大学が 3 学期制の時代 (2012 年度まで) には, 「応用数学 I (Fourier 解析, 必修, 2 単位)」および「応用数学 II (偏微分方程式, 2 単位)」と分かれていた. 2013 年度からの「応用数学 (3 単位)」への統合を経て, 本年度 2019 年度から「応用数学 A (2 単位)」と「応用数学 B (1 単位)」に統合された. 結果, Fourier 解析と偏微分方程式をあわせて計 3 単位に縮小された. これは大学側, 教員側の事情ではあるが, 単位数が少なくなったからといって, 本講義で学ぶ量が減るわけではないことを強調しておきたい (残念ながら, 時代が変わっても, 数学は変わらないのである). しかしながら, 単位数が削減されていることに対しては, 出来る限りの配慮は行うつもりである.

[†25] 板書よりも, むしろ, 教員の話の要点を書き写すことを期待している (丸写しだけならば, 友人に借りるか, 後で manaba を見ればよい). 金川が話す予定の事項を (雑談なども含め), 可能な限り脚注に記すようにしたが, 思いつきで話すことも多いであろう. 本資料をよく読んでほしい.

9. 講義内容の概観[†26]

9–1) キーワード[†27]

- Fourier 級数—— 三角関数の無限級数による**周期関数**の近似[†28]
- Fourier 変換—— Fourier 級数の**非周期関数**への拡張
- Laplace 変換—— Fourier 変換の**複素数**への一般化

つまり, ストーリー性があるので, **「Fourier 級数が何か」さえ知っておけば**, 公式をあれこれ記憶せずとも, Laplace 変換というゴールまでたどり着ける. 大雑把にいうと, 「三角関数をうまく使うこと」が講義の主題である[†29].

9–2) 常微分方程式に続き, 「微分方程式を解けること」が, 工学系の究極目標

- 常微分方程式 (1 変数関数)—— 前半の講義のゴールにあった Laplace 変換を学ぶ最大の目的は[†30], **常微分方程式を既習解法よりも系統的に (賢く, 効率よく, 少ない計算量で) 解く手段**[†31]の習得にある[†32].
- **偏微分方程式** (多変数関数)[†33†34†35]: Fourier 変換あるいは Laplace

[†26] ここでは, 応用数学 A の前半や応用数学 B も含めた, 全体像を述べる.

[†27] 現時点ではわからないだろうが, この 3 つが要点である (厳密な定義ではない). **Fourier 級数, Fourier 変換, Laplace 変換の順序で学ぶ**のが, 数学的に自然な流れであるばかりでなく, 応用へのつながりも見えやすい.

[†28] 大雑把に言って, **Fourier 級数とは, Taylor 級数 (微積分) よりも適用範囲が広く強力**な級数である.

[†29] Fourier (フーリエ) や Laplace (ラプラス) といった, 小難しそうな人名にとらわれる必要はない.

[†30] [後述] Laplace 変換については, これ自体が主目的ではなく, これを "上手く利用" することが狙いである.

[†31] [発展] 正確には, **「常微分方程式の "初期値" 問題」**の系統的解法を学ぶ. たとえば, フィードバック制御 (2 年秋) はこれに支配される. なお, Fourier 変換は, 「常微分方程式の "境界値" 問題」の解法に役立つ.

[†32] 多様かつ多数の常微分方程式の解法に注力した春学期とは指向が異なる.

[†33] 常微分方程式よりも発展的かつ実用的な微分方程式であって, 全ての現象が偏微分方程式の解として定まるといって過言ではない. 応用数学 B の内容だが, その解法において, 応用数学 A の知識全般が前提となる.

[†34] 常微分方程式は, 独立変数が 1 つである. これは, 物理現象でいうならば, 独立変数が時間あるいは 1 次元空間座標だけの問題にしか応用できない. いうまでもなく, そのような工学応用先は極めて限定される (基礎としては重要だが). 工学応用を目指すべきわれわれにとって, 時間と空間の双方を扱うことは必須であるがゆえに, 偏微分方程式の解法への習熟は避けられない. [前提] 多変数関数に対する微分法 (偏微分) と積分法 (重積分) の理解が基礎となる.

[†35] [発展] 偏微分方程式を手計算で解けること (厳密解: exact solution) は稀であって, たいていの

変換を用いて解くことができるので†36†37, 応用数学 A の講義はそのための準備でもある．とくに, **Fourier 変換は微分方程式の解法にとどまらず, 各種データの解析と関連が深く**†38, Fourier 変換それ自体への理解から避けて通ることはできない†39.

10. 学習の指針 (私見を含み, あくまでも後半の指針):

10–1) いくら勉強しても, 試験が終わって数週間も立てば忘れてしまう．これは仕方がない．大学で学ぶことはそれほどに膨大かつ広範だからである†40．大学受験の延長で, **忘れることを悲観視する必要はない**†41.

10–2) したがって, 知識を重視しない．**公式を暗記して数字を代入するだけの出題はありえない**†42†43.

10–3) 最終的に活きるのは, **公式の成立過程や定理の証明を理解**しているかである†44†45.

10–4) この考え方は, 応用の立場からはとくに重要である．なぜならば, 公式の成立過程に現れる考え方や公式の成り立ちそのものが, 理工学の研

場合, コンピュータによる数値解法に頼ることとなるが, どの解法を用いるかの判断を迫られた際に, いかに厳密解に習熟しているかが判断基準となりうる.

†36 [発展] Fourier 変換は無限空間 $-\infty < x < \infty$ の変換に, Laplace 変換は半無限空間 $0 \leq x < \infty$ あるいは時間 $0 \leq t < \infty$ の積分変数変換に応用される.

†37 時間に対しても, 空間に対しても, 有限領域を扱うならば, 変数分離法が常套的な解法である.

†38 実験データの統計解析や信号処理などで欠かせない．研究でも用いられる変換であって, とりわけ, 高速 Fourier 変換 (FFT: Fast Fourier Transform) が挙げられる.

†39 これに対して, Laplace 変換は, 微分方程式への応用を主目的とする「道具」といえる.

†40 人間の記憶力は, 大学受験がピークであると主張する声もある.

†41 逆にいえば, 試験が終われば, 忘れてもよいのである．何を参照してもよいからである．しかしながら, **どの本のどこに書いてあったかは忘れてはならないし, 2 度目の学習のときには, 1 度目よりも早く理解できることが重要**である.

†42 このような作業ならば, コンピュータでもできるので, 人間が行う意味がない.

†43 [余談] 実は, コンピュータは微積分ができない (基本的には)．コンピュータが得意とするのは四則演算であって, この能力において人間は到底叶わないが, **微積分ばかりは, コンピュータの力も及ばず, 人間にしかできない数学**なのである.

†44 数学者でなくとも, これらを一度は学んでおかないと, 数学で最も重要な論理的思考力を身に付けることはできない.

†45 [厳密性と精密性を重視] 自動車が安全に動くといった, 工学技術の信頼性は, 数学の厳密性が支えてくれている．同時に, いくら良い工業製品でも, 売れなければ意味がないが, 工学の経済性を支えてくれる裏方に, 数学の精密性がある．したがって, 数学を (将来的に) 道具として使う立場だからこそ, 数学的に厳密な表現や, 精密な取り扱いを, あえて避けずに用いる.

究の場でもそのまま活用されるからである[†46].

10–5) 公式には, それを使えるか否かという仮定 (制約) がある. これを理解しておかねば, その公式が正しいのかすらわからず, **公式の適用範囲を逸脱して使ってしまう**という最悪の事態が想定される[†47][†48].

10–6) だからこそ, **実用的なものほどブラックボックスにしてはならない**. 成立過程を理解した経験が必須となる[†49].

10–7) 内容は極めて易しい. しかし, 少しでも気を抜くと, 一瞬で脱落する[†50].

10–8) 理工系学生が, 数学から避けて通ることはできない[†51].

10–9) 数学において, 「何となくわかった」というわかり方は存在しない[†52].

10–10) 昨年度, 履修放棄あるいは単位を落として, 3 年次以降のあらゆる科目で「応用数学でやったように ··· 」という言い回しを聴いて, **後悔している上級生が相当数存在**するという現実がある. 諸君は, 決して, 放棄あるいは脱落してはならない[†53].

10–11) 以上の意味で, 後半では, とくに,

[†46] 研究の場で数字を公式に代入するだけということはありえない.

[†47] [重要] 「いま, 公式 A が使えるのか, 使ってよいのか」の判断においては, いくらコンピュータが進化しても, 機械任せにはできない. **人間の頭で判断するより道はない**.

[†48] たとえば, 初めに学ぶ **Fourier 級数の理論は周期関数にしか適用できない**という重要な制約がある.

[†49] 公式の適用範囲を超えて設計および製造されたモノは速やかに壊れるだろう.

[†50] 本日は, 「なんだ, 三角関数の復習ではないか」と思うかもしれないし, 事実, 本講義のゴールも, 三角関数の微積分以上ではない. しかしながら, 数学で最重要な「流れの理解」を死守するためには, 一瞬でも気を抜くと, あっという間についてゆけず, 試験でも散々な結果となる (昨年度の履修者に聞いてみるとよい). また, 単位数の関係から, 講義スピードも速い. しかしながら, 毎回の復習を習慣化すれば, 恐れる必要は何もない.

[†51] 2 年次生になれば, 数学は好き嫌いがわかれるだろう. 高校までは数学は得意かつ好きであった者が, 大学の数学は抽象的で嫌いになることは少なくない. しかしながら, 遡れば, 生まれつき数学が嫌いかつ苦手という者は, ほぼいないと確信する. もしもそうならば, 本学類に入学できないし, 残念ながら, 卒業できない (と推測する) からである.

[†52] **[重要]** 物理においては, 数式の意味や実験結果が「何となくわかった」という場面は多い. しかしながら, **等号で結ばれた世界共通言語である数式の捉え方は一通り**であって, 複数の捉え方もわかり方も存在しない.

[†53] これは再三強調しておきたい. 履修しないならば (履修は強制ではない), 独学が必須である反面, 独学が困難な内容であることも事実である.

- **公式の成立過程や定理の証明**を重視する[†54][†55].
- 定義だけは知らねばならないが, ほぼ全ての定義は, 定義の背景から理由づけられるので, **定義は理解した上で記憶**すべきである.
- 多数の類題を解くことよりも, 少数の問題を精確に解く[†56].

[†54] しかし, 数学者を育成するための講義ではない理由から, 厳密性に立ち入りすぎることはしない. もちろん, 厳密性を重視する姿勢は大いに歓迎するし, 最低限の厳密性は必要であるので随時述べる.

[†55] 「応用数学」なので, もちろん, 物理的意味や工学応用にも触れる.

[†56] アイデアは原則問わない. 勉強すればできるし, しなければできないような出題および評価方針とする. したがって, テクニックが重要な受験数学とは程遠い.

§ 1　Fourier 級数

"Fourier" 級数展開というと難しい響きにも聞こえる. これは, 「**"三角関数"**展開」とも言い換えられ, 周期関数を三角関数の無限級数和で表現する操作が, Fourier 級数に他ならない. そこで, 三角関数の性質を眺めることからはじめる[†57].

§ 1.1　三角関数の直交関係式

§ 1.1.1　具体例——三角関数の積の積分の性質

三角関数[†58]の**積の積分**には, 興味深く重要な性質がある. たとえば,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x \, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.1}$$

のように, ある正弦関数 (sine function) と**「異なる」正弦関数を掛けて**, 周期 2π すなわち $[-\pi, \pi]$ [†59] で定積分すると, **ゼロになる**. これは, 余弦関数 (cosine function) についても同様であるし,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 7x \, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.2}$$

また, 正弦関数と余弦関数も「違う」関数だから, 積の積分はゼロとなる:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.3}$$

このように, 関数 f と関数 g の積の定積分がゼロとなるとき, ベクトルの用

[†57] [重要] 計算過程は高校レベルなので退屈かもしれないが, 実は, **Fourier (フーリエ) 級数の全てさらには Fourier 変換までが, 高校数学レベルの三角関数の性質に支配される**といっても過言でない. 計算自体は容易であっても, 理解と応用は容易とはいえない.

[†58] 正接関数 $\tan x$ は除外する. 理由は後にわかるだろう.

[†59] [記号・不等式] 積分範囲 $[a, b]$ とは $a \leq x \leq b$ を, (a, b) とは等号を含まない $a < x < b$ を意味する. 表記の簡潔さゆえに, 本資料ではこの記号を用いる (諸君が解く際には用いなくてもよい). 今の場合, $[-\pi, \pi]$ とは, $-\pi \leq x \leq \pi$ あるいは $|x| \leq \pi$ である. たとえば, $[a, b)$ ならば $a \leq x < b$ と読む.
[補足] 等号付き不等号には, $\leq$ と $\leqq$ のいずれを用いてもよいが, $\leqq$ は日本人特有の記号という傾向が強いので, 本資料では $\leq$ を用いる.

語にちなんで[†60][†61][†62], f と g は**直交**しているという[†63]. 今の場合, $\sin x$ と $\sin 2x$, $\cos 2x$ と $\cos 7x$, $\sin x$ と $\cos x$ は, それぞれ直交関数である.

その一方で, **「同じ」関数の 2 乗**ならば, 積分値が π となる[†64].

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 3x \, \mathrm{d}x = \pi, \quad \cdots \tag{1.4}$$

すなわち, $\sin x$ と $\sin x$ は「直交していない」[†65].

基礎 1. 三角関数の基本公式 (1.5)–(1.8) を用いて[†66][†67], (1.1)–(1.4) を証明せよ.

[†60] [補足] ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, すなわち, 2 つのベクトルの **“内積”がゼロ**になることと, 2 つのベクトルが「直交」することは同値であった. 「直交」関数という言い回しは, これにならったものである. 直交関数としては, 三角関数にとどまらず, もっと広範の関数が存在する.

[†61] [発展 1] 極座標あるいは円筒座標で有用な Bessel (ベッセル) 関数や (Fourier–Bessel 級数), 球座標で重要な Legendre (ルジャンドル) 関数 (Fourier–Legendre 級数) などの特殊関数 (special function) は, 代表的な直交関数である.

[†62] [発展 2] より一般的に学びたい者は, 無限次元のベクトルと関数の類似性, 一般的な直交関係式と関数の内積, ノルムの定義などを調べてみよ.

[†63] [用語] この性質を**直交性** (orthogonality) という. f と g は**直交関数** (orthogonal function) である. (1.1)–(1.3) のそれぞれを直交関係式をいう. 現時点では, **「直交」という用語の重要性は高くはなく, 覚えなくともよい** (試験の問題文でも用いなかった).

[†64] [記号] 本資料では, $\cos(2x)$ を単に $\cos 2x$ と書く. 混乱を招く場合を除き, 括弧は省くことが多い.

[†65] [イメージ] これは当たり前と言える. ベクトルの用語を借りれば, 2 つの同じベクトルは平行であって, 直交するはずがないからである.

[†66] [復習] 三角関数の加法定理 (addition theorem of trigonometric function) より,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{1.5}$$

であるがゆえに,

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)], \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \tag{1.6}$$

[†67] [復習] 余弦関数の加法定理 (1.5) において $\alpha = \beta$ とおくと,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{1.7}$$

をうる (2 倍角の公式). これを変形すればよい (復習してみよ):

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{1.8}$$

基礎 2. 微分の定義[†68] にしたがって, 三角関数の導関数公式を示せ[†69]:

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x, \quad \frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x \tag{1.10}$$

基礎 3. 三角関数の加法定理 (1.5) を証明せよ.

§ 1.1.2　一般化——三角関数の直交関係式

(1.1)–(1.4) のような関係式は**無数に考えられる**. 面倒である. だからこそ, **一般化を目指すのが自然な感情**である. 任意の**自然数** n と m に対して[†70]

三角関数の直交関係式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.13}$$

が成立する. 被積分関数をみると**「異なる関数を掛けるとゼロで (直交), 同じ関数を掛けると π になる」**ことがわかる[†71][†72].

---

†68 [基礎] 微分可能な関数 $f(x)$ の 1 階導関数 (first-order derivative) あるいは微分係数 (differential coefficient) は以下で定義される:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.9}$$

†69 使いこなすことの方が重要な公式に属するが, それでも, 一度は確かめておくべきである.

†70 [**重要** (§ 1.2 の式 (1.21) で詳述)] 自然数 (正の整数) に限定せず, 負の整数を含めてもよいのではないかと思うだろう. しかし, $\sin(-nx) = -\sin nx$ や $\cos(-nx) = \cos nx$ のように, 負の整数 $-n$ は, 自然数 n に置き換えられるため, **自然数だけで事足りる**のである.

†71 [**重要**] (1.11)(1.12) の**積分記号の前の** $1/\pi$ **は, もちろん, (1.4) との対応も踏まえて右辺においてもよい**が, 前に書いておけば, 以後の議論とくに Fourier 係数を与える式 (1.32)(1.33) の理解がすすむ.

†72 [発展: Kronecker (クロネッカー) のデルタ] (1.11)(1.12) は, 次式のようにも書ける:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x = \delta_{nm}, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x = \delta_{nm} \tag{1.14}$$

問題 1. 自然数 n と m に対して (1.11)–(1.13) を証明せよ[†73][†74].

[証明] 以下に (1.11) を示す[†75].

(i) $n \neq m$ (すなわち**異なる関数**) の場合:

$$\begin{aligned}(\text{LHS}) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\frac{\sin(n-m)x}{n-m}}_{n=m\text{ で発散}} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{0-0}{n-m} - \frac{0-0}{n+m}\right) = 0 = (\text{RHS})\end{aligned} \tag{1.16}$$

素直な計算ではあるが, いくつかの注意を脚注に列挙する[†76][†77][†78]. 分母の $n-m$ の存在こそが, **別に $n=m$ の場合を考えねばならない動機**である[†79].

ここに, δ_{nm} は Kronecker のデルタ記号とよばれ

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{1.15}$$

で定義される. この記号は, 本講義に限らず様々な科目で多用されるので, 知っておくとよい. [注意] Kronecker のデルタ記号を, Dirac のデルタ関数 (後で学ぶ) と混同してはならない.

†73 この証明には価値がある. なぜか. **(1.11)–(1.13) のたった 3 式を証明するだけで, (1.1)–(1.4) のように無数に書き下せる関係式の全てを証明したという証左を得られるから**である.

†74 **過去の [第 1 回小テスト]** で出題していた. (1.11) か (1.12) のどちらか 1 式の証明を課す.

†75 (1.12)(1.13) についても, 同様に, 三角関数の公式に基づいて証明せよ. **一定頻度で「同様に ⋯」で済ませている答案が存在したが, 論外である**.

†76 [記号] 式中の (LHS) は左辺 (Left-Hand Side), (RHS) は右辺 (Right-Hand Side) のそれぞれ略記であり, よく使われるし, 本講義の板書でも多用する.

†77 [(1.16) 2 行目の補足] (a) $n \neq m$ と仮定したのだから, 括弧内第一項の分母は $n-m \neq 0$ であって, 発散しない. (b) n も m も自然数だから, $n \neq -m\,(<0)$ が成立し, 括弧内第二項の分母もゼロになることはない. だからこそ, **“整数 (負も含む)” ではなく “自然数” に制限した**のである (†70). (c) n と m が自然数なのだから, $(n+m)$ と $(n-m)$ はともに整数である. ゆえに, $\pi(n+m)$ も $\pi(n-m)$ も, 2π の倍数, すなわち, $2N\pi$ とかける (N は整数).
[厳密には] $(n+m)$ は自然数だが, $(n-m)$ は自然数とは限らず, n と m の大小に応じて, ゼロもしくは負となる可能性がある. しかし, これは計算結果には影響しない (確かめよ). ゆえに, 気にする必要はない.

†78 [記号] 本資料では, 括弧は, ( ), [ ], { } の順序で使ってゆくが, 諸君の好みに委ねる. ただし, [ ] については, 定積分の区間を明示する役割や, Gauss 記号という役割もあるので, 注意を要する. なお, この順序は, 日本機械学会の流儀に準じている.

†79 **[重要・考え方 (おそらくは ⋯)]** 分母に $n-m$ が現れるところまで変形して, ようやく, $n=m$ の場合分けが必要であることに気づく者の方が, 多数派ではなかろうか (少なくとも金川はその一人である). 気づいてから, 自身で証明を正せばよい. ここで注意すべきは, **$n=m$ の場合に**

そこで,

(ii) $n=m$ の場合 (すなわち**同じ関数**)[†80]:

$$\begin{aligned}(\mathrm{LHS}) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2\pi}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x}{2\pi}-\frac{\sin 2nx}{4n\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi-(-\pi)}{2\pi}-\frac{0-0}{4n\pi} = 1 = (\mathrm{RHS})\end{aligned} \tag{1.17}$$

(証明終)

三角関数の加法定理以上のものではないことに気づくことが重要である[†81].

さて, 整数 N に対して成立する, 三角関数の以下の基礎的性質を振り返っておこう (確かめよ). 以後, 多用するがゆえに, 軽視してはならない[†82]:

$$\sin N\pi = 0, \quad \cos N\pi = (-1)^N \tag{1.18}$$

§ 1.2　偶関数 (even function) と奇関数 (odd function)

§ 1.2.1　定義

偶関数とは, 全ての x に対して[†83],

$$g(-x) = g(x) \tag{1.19}$$

を満たす関数であって, 偶関数のグラフ $y=g(x)$ は y **軸に関して対称**である[†84].

は, 第 2 項が発散するがゆえに, どうあがいても, これ以上前に進むことができないことを受け入れざるを得ない点にある. したがって, $n=m$ **の場合は, ひとまず放置して,** $n\neq m$ **の場合に限って, 証明の一部を完結させよう**. その後で, **出発点に立ち戻って, ゼロのまっさらな状態から,** $n=m$ **の場合を考察すればよい**.

†80 [(1.17) の補足] 分母 (denominator) の n は, 自然数 (natural number) すなわち正の整数 (positive integer) だから, $n\neq 0$ であって, 分母に注意を払う必要はない.

†81 [数学は高校の延長線上] 大学の物理では, 高校の定義から一新し, ゼロから始めると述べた (熱力学基礎など). しかしながら, 大学の数学は, 高校数学の延長線上にあるといえる (もちろん, 学び方などには, 大きな違いはあるが). 本日の講義で, **三角関数の基礎事項が欠けていると痛感した者は復習が必須**である.

†82 変数 x ではなく, 定数 π であることに注意せよ.

†83 [記号] 表記の簡潔さを狙うべく, 「全ての x」を「$\forall x$」と書くことがある. これは, 全ての (任意の: Arbitrary) の A にちなんで, これを逆さにした記号である.

†84 [グラフを描く際には] 軸の名称, 代表的な点 (軸との交点など) の座標を略さずに示すこと. フリーハンドでよく, 定規は不要である (試験は定規持込不可).

いっぽう, 奇関数の定義は,

$$h(-x) = -h(x) \tag{1.20}$$

であって, グラフ $y = h(x)$ は y **軸に関して反対称**である[†85].

この定義にしたがうと, 余弦関数 $\cos x$ や 2 次関数 x^2 は偶関数で, 正弦関数 $\sin x$ や 1 次関数 x^1 は奇関数である (確かめよ)[†86][†87].

正弦関数 (奇関数) と余弦関数 (偶関数) に関して, 以下の公式を以降多用する:

$$\sin nx = -\sin(-n)x, \quad \cos nx = +\cos(-n)x \tag{1.21}$$

§ 1.2.2　積の関係

本講義では, **偶関数と奇関数の積について成立する次の関係を多用**する[†88].

$$偶関数 \times 偶関数 = 偶関数 \tag{1.22}$$

$$奇関数 \times 奇関数 = 偶関数 \tag{1.23}$$

$$偶関数 \times 奇関数 = 奇関数 \tag{1.24}$$

問題 2. (1.22)–(1.24) を証明せよ.

[証明] (1.22) を証明する. 偶関数の定義 (1.19) の成立を示すことが方針である. 偶

[†85] [用語] 非対称 (asymmetric) と反対称 (anti-symmetric) は異なる. 非対称とは, 対称の対義語であって, 全く対称でもなんでもない. 一方, “反対称”は, 奇関数の定義 (1.20) や, 行列の成分が $a_{12} = -a_{21}$ を満たすことなどで言い回される (これは厳密な「反対称」の定義ではない).

[†86] **[重要]** 板書のように, 定義から出発するのではなく, **具体的なグラフを描いて考察し, (1.19)(1.20) の形に抽象化する方法論**があってもよいだろう.
[定義を創る] このような考え方こそが「定義の創成」といえる. 他人の定義の丸暗記ではなく, 自身で定義するとは, 数学における本質的作業に他ならない.

[†87] [具体例と抽象化] 数学とは, 本来, 難解極まりない抽象的な命題の理解に挑むにあたり, 具体化の助けを借りて理解するものといってよいだろう. その意味で, 板書の方法は, 正攻法ではないかもしれない. しかしながら, 数学の発展の過程では, 具体例から出発して抽象化する思考過程も欠かせなかったに違いない. 結局のところ, **具体例も抽象化もいずれも重要**に違いない. 両者のベクトルを意識してほしい.

[†88] **[重要 (例示)]** べき関数 (power function) x^n を考えると, x^2 や x^4 (指数が偶数) は偶関数の定義を満たし, x^1 や x^3 (指数が奇数) は奇関数の定義を満たす. 指数 n に対応づけると, 偶関数と奇関数の積の関係を簡便に理解できる. つまり, 偶関数と偶関数の積は, $x^2 \times x^4 = x^{2+4} = x^6$, すなわち偶関数となるが, この事実は「偶数と偶数の**和 (積ではない!!)** は偶数」なる関係に対応している. 同様に, 奇数と奇数の和は偶数 (奇関数と奇関数の積は偶関数) であるし ($x^1 \times x^3 = x^4$), 偶数と奇数の和は奇数である ($x^2 \times x^1 = x^3$). 以上は, **決して証明ではないが記憶には便利**である.

関数 f_1 と偶関数 f_2 を考えると, 偶関数の定義 (1.19) より,

$$f_1(-x) = f_1(x), \quad f_2(-x) = f_2(x) \tag{1.25}$$

である. ここで, 積 $f_3 \equiv f_1 f_2$ を考えると,

$$f_3(x) \equiv f_1(x) f_2(x) \underbrace{=}_{\text{偶関数の定義}} f_1(-x) f_2(-x) \underbrace{=}_{f_3\text{の定義}} f_3(-x) \tag{1.26}$$

2 つ目の等号では偶関数の定義 (1.19) を用いて, 最後の等号では f_3 の定義を用いた. したがって, f_3 は偶関数の定義 (1.19) を満足する. [証明終][†89]

基礎 4. 次の関数は, 偶関数か, 奇関数か, どちらでもないか. それぞれ, グラフを描いて説明せよ: x, $|x|$, x^2, e^{-x}, $e^{-|x|}$, e^{-x^2}, a (a は定数)

基礎 5. 偶関数 $g(x)$ と奇関数 $h(x)$ の積分に関する次式を示せ (L は正の定数)[†90].

$$\int_{-L}^{L} g(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{L} g(x)\mathrm{d}x \tag{1.27}$$

$$\int_{-L}^{L} h(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1.28}$$

基礎 6. 偶関数と奇関数の積の性質 (1.24), および, 奇関数の積分に関する性質 (1.28) を使って, 三角関数の公式に頼ることなく, (1.13) の成立を簡便に証明せよ[†91].
[証明] 簡単である:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin nx}_{\text{奇関数}} \underbrace{\cos mx}_{\text{偶関数}} \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} (\text{奇関数}) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.29}$$

基礎 7. ここまでに現れた全ての定積分において, 積分範囲を, $[-\pi, \pi]$ から $[0, 2\pi]$ に置き換えても, 全く同様の結果が得られる. これを確かめよ[†92].

[†89] (1.23)(1.24) も同様に証明できる. 繰り返すが, 試験などで「同様に ⋯ 」は不可とみなす.

[†90] [重要] この公式の**価値は, (1.27) の積分範囲下限のゼロ, および, (1.28) 右辺のゼロ**にある. 計算が著しく容易になる.

[†91] 厳密な意味での「証明」は, 三角関数の積分計算を行うべきである.

[†92] 本資料の以降の部分でも同様である. Fourier 級数の類書では, $[0, 2\pi]$ で議論を進める場合も, $[-\pi, \pi]$ を好むものもある. 三角関数の周期は 2π であるがゆえに, 簡単に確かめられる.

§ 1.3　周期関数 (periodic function)

$\sin x$ のグラフを描けば, 周期が 2π であることがわかるが, このとき, $2\times(2\pi) = 4\pi$, $3\times(2\pi) = 6\pi$, $\cdots$ も同じく周期となることが重要である. このように, 三角関数の周期は, 任意の自然数 $n = 1, 2, \cdots$ を用いて, 一般に $2n\pi$ とかける.

全ての実数変数 x に対して定義される関数 $f(x)$ が, 正の定数 L に対して,

$$f(x) = f(x + L) = f(x + 2L) = \cdots = f(x + nL) \tag{1.30}$$

を満たすとき, $f(x)$ を**周期 L の周期関数**という[†93]. もちろん, 周期 $2L$ や $3L$ の周期関数などといってもよい. **周期関数の周期は無限個**あるが, その中でも最小の周期である L を基本周期 (fundamental period) という.

たとえば, $\sin x$ や $\cos x$ の基本周期は 2π である[†94]. $\sin x$ も $\cos x$ も, **位相 (phase) が $\pi/2$ だけずれている点を除けば**[†95]**, 形 (波形) は全く同じ**である[†96].

定数関数 $f(x) = 1$ も, (1.30) を満たすがゆえに, 周期関数である[†97].

基礎 8. 次の関数の基本周期を求めよ[†98].

(a) $\sin 2\pi x$,　(b) $\cos nx$ (n は自然数),　(c) $\sin x \cos 2x$,　(d) $\cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{3}$

§ 1.4　Fourier 級数

最重要事項であるので, 証明等は後回しにして, 結論からいおう[†99]—— Fourier 級数の考え方とは**「周期関数を三角関数の重ね合わせで表現」**することにある. 以

[†93] [実例] **周期関数 (周期現象) はわれわれの日常にありふれている**. 時計の針, 気温の変化, 株価, 生活サイクルなどはもとより, 理工学に関連したものでは, 振動や波動など, 枚挙に暇がない.

[†94] だからこそ, 直交関係式 (1.11)–(1.13) でも, 区間 $[-\pi, \pi]$ すなわち周期 2π で積分した. さらに, 以後の部分でも, 周期 2π の周期関数を扱うので, $[-\pi, \pi]$ に関する定積分に支配される.

[†95] もちろん, $3\pi/2$ のずれなどということもできる.

[†96] この点が, Fourier 級数の理論において重要な役割を演ずる.

[†97] $f(x) = 1$ の周期は任意の実数である.

[†98] [答](a) 1, (b) $2\pi/n$, (c) 2π, (d) 12π. なお, (c) と (d) は計算過程も述べよ.

[†99] あえて, 概要を先に述べた. 講義後に読む方がよいかもしれない.

下に数式表現する．周期 2π の[†100] 周期関数 $f(x)$ が与えられたとき, 定積分

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.31}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.32}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.33}$$

が定まるとする．ここに, **a_n と b_n は Fourier 係数**とよばれ, 自然数 n に対する**数列**である[†101].

定まった a_n と b_n を用いて計算できる[†102],

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{1.34}$$

のことを $f(x)$ の Fourier 級数という[†103].

Fourier 級数は**無限級数** (infinite series) であるので[†104], 収束するとは限らない．しかしながら, 天下り的にいえば, 工学に現れるほとんどの関数 $f(x)$ においては, $f(x)$ は, その Fourier 級数に収束することがわかっている．実際に, **本講義でも Fourier 級数に収束する関数だけを扱う**．そこで, 現時点では収束性に気を留めることなく, 大胆にも, $f(x)$ とその Fourier 級数を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{1.35}$$

と等号 = で結ぶし, 以後, 諸君も等号で結んでよい[†105]．すなわち, 左辺の $f(x)$ は,

---

†100 [一般の周期] Fourier 級数の理論は, 周期 2π の関数に制限されず, 一般的な周期 L に対しても適用できる．その拡張は容易であり, 実際に Fourier 変換の章 (§4) で実行する．しかしながら, 計算が著しく煩雑になるので, 当面は, 周期 2π で議論する.

†101 **[自然数 n の中に実質的に負も含む]** (1.21) を思い返せば, $\sin(-2)x = -\sin 2x$ のように, **負の整数 $-n$ に対する三角関数も既に自然数 n を介して集約済**であることに気づく.

†102 [厳密には] 本当は逆である．後述 (§ 1.4.2) のように, Fourier 級数 (1.35) を前提にして, Fourier 係数を与える公式 (1.31)–(1.33) が得られる．逆に, 具体的な Fourier 級数を求めたいときには, まず, 係数を (1.31)–(1.33) の積分計算から求め, それを (1.35) に代入して, 級数を作る.

†103 [用語] Fourier 級数展開, あるいは単に Fourier 展開ともいう．また, 三角関数の一次結合 (線形結合) などということも可能だろう．[今後] 本資料では, あまりにも自明なときには, Fourier を略して, 単に, 係数, 級数ということもある.

†104 **[重要]** (1.34) の**総和の上限が無限大**であることを忘れてはならない.

†105 収束するかは, もちろん, 関数に依存する．一般論を重視する書物においては, 等号 = ではなく,

その Fourier 級数 (右辺) に収束するとみなす[†106].

さて, 現時点では, 数式 (1.31)–(1.35) は意味不明に違いないが, 以下を読めば, その本質は, 驚くほどに単純であることに気づくだろう[†107].

§ 1.4.1　Fourier 級数の考え方

$-\pi < x \leq \pi$ で定義される 1 次関数 $y = x$ を[†108], 定義域の外側 ($x \leq -\pi$ および $x < \pi$ の区間) にも, 周期 2π ずつ拡張して描いてみよう[†109]. すると, 周期 2π の周期関数が作られる[†110]. これを $f(x)$ とおく[†111].

同じく周期 2π の三角関数を用いて, $f(x)$ を近似表現できないだろうか. たとえば, $y = \sin x$ の波形は, $f(x)$ の原点付近の **"平らな"部分**にどことなく似ている. いっぽうで, $y = \sin 100x$ のような鋭い波形は, $f(x)$ の $x = \pm\pi$ といった **"尖った"部分**を表現するに適していそうである. この直観に基づき, 以下の発想が浮かぶ.

いろんな (全ての) 三角関数を使えば, 周期関数を表現できるのではないか?

実際に, 全ての三角関数を書き出してみよう[†112]:

$$c,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x, \cdots\cdots,\ \sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \cdots\cdots \tag{1.36}$$

近似記号 $\sim$, $\approx$, $\simeq$ などを用いることも多い.

†106 [注意] このような立場は, 純粋数学の観点からは好ましいとはいえないし, 諸君の中にも受け入れがたい者もいるだろう. もちろん収束性は重要であるが, Fourier 級数を学び始めた初学者が, 数学的に難解かつ厳密な収束性の議論にも同時に飛び込むことは, とくに応用上, 得策ではないといえる. 後述する具体的な例題を解きながら理解することが望ましいし, 収束性に関する一般論も, 後にまとめて述べる (§ 3.1).

†107 以下で詳述する成り立ちを読めば, 何も覚える必要がないことに気づく. そもそも, 公式 (1.31)–(1.35) を単に覚えても意味はないし, 得点にもつながらない.

†108 [超発展] 本節の議論の目的のためだけならば, 大雑把にいって, 定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ としてもよい. この場合どうなるのか, 考えてみよ. すなわち, **$<$ と $\leq$ の差異に過敏になる必要性は低い**.

†109 図は板書する. これは, のこぎり波 (sawtooth wave) とよばれることがある.

†110 この操作を周期的拡張という. なぜこの操作が必要なのかは, § 1.5 で後述する.

†111 この場合は奇関数でもある (奇関数の定義を満たすか確認せよ).

†112 [小数] 全てといっておきながら, $\sin 1.1x$ のように, x の係数が小数である三角関数は含めなかった. この理由は後に明らかとなる.

ただし, 定数 c も三角関数に含めた[†113][†114]. これらは全て周期 2π の周期関数であるから[†115], **周期関数 $f(x)$ の周期 2π とも整合**する. そこで, 全ての三角関数の**線形結合**を考える[†116]. すなわち,

$$f(x) = c + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots \tag{1.37}$$

とかく [c, a_n, b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は全て**定数**]. 総和記号を使うと,

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.38}$$

と総和の上限 ∞ を明示できて, 無限級数であることがわかりやすく伝わる[†117].

(1.37)(1.38) の右辺こそが Fourier 級数であり, a_n と b_n が Fourier 係数である. a_n と b_n は, それぞれ, $\cos nx$ と $\sin nx$ に掛かっているので, **余弦関数と正弦関数の各成分 (n 成分) が $f(x)$ の中にどの程度含まれているか**を表してくれる[†118].

Fourier によるこの画期的な発想は, ここで例示した $f(x)$ に留まらず, **いかなる周期関数 $f(x)$ をも三角関数の無限級数として表現可能とする**ものである[†119].

問題 3. $f(x)$ が (すなわち (1.38) の右辺が), 周期 2π の周期関数であることを示せ[†120]. [方針] 各項が (1.30) を満たすことを示す.

[†113] もちろん, 厳密には, 定数 c と三角関数は異なるが, $\cos 0 = 1$ のように, 定数は三角関数の一部に含まれるとイメージできる. なお, 1 という特定の数字にこだわる必要はない (1 を定数倍すればいかなる数字も表現できる). 以下では, 定数 c を定数関数とよぶことが多い.

[†114] **[定数関数の周期]** $f(x) = c$ は, 周期関数の定義 (1.30) すなわち $f(x) = f(x + L)$ を満たす. ゆえに, **周期関数であるし, その周期として 2π を選んでよい**.

[†115] たとえば, $\sin 2x$ の基本周期は π であるが, この自然数倍すなわち 2π なども周期となる.

[†116] **[重要]** ここでの線形結合 (1 次結合: linear combination) とは, 重ね合わせ (superposition) ともよばれ, **おのおのの三角関数に定数係数を掛けて足し合わせたもの**を意味する. 一般に, **関数 f と関数 g の線形結合は $af + bg$ と書ける (a と b は定数)**.

[†117] **[重要]** 反面, いきなり総和記号を用いた表現 (1.38) を丸暗記してしまうと, Fourier 級数の本質が見えにくくなる恐れを秘める. 慣れるまでは, **面倒でも (1.37) のように全て書き下す方が理解が進む**.

[†118] **[重要例]** $a_2 = 5$ ならば, $5 \cos 2x$ のように $f(x)$ の中で成分 $\cos 2x$ が占める割合は小さくて, $b_{50} = 300$ ならば, $300 \sin 50x$ のように $f(x)$ において $\sin 50x$ という成分が相当に大きな割合を占めることが読み取れる (もちろん, 重要なのは数字ではなくて相対的な比率 (割合) である).

[†119] [例] 三角関数といわれると, 波や振動といった物理現象だけを思い浮かべるかもしれないが, 実は, 熱伝導や物質拡散なども, Fourier 級数の考え方にしたがって扱うことが可能である.

[†120] この結果を拡張すると, 周期 L の周期関数の重ねあわせは, 同じく周期 L の周期関数といえる.

§ 1.4.2 Fourier 係数の導出

2 つの異なる周期関数が, ひとたび Fourier 級数で表されたならば, 両級数の差異は, 級数内のそれぞれの三角関数の成分の割合を表す **Fourier 係数 a_n と b_n の違いだけに集約**される．その意味で, a_n と b_n を求めることは最重要である[†121].

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.38}$$

と表現されたとする[†122]．ここで, 以下の 2 点を仮定するが, 現時点では気にしなくても問題はない (いまは, Fourier 係数 a_n と b_n を求めることに注力する)[†123]:
(i) $f(x)$ が $[-\pi, \pi]$ で絶対可積分であること[†124], (ii) 無限級数 (1.38) が $[-\pi, \pi]$ において項別積分可能であること[†125].

級数 (1.38) に含まれる多数の (無限個の) 項を眺めて, 嬉しく感じる者などおらず, 誰しもが「可能ならば**項を少なくしたい**」と望む．実は, 学んだばかりの**直交関係式 (1.11)–(1.13) はこれを叶えてくれる**強力な道具なのである．すなわち, **ある三角関数に出会ったとき, それと異なる三角関数を掛けて積分すれば, ゼロに“できる”**性質を利用する.

---

†121 [重要] よく「Fourier“級数”は重要」と連呼される．級数が重要なのではなくて, **「Fourier“係数”」が重要**なのである．事実, この先に学ぶ Fourier 変換も, Fourier“係数の”延長線上に位置づけられる.

†122 (1.35) では初項 (定数) は $a_0/2$ と書かれていたが, この正体が c であることを明らかにする.

†123 [方針] Fourier 級数の理論に現れるさまざまな仮定—— 項別積分と項別微分, 収束性 (一様収束, 各点収束, 平均収束), 不連続性, 絶対可積分など——は, 言うまでもなく重要であって, これらの妥当性を常に検証しながら式変形することが理想である．しかしながら, これは容易とはいえないし, 実は, 具体的な問題の解が得られてから検証しても遅くはない．そもそも, まだ $f(x)$ の具体的な形 (関数形という) すら与えていない現時点において深入りすることは得策でもなく, 初学者である諸君の混乱を招くことが危惧される．だからこそ, 「現時点では」気にしなくてよいと述べた (決して, このような細部を一切気に留めなくて良いことは意味しない)．妥当性の検証を後回しにする立場とは, 数学的厳密性を無視するものではないことも強調しておく.

†124 [発展 (絶対可積分)] 関数 $f(x)$ が $[-\pi, \pi]$ で絶対可積分であるとは, 積分が有限値, すなわち

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty \tag{1.39}$$

をいう．このとき, 次の不等式が成立して, 係数 a_n は発散せずに確定する (b_n も同様):

$$|\pi a_n| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, \mathrm{d}x\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty \tag{1.40}$$

†125 [発展 (項別積分)] 積分と総和の順序交換が可能であることをいう.

(1.38) 右辺第 2 項の括弧内第 1 項の余弦関数 $\cos nx$ を見て, 両辺にこれと異なる余弦関数 $\cos mx$ を掛けて[†126], $[-\pi, \pi]$ で定積分[†127] しようと発想する. ここに, m は自然数である[†128]. まずは, 右辺を変形する[†129]:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \left[c + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \mathrm{d}x \\
&\underbrace{=}_{\text{項別積分}} c \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \mathrm{d}x}_{1\,\text{周期積分}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x}_{\text{場合分け (直交関係)}} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, \mathrm{d}x}_{\text{ゼロ (直交関係)}} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x}_{\text{ひとまとめに考える}} \\
&= \pi a_m
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

2 行目において[†130], 第 1 項は $\cos mx$ をその周期 2π で積分するのだからゼロになる[†131]. **第 3 項は正弦と余弦の積の直交関係式 (1.13) よりゼロ**になる[†132]. 一方で, 第 2 項は難解にみえるので, 総和記号を用いずに, 具体的に書き下してみることとする. 3 行目から 4 行目に至る式変形の詳細は以下のとおりである[†133]:

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos mx \, \mathrm{d}x}_{n=1} + \underbrace{a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos mx \, \mathrm{d}x}_{n=2} \underbrace{+ \cdots}_{n=3,4,\cdots,m-1} + \underbrace{a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx \, \mathrm{d}x}_{n=m} + \cdots \\
&= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, \mathrm{d}x = a_m \pi
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

---

†126 [理由] 直交性を使えそうだからである.

†127 [理由] 周期が 2π だからである.

†128 m を自然数に限定した理由は, 直交関係式 (1.11)–(1.13) を使いたいからである (後に気づく).

†129 [見掛け倒し] 総和記号と積分記号のコンボが, いかにも難解な装いをさせるが, 実は全く難しくはない. **総和記号は n に関与し, 積分記号は x に関与する**ことが重要である.

†130 項別積分が可能であると仮定した. 先述のように, この妥当性の検証は後回しとする.

†131 計算によって, またグラフを描いて, 確かめよ.

†132 **[基礎]** 第 1 項の c, 第 2 項の a_n, 第 3 項の b_n は, 全て x 積分に関与しない定数であるから, 積分記号の外に出した.
[重要] ただし, a_n と b_n は n の総和に関与するので, 総和記号の外に出してはならない.

†133 **[重要] この項は「ひとまとめに考える」ことが重要**である. なぜならば, n と m が等しいか否かを考えるとき, **積分のみならず係数 a_n の添え字 n も連動して変化してしまうから**である.

$n=m$ **の場合 (同じ関数の積) に限り積分値が** π **となり, それ以外はゼロ**となる点に注意を要する[†134]. これで右辺の変形は終了した[†135].

いっぽうで, (1.38) の左辺に $\cos mx$ を掛けて $[-\pi,\pi]$ で積分すると

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x \tag{1.43}$$

となる. ようやく, Fourier 係数 a_n を与える次式をうる (m **を** n **におきかえた**)[†136]:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad \underbrace{(n=1,2,\cdots)}_{\text{自然数}} \tag{1.32}$$

同様に, (1.38) の両辺に $\sin mx$ を掛けて[†137], 係数 b_n の表式を導いてみよ:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.33}$$

まだ安心してはならない. 定数項 (定数関数) c を求める作業が残っている. 級数 (1.38) の総和には**周期** 2π **の三角関数が含まれているので, 単純に, 周期** $[-\pi,\pi]$ **で積分すれば三角関数の全てが消えてくれる**. これを実行する:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} c\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x}_{\text{項別積分してゼロ (三角関数の 1 周期積分)}}\right)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} c\,\mathrm{d}x = 2\pi c\end{aligned} \tag{1.44}$$

[†134] $n=m$ 以外の場合はゼロとなり, 寄与がないので, **総和記号が消えた**のである.

[†135] [発展] これで, Fourier 級数の総和 n を自然数に限定する理由, すなわち, $\sin 1.1x$ のような小数の係数を含めない理由がわかっただろう. **直交関係式が使えないから**である. しかしながら, 小数を含めるような拡張も可能であって, それが Fourier 変換である (§ 4). n は, Fourier 級数では離散的 (飛び飛び) の値をとるが, Fourier 変換では連続的すなわち積分となる.

[†136] **[重要・注意]** 最後に m を n におきかえたことに違和感を感じるかもしれない. **Fourier 係数 (1.32) とは, 数列 (sequence) であって, その両辺の項の番号を明示する記号は何でもよい**. それゆえ, 元々の記号の n に整えただけのことである (深く考えすぎると混乱するかもしれない). ついでながら, Fourier 級数 (1.38) の和の範囲を定める記号 n も, m や ℓ など何でもよい.

[†137] この動機も明快である. 級数に含まれる $\cos nx$ や $\sin nx$ と**「異なる関数** $\sin mx$ **を掛けて余計な項を消したかった」**のである.

したがって,

$$c=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x \tag{1.45}$$

以上で, 係数 c, a_n, b_n の全てが得られたが, 自然数 $n\,(\geq 1)$ に対して定義された a_n (式 (1.32)) において, あえて $n=0$ とおいてみる. すると, $\cos 0=1$ より

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=2c \tag{1.46}$$

であることがわかる. **記号は少ない方が簡潔にすむ**ので, a_n に c を含めて,

$$c\equiv\frac{a_0}{2} \tag{1.47}$$

と定義してしまおう[†138].

最後に, Fourier 係数 a_n と b_n だけを用いた Fourier 級数 $f(x)$ の表現 (1.35), および, Fourier 係数 a_n と b_n を $f(x)$ から求める式[†139]をまとめておく[†140]:

周期 2π の周期関数の Fourier 級数展開と Fourier 係数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1.35}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.31}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.32}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.33}$$

(1.31)(1.32) を見ると, 「せっかく (1.32) に $n=0$ も含めたばかりなのに, なぜ分割するのか」と思うだろう. もちろん, (1.32) の適用範囲に $n=0$ を含める操作に誤りなどない[†141]. しかしながら, **具体的な $f(x)$ に対して, $n\geq 0$ に対する**

[†138] a_n の定義を拡張して, $n=0$ の場合も a_n に含めることは何の問題もない. しかし, 具体的な計算を行う上では, a_0 は別途考えることとなる (後述).

[†139] [用語 (非重要)] これを「Euler の公式」とよぶ書物もあるが, 本資料では特に名前をつけない. この言い回しは, 相当に希少な上に, 複素関数論における重要公式「Euler の公式 (2.4)」との混同を防ぐためである.

[†140] **[重要]** Fourier 級数が**無限級数**であることと, Fourier 係数が**数列**であることを強調しておく. なお, (1.31)(1.32) は**定積分なのだから, 係数の各項 (a_0, a_1, a_2, $\cdots$) は定数**である.

[†141] 事実, $n\geq 1$ に対する a_n の公式 (1.32) に $n=0$ を代入すると, $\cos 0=1$ ゆえに, (1.32) は

Fourier 係数 a_n を実際に計算してみると, 分母に n が現れ, $n=0$ で a_n は発散に至るのである (少なくとも本資料で解く全ての問題では). そこで, $n=0$ の場合は除外して, 予め $n=0$ とおいた (1.31) にしたがって計算することとなる[†142][†143].

つまりは, **$n=0$ の場合を (1.31) から, $n \geq 1$ の場合を (1.32) からと, 常に場合わけして計算**することが正攻法であるが, 実際に計算を行わねばわかるはずもない. 次節 § 1.5 の問題を解きながら, この事実を具体的に確かめよう[†144].

問題 4. 周期 2π の周期関数 $f(x)$ が, Fourier 級数 (1.35) に展開できるとき, その Fourier 係数を与える式 (1.31)–(1.33) を導出せよ.

§ 1.5　計算例

$f(x)$ にいくつかの代表的な関数形を与えて, その Fourier 級数を求めよう. Fourier 級数を求めるとは, Fourier 係数 a_0, a_n, b_n を求めることなので, 公式 (1.31)–(1.33) にしたがって積分計算を行えばよいだけに見えるが, 実は, その計算は容易とはいえない[†145]. いくつかの例題を解きながら理解を深める.

$n=0$ の場合つまり a_0 を包含する.

[†142] [自身で気付くことが重要] (1.31) の右辺の積分には, どこにも n を含まないがゆえに, 積分結果にも n が現れるはずがない. つまり, 初めから記号 n の依存性を除外できる.

[†143] a_0 は, a_n ($n \geq 1$) と無関係な, 単なる記号とみなしてもよい. しかし, a_n と関連づけることが可能なので, 全く無縁に思える記号 c よりもわかりやすい記号 a_0 を使っただけと思ってよい.

[†144] [考え方] 以上の論理が受け入れがたいかもしれないので, 別の説明を挙げておこう—— $n=0$ の場合も公式 (1.32) に含まれると仮定し, 実際に a_n を求めた結果, $n=0$ の場合を別に考える必要性に迫られたとする. そのときはじめて, a_0 を与える (1.31) に頼って計算すればよい. 逆に, $n=0$ に対する不都合がなかったならば, それを $n \geq 0$ に対する a_n としてよい.

[†145] a_0 の場合に対して注意を払わねばならなかったように, これに類する注意点が多く現れる. 決して, 公式に代入するだけの単調な作業ではないことにも気づくだろう.

§ 1.5.1　方形波

問題 5. **[方形波 1]**[†146] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された関数[†147]

$$\begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases} \tag{1.48}$$

を周期 2π の周期関数となるように, x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく[†148][†149]. $f(x)$ の概形を描き[†150], その Fourier 級数を求めよ.

---

†146 [例] 方形波 (square wave), 方形パルス, 矩形波などとよばれる. 方形波は, デジタル信号として最もよく使われている波形であり, テレビや携帯電話といった電化製品の中を走り回っている. 「方形」とは, 長 "方形" や正 "方形" に由来し, 直角の波形を意味する.

†147 定義域を, $(-\pi < x < 0)$ や $(0 < x < \pi)$ のように, $x = 0$ や $x = \pm\pi$ で定義されないように定める書物もあるので混乱するかもしれない. 関数それ自体を眺める上では, もちろん, このような定義域の差異に注意を払うべきである. しかしながら, 周期関数に拡張して Fourier 級数に展開してしまえば, 実は, この軽微な差異は問題とならないことに気づく (後述). したがって, Fourier 解析の理論においては, **$<$ と $\leq$ の差異に過敏になる必要性は低い**.

†148 **[周期的拡張 (§ 1.4.1)]** この操作を, 周期 2π での周期的拡張という. なぜ周期的拡張が必要なのかを以下で説明する—— とくに応用上は, **関数とは, $0 \leq x \leq L$ のような長さ L の有限の区間だけで定義される (与えられる)** ことがふつうであって, 無限の領域 $-\infty < x < \infty$ で定義される非現実的な関数を扱うことは稀である. しかし, **有限の区間だけで定義された関数であっても, それが周期関数となるように, その外側へ (x 軸全体に) 拡張することができる**. これを $f(x)$ とおく.

†149 †148 の操作の意味も意義も, わかりやすいとはいえないだろう. 本資料では, 「周期的拡張」という略語には頼らず, 「 **⋯** で定義された **⋯** という関数を周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に拡張し **⋯** 」というくどい表現を積極的に採用する. 実は, 周期的拡張は 1 通りに限らないこともあるので, その都度このように書けば, 誤解を招く恐れもない.

†150 周期的拡張によって作られる $f(x)$ は次式で与えられることを確かめよ (数式表現ではわかりづらく, 図を描く方が理解しやすいことに気づく. 本資料では, 図表は割愛し, 板書にゆずる):

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \cdots\cdots,\ [-5\pi, -4\pi),\ [-3\pi, -2\pi),\ [-\pi, 0),\ [\pi, 2\pi),\ [3\pi, 4\pi),\ \cdots\cdots \\ 1 & \cdots\cdots,\ [-4\pi, -3\pi),\ [-2\pi, -\pi),\ [0, \pi),\ [2\pi, 3\pi),\ [4\pi, 5\pi),\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{1.49}$$

[解] まず, **自然数** $n \geq 1$ に対する Fourier 係数 a_n を, (1.32) に従って計算する[†151][†152]:

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} 0 \times \cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} 1 \times \cos nx\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{\sin n\pi - 0}{n} = 0 \tag{1.50}$$

§ 1.4.2 末尾で述べたとおり, やはり**分母に n が現れた**. それゆえ, (1.32) に $n = 0$ の場合の a_0 を含めてはならず, そもそも記号 n を排除した公式 (1.31) にしたがって, **初項 a_0 を別に求めねばならない**[†153]. これを実行する[†154][†155]:

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x = [x]_0^{\pi} = \pi \tag{1.51}$$

両辺を π でわって, 初項 a_0 と a_n をうる[†156]:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0\ (n = 1, 2, \cdots) \tag{1.52}$$

つぎに, $n \geq 1$ に対して, b_n は, (1.33) より,

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x$$
$$= -\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{-(\cos n\pi - 1)}{n} = \frac{1-(-1)^n}{n} \tag{1.53}$$

[†151] **[コツ]** 積分記号前の $1/\pi$ は邪魔であるだけでなく, 計算ミスを招くので, 予め両辺に π を掛けるとよい (ただし, **最後に π で除し忘れてはならない**). この意味で, **「πa_n」を Fourier 係数とみなす考え方**もあるだろう.

[†152] [基礎] 自然数に限らず, いかなる整数 n に対しても, $\sin n\pi = 0$ が成立する.

[†153] [重要] **分母に n が現れる**という事実は, 後の問題でも同じである (その都度確かめよ). このように, $f(x)$ に具体的な関数形を当てはめずに, 抽象的な議論を行っている際には, 一見うまく行くように思っても, 実際に具体的な計算を行ってみると, 案外, 矛盾が生ずるのである. このような意味で, 小難しい抽象論をあえて後回しに我慢して, 具体的な問題を解きながら検討する方針は, (とくに Fourier 解析の習得においては) 有効となる.

[†154] この時点で n 依存性を排除できていることが重要である.

[†155] もちろん, まず a_0 から計算してもよい. n が確かに分母に現れて, $n = 0$ のときに (1.32) が適用できないことを実感してもらう意図で, あえて, a_n を先に計算した.

[†156] [記号] 本資料では, 文脈に応じて, "$n \geq 1$" と書くことも, "$n = 1, 2, \cdots$" と書くこともある. 同様の意味で, 定義域を示す記号 $[a, b]$ と $a \leq x \leq b$ も併用するが, 混乱の心配はないであろう.

である．ここに，

$$\cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} 1 & (n\text{ が偶数}) \\ -1 & (n\text{ が奇数}) \end{cases} \tag{1.54}$$

は**よく使う重要な関係式**であって (確かめよ)[†157], n の偶奇によって値を変えることがわかる．これより, b_n がゼロとなる場合が出てくる:

$$b_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} 0 & (n\text{ が偶数}) \\ 2/(\pi n) & (n\text{ が奇数}) \end{cases} \tag{1.55}$$

したがって, Fourier 級数 (1.35) に, 求めた係数 a_0, a_n, b_n を代入すると

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \sin nx \tag{1.56}$$

となる[†158]．総和記号の中に着目すると, a_n は全ての n に対してゼロとなり, b_n は全ての偶数 $n = 2, 4, 6, \cdots$ に対してゼロとなる．その意味で, (1.56) の書き方はいささか不親切といえる．要するに, 奇数項 ($n = 1, 3, 5, \cdots$) のみが残るのだから, **偶数項を省いた表現に書き改める方が, 級数を明確に解読できる**．そこで, 新しい自然数 k を導入して

$$n = 2k - 1 \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1.57}$$

とおくと, $k = 1$ が $n = 1$ に, $k = 2$ が $n = 3$ に, $k = 3$ が $n = 5$ に対応する[†159]．

結局, Fourier 級数は, 次式に書き改めることができる[†160]:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x \tag{1.58}$$

総和記号による表現は, 簡潔かつ美しい反面, 級数のふるまいを具体的につかみづ

[†157] [同様に] $\sin n\pi = 0$ も重要であった (n は自然数)．

[†158] 総和記号の中の分母の π は n の総和に無関係であるため, 勿論, 総和記号の外に出してよい．

[†159] [重要] 確かめよ．以後も**この置き換えを多用**する．同じ級数であっても, その**表現がわかりやすく読み取りやすいに越したことはないので, 拘る価値がある**．

[†160] [注意] 級数の表記は人それぞれであって, もちろん (1.56) 最右辺の表現でも正しい．しかしながら, 級数を, より的確かつわかりやすく書き改める作業は, 本質の一つであるので, 試験でも問う．

らい．この欠点を補うべく，以下のように，**3 項程度を書き下すことも習慣づけるべきである**[†161]:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{2}{\pi}}_{\text{大}} \sin x + \underbrace{\frac{2}{3\pi}}_{\text{中}} \sin 3x + \underbrace{\frac{2}{5\pi}}_{\text{小}} \sin 5x \underbrace{+\cdots}_{\text{必ず書く!!}} \tag{1.59}$$

すると，**Fourier 係数のふるまいが具体的に見える**．すなわち，係数は，$2/\pi$, $2/3\pi$, $2/5\pi$ と，**どんどん小さくなってゆく**傾向がわかる．もしも，係数が大きくなってゆくのならば，収束せずに発散に至るのだから，この傾向は，収束する無限級数を考える上で当然といえる[†162]．そもそも，本問題で利用した **Fourier 係数を与える公式 (1.31)–(1.33) は，級数 (1.35) の等号成立 (収束) を前提として導かれたのだから，発散するはずがない**ではないか[†163]．

問題 6. **[方形波 2]** 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された関数

$$\begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases} \tag{1.60}$$

を周期 2π の周期関数となるように，x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく[†164]．$f(x)$ の概形を描き，その Fourier 級数を求めよ．

[方針と解] 問題 5 と大して違いがないと思ってはならない．$f(x)$ **が奇関数であることに気づくことが重要**である．これによって，**計算量が大幅に軽減**されるからである[†165]．奇関数を，y 軸対称な区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すれば，初項は $a_0 = 0$ となり，奇関数と偶関数 $\cos nx$ の積も奇関数[†166] であるから，$a_n = 0\,(n \geq 1)$ もわかる．ゆえ

[†161] [まとめ] 以下の双方が重要である—— **(i) 総和記号を用いて一般的に表現し，(ii) 数項を具体的に書き出して傾向をつかむ**．

[†162] [基礎] もしも，Fourier 係数が大きくなったならば，計算ミスの存在を逆算して疑うとよい．

[†163] **[重要]** Fourier 級数の収束性の詳細について，まだ議論してはいない．理由はさておき，$f(x)$ の Fourier 級数が，$f(x)$ に収束するという前提 (それゆえ等号で結んだ) のもとで話を進めており，事実，(1.31)–(1.33) も収束を前提に導かれた．つまり，現時点では，収束性の一般的理論に踏み込むことは重要ではない．しかしながら，**収束を仮定して議論が成立していることへの意識は重要極まりない**．

[†164] [用語] これも方形波とよばれる (どちらかというと，方形波とは，この波形を指すことが多い)．

[†165] [重要] 実際に，Fourier 級数の対象の関数の多くは，偶関数か奇関数かのどちらかである．

[†166] [重要] **偶関数と奇関数の積の性質は，覚えるのではなく，その場で再現する**ことをすすめる．すなわち，べき関数 $x^n x^m = x^{n+m}$ を思い返して，$n+m$ が奇数と偶数のどちらになるのかを，その都度判断する方が，誤りがない．

に, 求めるべきは b_n だけであって, 偶関数の積分公式 (1.27) をうまく使えば[†167][†168]

$$\begin{aligned}\pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} 1\times\sin nx\,\mathrm{d}x = -2\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{-2(\cos n\pi - 1)}{n} = \frac{2[1-(-1)^n]}{n}\end{aligned} \tag{1.61}$$

なお, $n \neq 0$ であるから, 発散するはずもない. したがって, Fourier 級数は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n}}_{\pi\text{でわった}} \sin nx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}\sin(2k-1)x \quad (n = 2k-1) \tag{1.62}$$

となる[†169]. やはり, 3 項程度を書き下し, 級数のふるまいを観察する:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x \underbrace{+\cdots}_{\text{省略不可}} \tag{1.63}$$

問題 5 と同様に, Fourier 係数は減少してゆくことがわかった.

問題 7. [基礎] 問題 6 において, 偶関数と奇関数の性質に頼ることなく, 積分計算によって, $a_0 = 0$ および $a_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を確かめよ.

問題 8. [**発展: 無限級数としての Fourier 級数の有限項での打ち切り**][†170]
問題 6 で求めた Fourier 級数 (1.62) を, (i) 第 2 項 ($k = 2$) までで打ち切った部分和, (ii) 第 12 項 ($k = 12$) までで打ち切った部分和, それぞれのグラフをコンピュータを用いて描け[†171]. $f(x)$ と (i) と (ii) の 3 者を比較して, 以下の特徴を確認せよ:

(特徴 1) 打ち切った項の数の増加に伴って, 部分和は $f(x)$ に近づいてゆく[†172].

[†167] (1.28) に頼り, 積分範囲が y 軸対称であることをうまく利用する.

[†168] [コツ] やはり, あらかじめ両辺に π を掛けておいた.

[†169] 最右辺では, 奇数の $n = 1, 3, 5, \cdots$ のみを表現できるように, 新しい自然数 k を導入して書き改めた (問題 5 と同様).

[†170] 無限級数を有限項で打ち切ったならば, 当然, 無限級数ではなくなる. このようにして得られる有限項からなる級数を, Fourier 級数の**部分和**という (後述). 現実には, **無限級数のグラフを描くことは不可能**であるので, グラフを描きたいと思ったならば, 有限項で打ち切った部分和に妥協する他ない.

[†171] 何らかのプログラミング言語でも, Excel でも, 何を用いてもよい.

[†172] [重要] この事実から, **部分和の項数を増やせば, すなわち $k \to \infty$ と無限項 (無限級数) を考えれば, $f(x)$ の Fourier 級数が $f(x)$ に近づいてゆく**ものと推測される (もちろん, 単なる推測に過ぎず, 厳密な証明でもなんでもない).

(特徴 2) $x=0$, $x=\pm\pi$ などの不連続点の近傍には, 強い振動がみられる†173.

問題 9. [発展: 不連続点における収束] 問題 6 において, $f(x)$ の不連続点である $x=0$ に注目しよう. このとき, 定義式 (1.60) によれば, $f(x)$ の値は $f(0)=1$ である. それゆえ, $f(x)$ の Fourier 級数 [(1.62) の最右辺あるいは (1.63) の右辺] の値も 1 となるように思える. しかしながら, 級数 (右辺) に $x=0$ を代入すると, 奇妙にも, ゼロという値が対応してしまう. この事実は, 他の全ての不連続点である $x=\pm n\pi$ (n は自然数) においても同様である. 結局, Fourier 級数 (1.62) の**等号は「不連続点を除いて」成立**すると結論づけられる†174. 以上を, 自身で確かめよ†175.

以上の問題のように, 不連続な関数であっても Fourier 級数に展開できる場合は多い†176. これは, 既習の Taylor 級数と Fourier 級数の著しい差異である. **Fourier 級数とは, Taylor 級数よりもはるかに収束しやすく**, その意味で, 工学応用の立場からは欠かせない強力かつ有用な道具である†177†178.

§ 1.5.2　べき関数

不連続関数の議論は一旦休止して, ここでは連続関数を眺める. 1 次関数と 2 次関数の Fourier 級数を計算してゆこう.

†173 [発展] これを, Gibbs (ギブス) の振動という. 不連続点では一様に収束しないことが (§ 3.1 で後述), Gibbs の振動の原因である.

†174 [発展]「不連続点を除いて」といっておきながら (1.62) や (1.63) では等号を用いているではないか, と思うかもしれない. これは決して「不連続点といった細かなことは気にしない」という大雑把な態度ではない. Fourier 級数の一般的理論では, $[-\pi,\pi]$ の中の有限個の (たかだか数個の) 点で一致しない関数を同じ関数とみなすことがある. この理論にしたがって, 以後も, 等号を用いる.

†175 **[重要・発展 (§ 3.1)]** Fourier 級数は, **不連続点において「右極限値と左極限値の平均値に収束」**するという重要な性質がある. 実際に, この場合も, $(-1+1)/2=0$ という平均値に収束しており, この性質を先取りする意図で出題した.
[補足] 右極限とは正方向 $x\to+0$ からの極限, 左極限とは負方向 $x\to-0$ からの極限である.

†176 [発展 (§ 3.1)] 精密にいうと, **「区分的に滑らかな関数」ならば**, Fourier 級数に展開できて, その級数は, 不連続点を除いて元の関数に一致する.

†177 [発展 (§ 3.1)] **Fourier 級数は導関数 (微分) を含まない**. それゆえに, **不連続点の存在をも許容**してくれる. これは, 昨年度 Taylor (テイラー) 級数に慣れ親しんだ諸君の立場からは, 驚くべき事実ではなかろうか. そもそも, Taylor 級数は, 無限階微分可能であることを前提とする. Taylor 級数から見れば不連続関数など門前払いである. いま, Fourier の考え方にしたがった結果, **不連続関数の無限級数展開に成功したことは注目に値する**. Fourier 級数の収束性に関する条件は, Taylor 級数に関するそれよりもはるかに緩い.

†178 **[重要注意]** 連続と不連続, 微分可能性, Taylor 級数などと聞いてピンと来ない者は, 解析学の総復習を強くすすめる. **本科目に限らず, 全ての科目が理解できなくなる恐れがある**からである.

問題 10. [1 次関数 (1)——§ 1.4.1 の答え] 区間 $[-\pi,\pi)$ で定義された 1 次関数 x を, 周期 2π の周期関数となるように, x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく. $f(x)$ の Fourier 級数が次式で与えられることを示せ[†179]:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\cdots \tag{1.64}$$

[ポイント 1] どのような波形になるかの予想を立てるべく, やはり, $f(x)$ の概形を描いた後に[†180], Fourier 係数を計算せよ:

$$a_0=0,\quad a_n=0\ (n=1,2,\cdots),\quad b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \tag{1.65}$$

[ポイント 2] 初項から第 3 項程度を書き下して, Fourier 係数の**絶対値**の減少を確かめることが重要である[†181].

問題 11. [1 次関数 (2)] 区間 $[-\pi,\pi)$ で定義された関数

$$|x|=\begin{cases}-x & (-\pi\le x<0)\\ x & (0\le x<\pi)\end{cases} \tag{1.66}$$

を周期 2π の周期関数となるように, x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく. $f(x)$ の Fourier 級数展開

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x \tag{1.67}$$

を導き, 4 項程度を書き下して, Fourier 係数の絶対値の減少を確かめよ.

[方針] $f(x)$ の概形を描き[†182], 部分積分法[†183] を用いて, a_0, a_n, b_n を計算する:

$$a_0=\pi,\quad a_n=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]\ (n=1,2,\cdots),\quad b_n=0 \tag{1.70}$$

[†179] これが, § 1.4.1 で初めに例示した関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開に他ならない.

[†180] 図を描けば, $f(x)$ が**奇関数**であることがわかる. すると, $a_0=0$ と $a_n=0$ の予想もつく.

[†181] [注意] この場合, **Fourier 係数が正値も負値もとる** (一般的性質) ので, “絶対値” とかいた.

[†182] この場合は, $f(x)$ は偶関数であるので, $b_n=0$ と予想もつく (理由を考えよ).

[†183] [復習] 部分積分 (partial integral) の公式を万一忘れても, 一瞬で再現できる. すなわち,

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{1.68}$$

a_n **の分子を注意深く見れば, 問題 5 と問題 6 と同様に** n **の偶奇によって場合分けの必要性**を感じる. そこで, $n = 2k-1$ と置き換えて, (1.67) の形に整えよ.
[注意] このように, **同じ 1 次関数であっても, 周期的拡張の方法によって, その Fourier 級数が大きく異なる**のである[†184].

問題 12. [**2 次関数**] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された関数 x^2 を, 周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく. $f(x)$ の Fourier 級数が

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \tag{1.71}$$

となることを示し, ふるまいを論ぜよ. [方針] 概形を描いた後に係数を求めると

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \ (n = 1, 2, \cdots), \quad b_n = 0 \tag{1.72}$$

となる. 問題 10 と同様に, 偶奇で場合分けする必要はない[†185].

§ 1.5.3 まとめ

Fourier 級数には多数の性質がある. 1 つ, 例題形式で調べておく.

問題 13. [**級数の初項の意味**] 命題「周期 2π の周期関数 $f(x)$ の**平均値は, その Fourier 級数の初項** $a_0/2$ **に等しい**」を証明せよ[†186]. [証明] 平均値は, Fourier 級数

のように積の微分を行い, $[a, b]$ で両辺を定積分すると

$$\int_a^b f'(x) g(x) \mathrm{d}x = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) \mathrm{d}x \tag{1.69}$$

ここに, ダッシュ記号 ($'$) は微分演算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ である.
[注意] 本資料では, 微分操作を意味するダッシュ記号は用いずに, **「どの変数で微分するのか」を明示すべく**, $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ と書くことの方が多い. 偏微分の場合を思い返せば, これに慣れることは, 面倒ではあるが重要である. 工学, 物理, 数学のほぼすべては多変数関数に支配されるがゆえに, そのメリットも自明だろう.

†184 [重要] その本質は, 奇関数, 偶関数のいずれとなるように拡張するかにある.

†185 [**重要**] つまりは, $(-1)^n - 1$ のような項があるときのみ, 場合分けして, 簡潔な表現に整理すればよい. この場合は, 全ての自然数 n に対して級数の項が対応する.

†186 [簡単な例] 三角関数 $\sin x$ と $\cos x$ の平均値はゼロであるし, その Fourier 級数の初項もゼロである (計算によって確かめよ). ゆえに, 三角関数は, この命題 (proposition) を満たす.

(1.35) の両辺を $[-\pi, \pi]$ で積分し, 1 周期 2π で割ることで得られる. すなわち,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]\mathrm{d}x \tag{1.73}$$

右辺を項別積分し[†187], 三角関数が周期関数であることを思い返すと, 題意に至る:

$$(\mathrm{RHS}) = \frac{1}{2\pi}\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \tag{1.74}$$

本章を終えるにあたって, 本質的な事項や軽微な計算テクニックを, 列挙しておこう:

- **周期関数を三角関数の重ね合わせ (線形結合) として表現**するのが Fourier 級数 (無限級数) であって, その特徴は, Fourier 係数 a_0, a_n, b_n に集約される.
- 有限の区間で与えられた関数を, 周期的に拡張して周期関数を作る.
- 展開したい関数が, 偶関数か, 奇関数か, いずれでもないかを観察する[†188].
- a_0 と a_n $(n \geq 1)$ は, 別々に積分計算せねばならない.
- (1.31)–(1.33) の積分記号の前の $1/\pi$ は邪魔なので, 積分計算の実行前に, 両辺に掛けておくと, ミスを防ぎやすい[†189].
- $\cos n\pi = (-1)^n$ および $\sin n\pi = 0$ に注意し, 使いこなす.
- Fourier 係数を求めた結果, n の偶奇に応じて多数の項がゼロになる場合は, 新しい自然数 k を用いて $n = 2k-1$ と置き換えるとよい[†190].
- **Fourier 係数には, n の増加にともなって減少**するという性質がある[†191].
- 部分和の項の数を大きくしてゆくと, 部分和は元の関数へと近づく.

---

†187 [注意] 繰り返すが, 項別積分の妥当性の検証は後回しとする. この意味で, 本問題文を「**項別積分可能な**関数 $f(x)$ の ⋯」と書き換えてもよい.

†188 積分計算がラクになる可能性がある.

†189 ただし, **最後に π で割ることを忘れてはならない** (言われるまでもないと思うかもしれないが, 当の金川も, よく間違える).

†190 これは必然ではないが, 級数を簡潔かつ的確な表現に書き換えるという意味において重要である. その意味で, 試験においても出題するだろう.

†191 いいかえれば, 分母に n を含むのである. この観点からの検算さえ怠らなければ, 計算ミスは自ずとゼロへと収束するだろう.

- **不連続関数であっても Fourier 級数に展開できる (Taylor 級数からみれば, 不連続関数は門前払い**である). 工学応用上, 極めて有用な級数といえる.
- 項別積分の妥当性や, Fourier 級数の収束定理などは, まだ触れていない[†192].

[†192] 現時点では気にしなくても問題はない (§ 3.1 で詳述).

§ 2　複素 Fourier 級数

小難しげにも聞こえる複素数[†193] をあえて持ち込む理由はどこにあるのか. 数学的に便利であるばかりでなく, 物理的意味が見えやすくなるからである[†194].

複素数を導入する意義は以下の 2 点である—— (i) **三角関数の面倒な微分積分が著しく容易**になる[†195]. (ii) Fourier 級数を複素形式に拡張しておけば, **「複素 Fourier 係数」の延長線上にある「Fourier 変換」**がすぐさま理解できる[†196].

以上の意味で, 複素数への拡張には, 複素数の復習に時間を割いても惜しくないほどの価値がある[†197].

---

†193 [注意] 以下で現れる “複素関数” という用語は, 「複素解析」の講義における “複素関数” と同一である. 「複素解析」を既習とはいえ, 忘れていると想像するので, 本講義および資料内で補う.

†194 [発展] 複素 Fourier 級数のすぐ先にある Fourier 変換も Laplace 変換も, 複素数の値をとる. したがって, その物理的意味の理解のためには, 複素数への理解から避けて通ることはできない.

†195 [重要] 余弦関数 cos の微積分の際に現れる -1 による計算ミスの経験はないだろうか. このような計算ミスは, 「算数的」であって, 「数学においては」本質的でない. これに神経を払う労力から解放される.

†196 **[先取り・重要] 複素 Fourier 係数という離散的な (飛び飛びの値をとる) 数列** c_n が, **Fourier 変換という連続的な関数** $F(k)$ に対応する. 天下りでも, 表式を眺めて類似性を見出そう:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x}_{\text{同じ}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x}_{\text{同じ}} \quad (-\infty < k < \infty)$$

c_n は n に対する数列だが, $F(k)$ は k に対する関数である. 飛び飛びの $n = 1, 2, \cdots$ ではなく, 全ての n を考える関数こそが Fourier 変換である. 積分範囲にも違いがある (後述). なお, 積分記号の外の係数の差異は, 本質とは程遠いので, 現時点では気にしなくてよい (記号の定義なども後述). [補足] n や k は, 周波数や波数 (波長の逆数) に対応づけられる.

†197 **[復習 (全て確かめよ)]** 複素数 (complex number) の基礎事項を, 高校レベルも含め列挙する—— (i) 複素数 z は, 実数 x と実数 y および虚数単位 $i \equiv \sqrt{-1}$ を用いて, $z \equiv x + iy$ と定義される. ここに, x と y は定数でも変数でもよいが, これらが**ともに変数のとき z は複素変数**となる. (ii) 第 1 項 x を実部 (real part), 第 2 項の i の係数の y を虚部 (imaginary part) という. (iii) 実部を $\mathrm{Re}[z] = x$ とかき, 虚部を $\mathrm{Im}[z] = y$ とかく. この表記によって, **複素数 z から, 2 つの実数 $\mathrm{Re}[z]$ と $\mathrm{Im}[z]$ を取り出せる**. (iv) $z_1 = z_2$ ならば, $\mathrm{Re}[z_1] = \mathrm{Re}[z_2]$ かつ $\mathrm{Im}[z_1] = \mathrm{Im}[z_2]$ である (複素数の相等). (v) $y = 0$ のとき $z = x$ すなわち実数となる. $x = 0$ のとき $z = iy$ すなわち純虚数 (pure imaginary) となる. (vi) 複素数には, 2 つの実数 x と y を, 複素数 $x + iy$ という**「1 つの数」に集約**する意義がある. (vii) z の虚部の符号を変えたものを, **複素共役 (共役複素数)**(complex conjugate) といい, $\overline{z} \equiv x - iy$ と定義される. [注意] 複素共役を明示する記号は, 書物によって異なる (z^* など). (viii) **複素数とその複素共役の積 $z\overline{z}$ は複素数の大きさの 2 乗 $|z|^2$ に等しい**: $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. (ix) 積の共役は共役の積に等しい: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$.

§ 2.1　複素数の基礎から Euler の公式へ

§ 2.1.1　用語——実数値関数, 複素数値関数, 複素関数

本講義 (のとくに以下の部分) で扱う関数は, その取る値が実数であったり複素数であったりと混乱の恐れがあるので, 以下の 3 通りの関数を導入する[†198][†199].

1) 実数値関数—— 実変数 x と実変数 y の関係を対応づける[†200]:

$$y = f(x) \tag{2.1}$$

すなわち, **「1 つの実変数に対して 1 つの実変数が対応」**する[†201].

2) 複素数値関数—— 実変数 x と複素変数 w の関係を対応づける:

$$w = f(x) \tag{2.2}$$

すなわち, **「1 つの実変数に対して 1 つの複素変数が対応」**する. しかし, 複素数は $w = u + iv$ と, 2 つの実変数 u と v を用いてかけるため[†202], 「1 つの実変数に対して 2 つの実変数を対応」づけるものとも言い換えることも可能である[†203].

3) 複素関数—— 複素変数 z と複素変数 w の関係を対応づける:

$$w = f(z) \tag{2.3}$$

---

†198 大まかに言って, これまで諸君が用いてきた関数が実数値関数で, 本講義で用いるのが複素数値関数である. 当面, 複素関数は用いないが, 複素数値関数との差別化の意味合いがある (逆 Laplace 変換において複素関数が現れるが, 本講義ではこれに深入りしない予定).

†199 [注意] 実数値関数, 複素数値関数, 複素関数とは, 差別化のための用語に過ぎず, 難しく考える必要もないし, 用いなくともよい. また, 以下の説明では, 変数と変数の対応関係 (関数あるいは写像) を表す記号に, 区別せずに f を使う.

†200 [用語] このような言い回しにおいて, 指定する側である x を独立変数 (independent variable), 関数 f に放り込んで出力される y を従属変数 (dependent variable: 未知変数) という. さらに, x のとる範囲を定義域 (domain), y のとる範囲を値域 (range) とそれぞれよぶ.

†201 「1 変数の実数値関数」ともいう.

†202 [用語] 実変数と実定数では意味合いが異なるように, 複素変数と複素定数も異なる (複素定数というならば, 実部も虚部も定数でなければならない). ただし, 「複素数」という大きな表現に, 変数と定数を区別せず, 複素変数も複素定数も集約してしまうことも多い. 用語が重要なのではなく, **1 つ 1 つの記号が変数か定数か, また, 複素数か実数かを区別**することだけが重要である. [補足] そもそも, 定数を変数の一部 (特殊な場合) に含める考え方もあるだろう.

†203 虚部が $v = 0$ のとき, w は実数になるので, **実数値関数は複素数値関数の一部**である. それゆえ, この拡張はごく自然といえる.

すなわち,「1つの複素変数に対して1つの複素変数が対応」するが, やはり, 複素変数 $z = x + iy$ は2つの実変数 x と y を用いてかけるし, $w = u + iv$ も u と v に分解できるので,「2つの実変数に対して2つの実変数を対応」づけるものとも言い換えられる[†204].

以上より, 注意すべきは, **「複素数値関数と複素関数の決定的な差異」**[†205] にあることがわかる. 複素数を考えたとしても, 虚部がゼロになれば, 複素数は実数に帰着する [†197 の (v)]. 以降の議論においては,「一般に複素数値関数を考える」と振りかぶることが多いが, 本資料の範囲では, 実は, 虚部がゼロになることが判明し, 実数値関数に帰着することがほとんどである.

§ 2.2 で学ぶ複素 Fourier 級数において, 複素数値関数を取り扱う[†206].

§ 2.1.2　Euler の公式

本講義では, つぎの極めて便利な指数関数 e^{ix} を**定義する**[†207]:

$$e^{ix} \equiv \cos x + i \sin x \tag{2.4}$$

定義なのだから, **記憶が必須**である. x は実変数であり, e^{ix} はその右辺を見ればわかるように複素数値関数である[†208]. (2.4) は Euler の公式[†209] とよばれ, **われわれに馴染み深い三角関数を用いて, 複素数に拡張した指数関数を定める**ものであ

[†204] [注意] こう聞くと, 2 変数関数 (微積分) と同一視しかねないが, **複素関数と多変数関数は全く異なる**. 1 つの複素変数と 1 つの複素変数を対応づける複素関数は, 1 変数関数といえる.

[†205] [注意] これを勘違いする者は極めて多い. そして,「複素関数」が市民権を得た数学用語である一方で,「複素数値関数」という表現は使わないことも多い. **「いくつの実数 (複素数) に対していくつの実数 (複素数) が対応するのか」**だけを注視すればよい.

[†206] しかし, 本題は, 複素 Fourier 係数からの自然な拡張として定義される, Fourier 変換 (§ 4) と Laplace 変換 (§ 5 で複素積分として再登場) である. Fourier 変換, 逆 Fourier 変換, Laplace 変換, 逆 Laplace 変換は, それぞれ, 実数値関数, 複素数値関数, 複素関数のいずれか. 学んだ後に振り返ってみるとよい.

[†207] [用語] e^{ix} を**複素指数関数**ということがある (この用語を使わないことも多い).「力学」ですでに天下りに学んだと聞いているが, 本講義でも天下りの立場をとる.

[†208] 1 つの実変数 x に対して, 1 つの複素数値関数 $\cos x + i \sin x$ が対応している.

[†209] 公式とよばれるのだから, 実は, 定義ではなくて結果である. 厳密な証明は複素関数の講義にゆずることとし, 本講義では, 講義時間の都合上, 定義とみなす.
[発展] 複素変数 z に対する指数関数 e^z の定義が前提となる. ここに, e^z は複素関数であって, 複素数値関数 e^{ix} ではない. 複素関数 e^z において, z の実部がゼロとみなせる場合が, 複素数値関数 e^{ix} に相当する.

る[†210][†211][†212][†213]. ここに, i は次式で定義される**虚数単位**である[†214][†215]:

$$i \equiv \sqrt{-1} \quad (i^2 = -1) \tag{2.9}$$

(2.4) は, 成り立ちよりも**使いこなすことが (本講義ではとくに) 重要**である[†216].

[†210] **[解析学の既習範囲で説明する]** (2.4) の証明は, 複素関数の講義にゆずるが, 次の手順にしたがえば「なんとなくは」納得および復習できる—— (i) 実変数 x に対する (実数値関数としての) 指数関数 e^x の Maclaurin 展開を書き下す ($0! \equiv 1$ および $1! = 1$ に注意):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.5}$$

(ii) 三角関数 $\sin x$ および $\cos x$ の Maclaurin 展開を書き下す:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{“奇”関数}) \tag{2.6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{“偶”関数}) \tag{2.7}$$

(iii) (2.5) で, 実数 x を純虚数 ix とおきかえて, 実部と虚部にわけて, 実部に (2.7) を, 虚部に (2.6) を, それぞれ代入すると, (2.4) の等号が “納得”できる.

[†211] [発展] †210 は, 証明ではなく, あくまで説明にすぎない. なぜならば, **(2.5) は実数値関数に限定して定義される指数関数 e^x であるがゆえに, 実数 x を純虚数 ix とおく操作は (厳密な意味で) 許されるはずがない**. その意味で「なんとなく」と書いた.

[†212] [用語] Maclaurin (マクローリン) 展開とは, $x = 0$ まわりでの Taylor 展開のことである. 原点 (力学的にいえば “平衡点”) 周りの場合, いちいち「$x = 0$ まわりの Taylor 展開」と書く面倒を避けて, Maclaurin 展開と簡潔にいうことができるが, この用語を用いなくともよい.

[†213] [発展]「複素関数」で学んだように, 複素変数 $z\,(= x + iy)$ に関する (複素関数としての) 指数関数 e^z の Maclaurin 展開は, 実は, (2.5) と同様の表式となる:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{2.8}$$

ここで, $z = x$ すなわち実部のみを考えると, (2.8) は (2.5) に帰着する. すなわち, (2.8) とは (2.5) を包含する. 逆にいえば, (2.5) を複素数まで一般化したものが (2.8) といえる. ここに, 指数関数を, わざわざ, 実数値関数から複素数値関数さらには複素関数まで拡張する意義がある.

[†214] [補足] 電気工学や制御工学では, 虚数単位 (imaginary unit) に, 記号 i ではなく j を使うことが多い. それは, 電流 (current) に記号 i を使うからといわれる.

[†215] [補足] 2 乗の $i^2 \equiv -1$ を, 虚数単位の定義と思ってもよい.

[†216] 定義と言われたのだから覚えるしかないともいえるが, たとえ定義の背景に違和感を感じたとしても, **暗記を推奨するほどに頻用する公式**なのである.

§ 2.1.3　三角関数の指数関数による表現

Euler の公式 (2.4) にしたがって, e^{ix} とその複素共役 e^{-ix} を書きだしてみる[†217]:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{2.10}$$

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} \underbrace{=}_{\text{Euler}} \cos(-x) + i \sin(-x) \underbrace{=}_{\text{偶奇}} \cos x - i \sin x \tag{2.11}$$

これらを足し引きすると, 三角関数の複素指数関数による表現をうる[†218]:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{2.12}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{i(e^{-ix} - e^{ix})}{2} \tag{2.13}$$

右辺の i を見て, 安直に, 右辺が複素数値関数であると勘違いしてはならない. 左辺は実数値関数である. したがって, 奇妙に思うかもしれないが, **左辺と等号で結ばれる右辺も実数値関数**に他ならない[†219]. 以下に注意を列挙しよう:

(i) 虚数単位 i が含まれているからといって, それだけで安易に複素数と判断してはならない.

(ii) **複素数と複素数の "和" や複素数と複素数の "積" が実数**になることがある[†220].

(iii) しかしながら, **実数と複素数が等号で結ばれることはありえない**.

問題 14. (2.12)(2.13) を導け[†221].

[†217] e^{-ix} は, Euler の公式にしたがった後に, 偶関数と奇関数の定義 (1.19)(1.20) を代入した.

[†218] [重要] 複素 Fourier 級数の伏線となる.
[用語] (2.12)(2.13) を de Moivre (ド・モアブル) の公式とよぶことがあるが, 本資料では, これらも Euler の公式とよぶ. 実質的には, Euler の公式 (2.4) そのものといえるからである.

[†219] **[重要]** 複素数 e^{ix} と複素数 e^{-ix} の和は, 実数 $2\cos x$ となる. Euler の公式 (2.4) を用いて右辺を変形すれば, 虚部の全てが消えて, 実数 (左辺) に帰着することを確かめよ.

[†220] **[代表例]** 虚数単位の定義こそが, この性質を体現している—— $i \times i = -1$.

[†221] **過去の小テストでよく出題**した.

§ 2.1.4　導関数と定積分

複素指数関数について, 実指数関数と同様につぎの導関数公式が成立する[†222][†223][†224]:

$$\frac{\mathrm{d}e^{Dx}}{\mathrm{d}x} = De^{Dx} \tag{2.15}$$

ここに, $D = A + iB$ **は複素定数 (複素数の定数) であって,** A **と** B **は実定数 (実数定数)** である. 定積分についても, 次式が成立する:

$$\int_a^b e^{Dx}\mathrm{d}x = \frac{1}{D}\left[e^{Dx}\right]_a^b \tag{2.16}$$

すなわち, D **が実定数の場合と全く同様に微積分を行ってよい**[†225][†226].

問題 15. (2.15) を示せ[†227]. [証明] Euler の公式 (2.4) を使うと複素指数関数 e^{Dx} は

$$e^{Dx} = e^{Ax+iBx} = e^{Ax}e^{iBx} = e^{Ax}(\cos Bx + i\sin Bx) \tag{2.17}$$

と書ける. もはや, 虚数単位 i 以外は複素数を含まない形に変形できたので (よく眺

[†222] 本章の計算において多用する. これも, (現時点では) **使いこなすことの方が重要**といってよい.

[†223] 複素定数 D が, 実定数の場合 ($D = A$), 純虚数の場合 ($D = iB$) には, それぞれ,

$$\frac{\mathrm{d}e^{Ax}}{\mathrm{d}x} = Ae^{Ax}, \quad \frac{\mathrm{d}e^{iBx}}{\mathrm{d}x} = iBe^{iBx} \tag{2.14}$$

となる. 前者は実指数関数の導関数公式と全く同じであって, 後者は**純虚数に拡張されている. よく使うのは後者**である.

[†224] [注意・発展] 複素変数 $z = x + iy$ による微分 $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ ではなく, 実変数 x による微分 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ であることに注意を要する. 前者は複素関数の講義で既習である (本講義では用いない).

[†225] この意味でも, e^{ix} の定義 (2.4) に矛盾がないこと, あるいは, この定義の正当性が予想される.

[†226] [発展] 複素数が現れているからといって, これを, 「複素関数」で既習の複素積分と安直に勘違いしてはならない. 複素積分とは, 複素変数 z の関数 $f(z)$ に対して, $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ と計算されるものであった (C は積分経路). すなわち, 「**"複素数** z **で"積分**」するのである. (2.16) は, D に虚部は含むけれども, **「実数** x **で積分」しているのだから実積分に他ならない**.
[発展]「応用数学 A (後半)」の最後に扱う "逆 Laplace 変換" は複素積分に他ならない.

[†227] 板書では割愛予定だが, 複素関数の復習を兼ねてやっておくとよい.

めよ), 実数値関数としての指数関数に対する微分公式 (既習) を用いるだけである:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}e^{Dx}}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{Ax}(\cos Bx + i\sin Bx) \\
&= Ae^{Ax}(\cos Bx + i\sin Bx) + e^{Ax}B(-\sin Bx + i\cos Bx) \\
&= (A+iB)e^{Ax}(\cos Bx + i\sin Bx) = De^{Ax}e^{iBx} = De^{Dx}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

§ 2.1.5　複素数の意義 (1)——簡便な微分演算

あえて, 複素数で表現する意義の 1 つ目は, 微分の演算の容易さにある.

たとえば, 実数値関数 $e^{-ax}\sin kx$ の 2 階導関数を求めたいとする (a と k は**実数**定数). 積の微分公式を用いて実直に計算してもよいが, いささか計算量が多く, 計算ミスも懸念される.

そこで, Euler の公式 (2.4) から逆算して, $e^{-ax}\sin kx$ に対応する**複素数値関数** $e^{-ax}e^{ikx}$ **を考えてみる**[†228]. これを微分するのである:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-ax}e^{ikx} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{(-a+ik)x} = (-a+ik)e^{(-a+ik)x} \tag{2.19}
$$

指数関数の微分はたやすい. 2 階微分も, 同様に $(-a+ik)$ が掛かるだけである[†229]:

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}e^{ikx} = (-a+ik)^2 e^{(-a+ik)x} \tag{2.20}
$$

ここで止めずに, 実部と虚部にわけてみよう[†230]:

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= [(a^2-k^2) - i(2ak)](\cos kx + i\sin kx)e^{-ax} \\
&= [(a^2-k^2)\cos kx + 2ak\sin kx]e^{-ax} + i[(a^2-k^2)\sin kx - 2ak\cos kx]e^{-ax}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

もともと求めたかったものは, $e^{-ax}\sin kx$ の 2 階導関数, すなわち,

$$
e^{-ax}e^{ikx} = e^{-ax}\cos kx + ie^{-ax}\sin kx \tag{2.22}
$$

[†228] $e^{-ax}\sin kx$ は実数値関数であるが, $e^{-ax}e^{ikx}$ は複素数値関数である (丁寧に確かめよ).

[†229] [より一般化] n 階の導関数も, $(-a+ik)^n e^{(-a+ik)x}$ と求まる. 二項定理 (binomial theorem) を使えば, 係数 $(-a+ik)^n$ を具体的に展開できる. 実三角関数 sin と cos のままではどうだろうか. そもそも, n の偶奇を考えることすら億劫ではないか.

[†230] [重要]「それなりの計算量があるではないか」と思うかもしれないが, **2 次の公式と分配法則 (中学数学) だけ**で閉じている. もはや, 高校数学 (三角関数) すら使わない. **計算量ではなくて「微分が容易か否か」が重要**なのである.

の**虚部に隠れていた**ことを思い返すと[†231], (2.21) の虚部が答えに他ならない[†232][†233]:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}\sin kx = [(a^2-k^2)\sin kx - 2ak\cos kx]e^{-ax} \tag{2.24}$$

このように, 解析的にというよりも, **"代数的に"計算**できてしまう[†234]. **複素数は道具として有効に活用しているだけにすぎない. 求めたいものは, あくまで実数値関数であって, きちんと実数だけの世界に戻る**こと (式 (2.24)) が重要である[†235][†236].

これを叶えてくれた, Euler の公式 (2.4) の重要性を改めて強調しておく[†237].

§ 2.1.6　複素数の意義 (2)——物理的意味

一言でいうならば, 「指数関数にひとまとめにする」, すなわち,

$$\underbrace{e^{-ax}}_{\text{減衰}}\underbrace{(\cos kx + i\sin kx)}_{\text{波}} = \underbrace{e^{(-a+ik)x}}_{\text{広義の「波」}} \tag{2.25}$$

---

†231 より詳しく書くと, 以下の虚部 β が (2.24) に他ならない:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}e^{ikx}}_{\text{求めたもの (計算容易)}} \underbrace{=}_{\text{Euler}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}\cos kx + i\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}\sin kx}_{\text{知りたいもの (計算困難)}} = \alpha + i\beta \tag{2.23}$$

†232 [注意] ここで, 決して虚数単位 i を答えに含めてはならない. 求めたいものは, あくまで実数, すなわち**虚数単位の "係数"** なのである.

†233 [問] この計算を複素数に頼ることなく実行し, (2.24) との一致を示し, 計算量を比較してみよ.

†234 [発展] 複素数の方法が本領を発揮するのは, もっと高階の導関数においてといえる. 試しに, 5 階までの導関数を求めるための計算量が, 複素指数関数に頼った場合と頼らない場合で, どれほどの差が出るかを調べてみよ.

†235 繰り返すが, 複素数は目的ではない. **実数の計算 (とくに微積分) を便利にする案内役以上ではない**. そもそも, われわれの世界に, 複素数などという概念はありえない.

†236 [重要] もし, $e^{-ax}\cos kx$ の 2 階導関数も知りたくなったら, (2.21) の**実部を取ればよい**. したがって, 実は, **sin と cos を同時に微分していた**ことになる. われわれが現実世界では用いない 1 つの複素数 $e^{(-a+ik)x}$ の中に, **われわれが使いたいと望む 2 つの実数 (実部と虚部) がきちんと含まれている**ことが重要である.

†237 **[まとめ]** これまで, 三角関数の微積分には, 負号の有無や正弦と余弦の移り変わりに, 相当な神経を使っていただろう. しかしながら, 指数関数の微積分は, e^{-ax} の $-a$ だけを見ておればよい. したがって, 三角関数から逃れて, **三角関数よりも微積分が容易な指数関数に頼りたくなる**のは自然な発想といえる. **三角関数を指数関数に変換してくれる公式 (2.4) によって, 三角関数の微積分が極めて容易になった**.

である[†238]. これまで, われわれは, 三角関数を眺めた際には波 (振動) をイメージし, 指数関数 e^{-ax} を見たときに減衰を思い浮かべてきた[†239]―― **両者を切り離して理解してきた**. そして, 指数関数と三角関数の積を, 減衰振動 (振幅が減少してゆく振動) などに対応させてきた[†240].

指数関数を複素数まで拡張したことで, **指数関数を「広義の波」とみなす**ことが可能となった. したがって, 以後, 指数関数に出会ったときに, 広い意味の波とみなしてよい[†241]. **「複素数値の指数関数 = 実数値の指数関数 + 実数値の三角関数」**と思ってよい[†242][†243].

§ 2.2 複素 Fourier 級数

複素 Fourier 級数との混同を避けるべく, 以後, **Fourier 級数を「実 Fourier 級数」, Fourier 係数を「実 Fourier 係数」**とそれぞれよぶ.

§ 2.2.1 実 Fourier 級数から複素 Fourier 級数を導く

2π の周期をもつ実数値の周期関数 $f(x)$ に対する実 Fourier 級数 (1.35)[†244]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.35}$$

[†238] [注意] 減衰の場合は $a > 0$ である. 連想しやすい「減衰」を引き合いに出したが, もちろん, (振幅などの) 減衰の逆, すなわち, 「増幅」を意味する $a < 0$ であってもよい.
[ついでながら] 減衰はエネルギーを失い, 増幅はエネルギーの供給を意味する.

[†239] イメージで済まさず, 実際に, 三角関数と指数関数のグラフを描いて復習することが望ましい. 三角関数の波形を見れば振動や波を表すことがわかるし, 指数関数とは何かの増幅や減衰を表すものであることも理解できる.

[†240] [例] 声 (音波: 空気の振動) は減衰振動である. 近くの者には声が届くが, 遠くの者には届かない.
[例] コンクリート壁中を伝わる音では, 音が進むにつれて振幅が減衰する (**音が小さく**なる).

[†241] [発展] さまざまな科目で現れる. 振動工学や電気工学が代表例であるが, 量子力学 (quantum mechanics) では, そもそも, 虚数単位の存在こそが波を表すともいわれる.

[†242] [**重要**] 指数関数を複素数に拡張したことで, **三角関数は指数関数の一部**となった. したがって, 以後, **指数関数を見たときには, 増幅や減衰のみならず, 振動や波動という物理を連想**する必要がある. そして, 指数関数は微積分が容易であるがゆえに, **波の数式処理も容易になる**のである.

[†243] [補足] 本節では, 空間を思わせる記号 x で e^{ikx} を述べたが, むろん, 時間 t に置き換えてもよい. その場合, 波数 $k = 2\pi/\lambda$ のかわりに (λ は波長), 角振動数 ω を用いて $e^{i\omega t}$ などと書く.

[†244] [学習指針] 当たり前のように総和記号で表現したが, まだ理解していないならば, いきなりこれを書き下すべきではない. **面倒でも, Fourier の発想としての実 Fourier 級数の成り立ち, すなわち三角関数の線形結合の根拠 (§ 1.4.1) にまでさかのぼって書き下す**ことを強くすすめる.

が与えられたとき, 右辺の三角関数に Euler の公式 (2.12)(2.13)[†245]を代入する:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}}_{a_n \cos nx} + \underbrace{b_n \frac{i(e^{-inx} - e^{inx})}{2}}_{b_n \sin nx} \right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

ここまで変形したところで, 具体的に数項を書き下そう[†246]:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{a_1 - ib_1}{2} e^{ix} + \frac{a_1 + ib_1}{2} e^{-ix} + \frac{a_2 - ib_2}{2} e^{2ix} + \frac{a_2 + ib_2}{2} e^{-2ix} + \cdots \\
&= \underbrace{\cdots}_{\text{必ず書く}} + \frac{a_2 + ib_2}{2} e^{-2ix} + \frac{a_1 + ib_1}{2} e^{-ix} + \frac{a_0}{2} + \frac{a_1 - ib_1}{2} e^{ix} + \frac{a_2 - ib_2}{2} e^{2ix} + \underbrace{\cdots}_{\text{必ず書く}}
\end{aligned}
\qquad (2.27)
$$

2 行目のように項の順序を入れ替えて, 指数関数 $e^{\clubsuit ix}$ の $\clubsuit$ に注目すれば, $\cdots$, -2, -1, 0, 1, 2, $\cdots$ と規則的に並んでいる. $\clubsuit$ が正と負の場合で, 係数の分子の $a_n \pm ib_n$ だけが差異である. そこで, 実 Fourier 係数 a_n と b_n を振り返る必要性に気づく. すなわち, **「$n \geq 0$ で定義した実 Fourier 係数を, 負の整数 $n \leq -1$ まで拡張できないか (すなわち $-\infty < n < \infty$)」**と発想する[†247].

そこで, (1.32)(1.33) において, n を $-n$ とおいてみると, 次式をうる[†248]:

$$
a_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(-n)x \, \mathrm{d}x = a_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (2.28)
$$

$$
b_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(-n)x \, \mathrm{d}x = -b_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (2.29)
$$

[†245] [コツ] これはその場で導くことをすすめる. 数秒で出来るし, 覚えようとすると, 虚数単位 i と負号の位置を間違える恐れがある. **Euler の公式 (2.4) だけ覚えればよい**のである.

[†246] 書き下すと, 本来は $1 \leq n < \infty$ のはずが, **2 行目のように並び替えると, どうやら $-\infty < n < \infty$ と拡張できそうだと気づく**ことが重要である.

[†247] **[重要] 実 Fourier 級数の総和の範囲は $n \geq 1$ であるがゆえに, 実 Fourier 係数 a_n と b_n も $n \geq 1$ に定義を制限しただけ**である. 単なる数列とみなすならば, $n < 0$ を妨げるものなど何もない. [注意] "Fourier 係数" という用語に捉われすぎると, 「勝手に拡張してよいのか」と思うかもしれない. a_n も b_n も単なる数列を意味する記号であって, n は数列の項の番号を表すものに過ぎない. 数列を単に再定義しただけと思えばよい.

[†248] [重要] この置き換えにしたがって, $n \geq 0$ に限って定義されていた係数 a_n と b_n が, $n \leq -1$ にまで拡張された. とくに, $n = 0$ の場合, a_0 は (1.31) のとおりで, b_0 はゼロであり (2.29) にきちんと含まれている (確かめよ). このゼロに意味があることにも, すぐに気づく.

ここで, $n=0$ の場合, すなわち実 Fourier 級数の初項を考察しておく. まず, b_0 は, $\sin 0x=0$ ゆえに $b_0=0$ がわかる. つぎに, a_0 であるが, $e^0=1$ より

$$\frac{a_0}{2} \underbrace{= \frac{a_0-ib_0}{2}e^{0ix}}_{\text{後で使う伏線}} \quad (\because\ b_0=0,\ e^{0ix}=0) \tag{2.30}$$

とあえて書き換えておく. この意図に, 以下で気づくだろう[†249].

$a_n=a_{-n}$ と $b_n=-b_{-n}$ を (2.27) に代入する:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cdots + \frac{a_{-2}-ib_{-2}}{2}e^{-2ix} + \frac{a_{-1}-ib_{-1}}{2}e^{-1ix} \\ &\quad + \frac{a_0-ib_0}{2}e^{0ix} + \frac{a_1-ib_1}{2}e^{1ix} + \frac{a_2-ib_2}{2}e^{2ix} + \cdots \\ &= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}}_{-\infty\ \text{から}} \frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned} \tag{2.31}$$

この最右辺を**複素 Fourier 級数**という[†250]. 複素 Fourier 係数 c_n は複素数列であって, 最後の等号のとおりに, 実 Fourier 係数 a_n と b_n, すなわち, 2 つの実数列を用いて定義される[†251]:

$$c_n \equiv \frac{a_n-ib_n}{2} \quad \underbrace{(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)}_{\text{全ての整数}} \tag{2.32}$$

純虚数 $ib_n/2$ が含まれているのだから, c_n **はもちろん複素数**である[†252][†253].

[†249] $n=0$ の場合も, **他の項とひとまとめに, 総和記号を使える形に変形したかった**のである.

[†250] [厳密には] $n=-\infty$ なる書き方はいささか不適切で (**無限大とは概念であり数値ではない**), あくまで $-\infty$ に近づける極限であるので, 例えば, $f(x)=\lim_{N\to-\infty}\sum_{n=N}^{\infty} c_n e^{inx}$ と書くこともある.

[†251] c_n は, (2.28) において, $n\leq -1$ に拡張した a_n と b_n を用いて定義したのだから, c_n も $n\leq 0$ で定義されるのは当然である.

[†252] [記号] 複素数の表記を用いると, $\mathrm{Re}[c_n]=a_n/2$, $\mathrm{Im}[c_n]=-b_n/2$ である. この表記では, 虚数単位 i を含まないことに注意せよ.

[†253] [疑問] $f(x)$ **が実数なのに** c_n **が複素数でよいのか**と思うかもしれない. よいのである. 複素数 c_n と複素数 e^{inx} の積, すなわち, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ は, たしかに実数となってくれる (§ 2.3).

§ 2.2.2　複素 Fourier 係数 c_n の導出

実 Fourier 係数 a_n と b_n を $f(x)$ の定積分から与える公式 (1.32)(1.33) を, 複素 Fourier 係数 c_n に対しても導く.

a_n **と** b_n **を求めるための面倒な三角関数の積分計算から逃れたい**—— これが, 複素 Fourier 級数への拡張の最大の動機であった. しかし, (2.32) は, 複素 Fourier 係数 c_n を[†254], a_n と b_n を用いて単に定義する式であって, 複素 Fourier 級数展開したい関数 $f(x)$ に出会ったときに, その c_n を直接的に与えてくれるものではない[†255]. そこで, $f(x)$ の定積分を用いる形へと書き換える必要があるが, 容易い.

単に, a_n と b_n を与える式 (1.32)(1.33) を, (2.32) に代入するだけで[†256]

$$
\begin{aligned}
2\pi c_n &= \pi(a_n - ib_n) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\quad \underbrace{[\cos(-n)x + i\sin(-n)x]}_{\text{Euler の公式を使えるように変形 (偶奇)}}\quad \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

のように, あっという間に計算できた. さて, 得られた結果をまとめておこう[†257][†258].

周期 2π の実数値関数 $f(x)$ の複素 Fourier 級数と複素 Fourier 係数 c_n

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{2.34}
$$

$$
c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.35}
$$

[†254] [応用] 理工学では, c_n を**スペクトル** (spectrum) ともよぶ. 諸君も聞いたことがあるかもしれない. [発展] スペクトル分解について調べよ.

[†255] a_n と b_n を求めるための面倒な三角関数の積分計算が必要ならば, c_n の恩恵など何もない.

[†256] [コツ] 実 Fourier 係数の積分記号の前の $1/\pi$ が邪魔なので, あらかじめ左辺に π を掛けて, c_n の定義式 (2.32) の分母の 2 とあわせて, 2π としておいた (もちろん必然ではない).

[†257] **複素 Fourier“係”数 c_n まで来れば目標とする Fourier 変換の一歩手前**である. ゴールは近い.

[†258] [注意] 実 Fourier 係数と異なり, **分母が $1/\pi$ ではなく $1/(2\pi)$ であることに注意**を要する. この数値「2」には意味がある. Euler の公式 (2.4) や総和の下限 $-\infty$ などの観点から考察してみよ. [注意] 複素 Fourier 級数の総和の下限が $-\infty$ であることを忘れてはならない.

やはり, 全ての記号が, 実数か複素数のどちらかを整理しておこう:
$f(x)$ は実数値関数, a_n, b_n は実数列, e^{-inx} は複素数値関数, c_n は複素数列である.

“複素”Fourier 級数といわれたからといって, 安直に (2.34) の右辺が複素数だと思ってはならない. 左辺が実数値関数なのだから†259, これと等号で結ばれている**複素 Fourier 級数は実数に他ならない** (§ 2.3 で詳述)†260. また, e^{inx} などを見て, 三角関数を含んだ指数関数, すなわち「あくまで波を表しているのだ」とみなすことが重要である (§ 2.1.5 と § 2.1.6 で述べた)†261.

$f(x)$ が与えられたとき, 実 Fourier 係数 a_n と b_n を求める計算は, 煩わしい三角関数の積分計算に支配された. しかし, 以下の問題を解けば, **複素 Fourier 係数 c_n を求めるための定積分計算は圧倒的に簡単**であることに気付くだろう. それは, 複素数に拡張したおかげなのである.

§ 2.2.3　問題集

問題 16. [**基礎公式導出**] 周期 2π の実数値関数が実 Fourier 級数に展開可能であるとする. (1.35) から出発して, 複素 Fourier 級数の形 (2.31) まで変形せよ.

問題 17. [**基礎公式導出**] 周期 2π の実数値関数の複素 Fourier 係数 c_n を与える公式 (2.35) を, 実 Fourier 係数 a_n と b_n を与える公式 (1.32)(1.33) を利用して導け.

問題 18. [**基礎公式導出**] 実数値関数の複素 Fourier 係数 c_n は,

$$\overline{c_n} = c_{-n} \tag{2.36}$$

を満たさねばならない†262. これを示せ.
[証明] 以下のように, 複素共役の定義にしたがい, 実数値関数の実 Fourier 係数が満

†259 [発展] 実は, $f(x)$ は, 実数値関数に限らず, 複素数値関数に対しても適用できる (後述).

†260 [用語] Fourier 級数の「複素表示」や「複素形式 (教科書)」などということもあったりと, 言い回しは書物によってさまざまである.

†261 複素数が現れたことで, 徐々に数学が一人歩きしているように感じるかもしれない. 複素数をあえて使うことで, より便利にしようとしているのである.

†262 [注意] (2.36) に対する解釈と証明は, 書物によって異なることが多い. その意味で, 何か 1 つの方法で証明できればよい. [補足] 複素共役を表す記号は, $\overline{z}$ 以外に, z^* などもある (書物に依存).

たすべき性質 (2.28)(2.29) すなわち $a_n = a_{-n}$ と $b_n = -b_{-n}$ を代入する[†263][†264].

$$(\mathrm{LHS}) = \overline{c_n} \equiv \overline{\frac{a_n - ib_n}{2}} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} \equiv c_{-n} = (\mathrm{RHS}) \tag{2.37}$$

問題 19. [公式導出 (発展)] 複素指数関数に対するつぎの三角関数の直交性を証明せよ (n と m は整数)[†265]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\mathrm{d}x = \delta_{nm} \quad \left(あるいは,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\mathrm{d}x = \delta_{nm} \right) \tag{2.38}$$

問題 20. [公式導出 (発展)] 周期 2π の周期関数の複素 Fourier 係数を与える公式 (2.35) を, 複素 Fourier 級数 (2.34) から直接導出せよ. すなわち, 問題 17 の方法に頼らず, 直交関係式 (2.38) を利用して導け[†266].

問題 21. [複素 Fourier 級数の簡単な例] $\cos x$ の複素 Fourier 級数を求めよ.
[解] Euler の公式 (2.4) によって[†267]

$$\cos x = \frac{1}{2}e^{-ix} + \frac{1}{2}e^{ix} \tag{2.39}$$

である[†268]. この場合, $n = \pm 1$ 以外の項は全てゼロで, 無限級数ではなく, たった 2 項からなる有限項の級数である[†269].

[†263] **[重要 (意義)] 実数値関数の複素 Fourier 級数はもちろん実数**である. われわれが次節 § 2.3 を学び終えたならば, この事実を「当たり前だ」といえる. しかし, その前提はどこにあるのか. それは, **実 Fourier 係数の項番を負値まで拡張する関係 (2.28)(2.29) の成立**に他ならない (実数値関数の実 Fourier 係数は, そもそも, 自然数 n に対して定義されていたことを思い返そう). 複素数としての複素 Fourier 係数 c_n を用いれば, **それほどまでに重要な (2.28)(2.29) を 1 つの式に集約できる**. 2 つの実数を用いるよりも, 1 つの複素数を用いる方が便利極まりない.

[†264] [注意]「実数値関数の ⋯ 」や「複素 Fourier 級数に ⋯ 」といった, くどくて細かな言い回しを必要以上に厳密に感じて, 使うことを恐れてしまうかもしれない. 複素数は, 道具に過ぎず, ゴールでもないが, **複素数を有効に Fourier 級数へと活用し, その先にある Fourier 変換までをも目指す立場からは, 複素数としての係数 c_n の形に整理しておくことは必須**である. 本質が (2.28)(2.29) にあることを知っていればたやすい. 読み流して理解できるほど容易ではないが, 決して難しくはなく, 事実, **式変形はたった 1 行で済んでいる**ことに注目しよう.

[†265] †72 で述べたように, δ_{nm} は Kronecker のデルタ記号である.

[†266] [方針] 実 Fourier 係数の導出 (§ 1.4.2) と同様の手順を用いよ. すなわち, 問題 4 のように, 複素 Fourier 級数 (2.34) の両辺に e^{-imx} を掛けて, 項別積分を実行せよ. また, **複素数に拡張したことで, 計算量が, 実 Fourier 係数の導出の場合よりも著しく軽減される**ことを確かめよ.

[†267] 呆気にとられるかもしれない. つまりは, **Euler の公式も複素 Fourier 級数に他ならない**のである. この意味でも, 複素形の Fourier 級数の重要性が理解できる.

[†268] [注意] 右辺に虚数単位が現れているが, もちろん, 右辺 “全体” は実数である (確かめよ).

[†269] たとえ有限項であっても, Fourier 級数とよんでよい. [補足] 実 Fourier 級数についても, 同様の

問題 22. 問題 21 と同様に, 次式 (複素 Fourier 級数の表式) を証明せよ[†270].

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}(e^{-4ix} - 4e^{-2ix} + 6 - 4e^{2ix} + e^{4ix}) \tag{2.41}$$

問題 23. [**重要・準備**] 以降の計算で多用する次式を示せ (n は任意の整数)[†271].

$$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = \overline{e^{in\pi}} = \cos n\pi = (-1)^n \tag{2.42}$$

[略解] 容易であるが, 自身の手で確かめるべきである[†272].

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i\sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n \tag{2.43}$$

$$e^{-in\pi} = \cos(-n)\pi + i\sin(-n)\pi\,(= \cos n\pi - i\sin n\pi) = (-1)^n \tag{2.44}$$

$$\overline{e^{in\pi}} = \overline{\cos n\pi + i\sin n\pi} = \cos n\pi - i\sin n\pi\,(= e^{-in\pi}) = (-1)^n \tag{2.45}$$

問題 24. [**問題 10 の複素版**] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された実数値の 1 次関数 x を, 周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に周期的に拡張して作られる関数 $f(x)$ の

ことが言える. たとえば, 2 倍角の公式から導かれる次式も, 2 項からなる実 Fourier 級数である:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{2.40}$$

[†270] [ヒント] sin の 4 乗を実数の範囲で計算するのはいささか面倒である. そこで, **Euler の公式を用いて, $\sin x$ を e^{ix} で表現しておけば, 4 乗程度の計算は何ら困難はない**. 実三角関数の公式を用いて, 膨大なべき乗計算を行う労力を割く意味でも, 複素指数関数 e^{ix} の意義と有用性が理解できるだろう. **あえて複素数に拡張することで, 一見ややこしくも感じるが, 計算がはるかに易しくなる**のである. [注意] やはり, 右辺が実数であることを確かめよ.

[†271] [注意] これは, π という特殊な数値 (数字) に対して成立するものであって, $e^{in\pi}$ は, 関数ではなく, n に対する数列である. **関数 (あるいは関数列) e^{inx} と数列 $e^{in\pi}$ を混同してはならない**. [ついでながら] **数値 π と変数** x は, 意外と, うっかり見間違えやすいので軽視しない方がよい.

[†272] [復習] $\cos n\pi = (-1)^n$ と $\sin n\pi = 0$ を思い返す (ここでは n を自然数に限定する必要がない).

複素 Fourier 級数を求めよ．[解] 複素 Fourier 係数 c_n は, (2.35) を用いて[†273][†274],

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\mathrm{d}x = \left[x\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\mathrm{d}x$$
$$= i\frac{\pi}{n}(e^{-in\pi}+e^{in\pi}) \underbrace{+\frac{1}{n^2}(e^{-in\pi}-e^{in\pi})}_{(2.42)\ \text{より消滅}} = i\frac{2(-1)^n\pi}{n} \tag{2.46}$$

となる[†275]．したがって, **本問題の場合, 複素 Fourier 係数 c_n は純虚数**となった[†276]:

$$c_n = i\frac{(-1)^n}{n} \tag{2.47}$$

実 Fourier 係数の場合と同様に, 分母に n が現れたので, $n=0$ の場合の c_0 を別途計算せねばならない[†277]．そのために用いる公式は, (2.35) に $n=0$ すなわち $e^{0x}=e^0=1$ を代入した次式である:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \tag{2.48}$$

本問においては, 奇関数の周期 2π での積分だから, 速やかに $c_0=0$ がわかる:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = 0 \tag{2.49}$$

求めた係数 c_n を用いて, 複素 Fourier 級数は, 以下で与えられる:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = i\underbrace{\sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{\infty}}_{n=0\ \text{を除外}}\frac{(-1)^n}{n}e^{inx} \tag{2.50}$$

[†273] **[重要]** 周期的拡張にともなって, 関数の定義域が, $[-\pi,\pi]$ から, x 軸全体すなわち $(-\infty,\infty)$ となるのだから, 積分範囲も $(-\infty,\infty)$ に変わると安易に判断するのは, 典型的な誤答である．なぜならば, Fourier 係数を与える公式は, 三角関数の直交関係式, すなわち周期 2π での積分を根拠に導かれているからである．このように, “応用”数学といっても, **最低一度は公式を導いておかねば致命傷に至る (まさに, 公式の適用範囲を超えて用いるという最悪の事態である)**．逆にいえば, それさえ怠らなければ, このような勘違いは自ら正すことが可能だろう．

[†274] [コツ] やはり, 両辺に 2π をかけておけば, 記述量が軽減できる．

[†275] $-1/i=-i/i^2=i$ などの基本的な計算を怠らないこと．

[†276] [重要] これは, $f(x)$ が**奇関数であるがゆえに**である．
[基礎] 純虚数とは, 実部がゼロの複素数をいう．複素数と純虚数を同一視する者が見受けられる．

[†277] **[重要]** すなわち, $-\infty<n\le 1$, $n=0$, $1\le n<\infty$ の**計 3 通り**を考えるのである．**実 Fourier 係数とは異なり, n が負値をとる**ことに注意を要する．

実 Fourier 級数の場合と異なり, $n \neq 0$ に注意せねばならない[†278][†279].

さて, 具体的に 6 項程度を書きだしてみよう:

$$f(x) = i\left[-\underbrace{(e^{ix} - e^{-ix})}_{\text{対称}} + \underbrace{\frac{1}{2}(e^{2ix} - e^{-2ix})}_{\text{対称}} - \underbrace{\frac{1}{3}(e^{3ix} - e^{-3ix})}_{\text{対称}} + \cdots\right] \tag{2.51}$$

このように, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ と対称的に書きならべておくことが重要である[†280]. 実 Fourier 級数と同様に, 係数の絶対値の減少もわかる.

問題 25. [**複素数への拡張によって計算量はどれほど低減されたか**] 問題 24 で求めた複素 Fourier 係数 c_n を, $f(x)$ の定積分から求める公式 (2.35) に頼ることなく, 実 Fourier 係数 a_n と b_n を用いて c_n を定義する式 (2.32) から再導出せよ (すなわち, 実三角関数の面倒な積分計算を行う). 結果が (2.47) と等しいことを確かめよ[†281].

問題 26. [**問題 11 の複素版**] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された実数値関数 $|x|$ を, 周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に周期的に拡張して作られる関数 $f(x)$ の複素

[†278] [復習] そもそも, 実 Fourier 級数における n とは, 自然数 n であって, $n = 0$ を考える必要すらなかった. もちろん, **初項は a_0 だが, これは n に含めずに別途計算するものであって, あくまで $n \geq 1$ であった**.

[†279] [**重要 (注意)**] $n = 0$ の場合は $c_0 = 0$ と求まったので, 総和記号下に $n \neq 0$ の注意書きは不要ではないかと思うかもしれない. **これは必須である**. 複素 Fourier 級数 (2.34) の総和の表記は, 「$-\infty$ から ∞ まで 1 ずつ足し合わせる」以上を, 残念ながら指示しない. 総和記号を使いながら, 第 0 項 $n = 0$ の除去の明示は, (基本的には) できない. そこで, (2.50) のように, **仕方なく総和記号の下などに** $(n \neq 0)$ **と書くよりない**. ここが総和記号の表現の泣き所なのだが, (2.51) のように具体的に項を書き下せば, この悩みからは解放される.

[†280] 以下のように整理した. こう書けば後で役立つのである:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cdots + (\text{第} -2\text{ 項}) + (\text{第} -1\text{ 項}) + (\text{第 } 0\text{ 項}) + (\text{第 } 1\text{ 項}) + (\text{第 } 2\text{ 項}) + \cdots \\ &= (\text{第 } 0\text{ 項}) + (\text{第 } 1\text{ 項} + \text{第} -1\text{ 項}) + (\text{第 } 2\text{ 項} + \text{第} -2\text{ 項}) + \cdots \end{aligned}$$

今の場合は第 0 項がゼロとなったが, 一般にはゼロとはならない.

[†281] [意図と方針] 問題 10 ですでに導いた a_n と b_n を, (2.32) に代入すればよい. そこで, a_n と b_n を求めるための計算量を振り返ってみよ. その結果, c_n を求める計算法として, (2.35) を用いた場合, (2.32) を用いた場合, どちらが簡便か, 容易か, 有用かなどを比較検討してみよ.

Fourier 級数を求めよ. [解] まずは複素 Fourier 係数 c_n を求める[†282]:

$$
\begin{aligned}
2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{0} -xe^{-inx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} xe^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2(-1)^n-2}{n^2} + \frac{\pi(-1)^n}{in} - \frac{\pi(-1)^n}{in} = \frac{2(-1)^n-2}{n^2} \\
\iff \quad c_n &= \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

やはり, 分母に n が現れた. そこで, c_0 は別に計算する[†283]:

$$
2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{0} -x\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi^2 \quad \iff \quad c_0 = \frac{\pi}{2} \tag{2.53}
$$

本問題の場合は, 係数 c_0 と c_n はともに実数となった[†284]. 複素 Fourier 級数は

$$
\begin{aligned}
f(x) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}}_{(n\neq 0)\ \text{の記載不要}} &= c_0 + \underbrace{\sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{\infty} c_n e^{inx}}_{(n\neq 0)\ \text{の記載必要!!}} \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{\infty} \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2} e^{inx}
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

である. ここで終えてもよいが, さらに整理できそうに思える—— 最右辺第 2 項の分子は, n が奇数の場合 $(n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots)$ のみ, -2 という値をもつため, **新しい整数** $k\,(= 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を用いて[†285], $n = 2k-1$ とおくのである[†286][†287]:

$$
f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2} e^{i(2k-1)x} \tag{2.55}
$$

---

†282 [基礎・重要] x は奇関数であったが, $|x|$ は偶関数であること (示してみよ) に注意を要する.

†283 偶関数の積分公式を用いるとより簡便である.

†284 [復習] 定義式 (2.32) より明らかに, **複素 Fourier 係数は一般には複素数**である.

†285 [注意] **複素 Fourier 級数の場合は**, 負の整数 $k < 0$ も考えるので, k **は自然数ではない**.

†286 [確かめよ] $k = -2$ のとき $n = -5$, $k = -1$ のとき $n = -3$, $k = 0$ のとき $n = -1$, $k = 1$ のとき $n = 1$, $k = 2$ のとき $n = 3$ などとなり, きちんと奇数の n の項のみを表現できている. 数字を見ると, $\pm k$ **と** $\pm n$ **が対称ではない**ことに注意を要する. しかしこれは, 単なるおきかえによるものであって, 本質的問題ではない. [補足] もちろん, $n = 2k+1$ などと置いてもよい.

†287 [総和記号] $n = 0$ **の場合もきちんと除外できており,** $k = 0$ **でも発散しない. ゆえに,** $k \neq 0$ **といった注意書きはもちろん不要**である ($k = 0$ を含む).

具体的に 5 項を書き下してみよう[†288]:

$$f(x) = \frac{\pi}{2}e^0 - \frac{2}{\pi}\underbrace{(e^{ix} + e^{-ix})}_{k=1,\,0} - \frac{2}{9\pi}\underbrace{(e^{3ix} + e^{-3ix})}_{k=2,\,-1} - \underbrace{\cdots\cdots}_{k=3,\,-2,\,\cdots} \tag{2.56}$$

やはり, $\pm n\,(= \pm(2k-1))$ での対称性, および, 係数の絶対値の減少が観察される.

問題 27. [係数 c_n は実数か純虚数か] 周期 2π の実数値関数 $f(x)$ の複素 Fourier 係数 c_n を考える. $f(x)$ が偶関数ならば c_n は実数となる. $f(x)$ が奇関数ならば c_n は純虚数となる. これらを証明せよ[†289].

[略解] c_n を与える (2.35) の e^{inx} をばらす:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{\cos nx}_{\text{偶}}\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{\sin nx}_{\text{奇}}\,\mathrm{d}x \tag{2.57}$$

(i) $f(x)$ が偶関数ならば, 虚部の被積分関数は奇関数ゆえにゼロとなり,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\left(= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \tag{2.58}$$

c_n は実数となる[†290][†291]. (ii) $f(x)$ が奇関数ならば, 実部の被積分関数は奇関数ゆえにゼロとなり, c_n は純虚数となる[†292]:

$$c_n = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\left(= \frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \tag{2.60}$$

[†288] 以下のように整理した:

$$\begin{aligned} &= \cdots + (\text{第} -3\,\text{項}) + (\text{第} -2\,\text{項}) + (\text{第} -1\,\text{項}) + (\text{第}\,0\,\text{項}) + (\text{第}\,1\,\text{項}) + (\text{第}\,2\,\text{項}) + (\text{第}\,3\,\text{項}) + \cdots \\ &= (\text{第}\,0\,\text{項}) + (\text{第}\,1\,\text{項} + \text{第} -1\,\text{項}) + (\text{第}\,3\,\text{項} + \text{第} -3\,\text{項}) + \cdots \end{aligned}$$

[†289] [意図] 問題 26 で前者を, 問題 24 で後者を, それぞれ既に確認している. このような具体例から一般化を目指す出題である.

[†290] 最右辺は, 偶関数の y 軸対称区間における定積分公式 (1.27) にしたがった.

[†291] 詳細に書いておこう:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数}) \times (\text{偶関数})\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数}) \times (\text{奇関数})\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数})\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{奇関数})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数})\,\mathrm{d}x = (\text{実数}) \end{aligned} \tag{2.59}$$

[†292] [用語] 虚数, 純虚数, 複素数は異なる. いまさらではあるが注意せよ.

§ 2.3　複素 Fourier 級数 “から” 実 Fourier 級数への帰着

§ 2.2.1 では, 実数値関数の実 Fourier 級数 (1.35) を, 複素 Fourier 級数 (2.34) へと書き換えることに成功した. したがって, **複素 Fourier 級数から出発して, 実 Fourier 級数に戻る**ことは[†293], 当然という言葉で済ませてよい考え方もあるだろう.

しかしながら, その計算過程には, 重要な考え方や計算テクニックを数多く含むので, 問題の形式で確かめておこう[†294].

問題 28. 周期 2π の実数値関数 $f(x)$ の複素 Fourier 級数から出発して, 実 Fourier 級数に帰着させよ. すなわち, 次の等号成立を示せ[†295]:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \underbrace{=}_{\text{題意}} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.61}$$

[証明] c_n の定義式 (2.32) と Euler の公式 (2.4) を複素 Fourier 級数に代入し, 分配法則を用いて実部と虚部にわける[†296]:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n}_{\text{複}} \underbrace{e^{inx}}_{\text{複}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\overbrace{a_n}^{\text{実}} - i \overbrace{b_n}^{\text{実}}}{2} (\underbrace{\cos nx}_{\text{実}} + i \underbrace{\sin nx}_{\text{実}}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)}_{\text{(Re)}} + i \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)}_{\text{(Im)}}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

[†293] すなわち, (i) 虚部が消えて, (ii) 総和の範囲が正の範囲に戻る——ことをいう.

[†294] [補足] § 2.2.1 で, 実 Fourier 級数から出発したのは, 単純に計算が容易であるからでもあった. 実は, 本節の論法で, 複素 Fourier 級数を導入する書物の方が多いように見受けられる. すなわち, 複素 Fourier 級数を既知として, 実 Fourier 級数との関係を探る手法である.

[†295] 実 Fourier 級数から複素 Fourier 級数への変形は解決済みである. そうではなく, **複素 Fourier 級数から実 Fourier 級数への変形, すなわち, 等号を “左から右に” 示す**ことが題意である.

[†296] **[重要・式変形方針]** (i) 1 行目から 2 行目: c_n と e^{inx} はともに複素数である. これらを**「実数に戻したい」**という動機を思い返す. そこで, 複素数 c_n と e^{inx} を実数 a_n, b_n, $\cos nx$, $\sin nx$ と関係づける式を代入した. (ii) 2 行目から 3 行目: **「虚部は消えるはず」**という動機を思い返す. だからこそ, 実部と虚部に分割すべきという発想に至る. (i) も (ii) も, 動機付けを言われれば, 当たり前の変形に思えるだろうが, 果たして, ヒントなしに独力で (試験当日に) 可能だろうか.

(準備 1) 三角関数の偶関数・奇関数に関する基礎関係 (1.21):

$$\cos nx = \cos(-n)x, \quad \sin nx = -\sin(-n)x \tag{2.63}$$

(準備 2) 実 Fourier 係数を負の整数項にまで拡張した関係 (2.28)(2.29)[†297]:

$$a_n = a_{-n}, \quad b_n = -b_{-n}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.64}$$

(準備 3) $-\infty$ から ∞ までの総和記号を, 形式的に 3 項に分割する[†298]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=0}^{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \tag{2.65}$$

$f(x)$ **は実数値関数なのだから, 当然, 虚部は消える**はずである. この予想を基に, 虚部をまず変形してみよう. 虚部 (Im) において, $i/2$ の係数部分は,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) = \left(\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}}_{\text{(iii)}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{0}}_{\text{(i)}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}}_{\text{(ii)}} \right) (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{2.66}$$

と 3 項に分割できる (総和が 3 通り). それぞれを見てゆく:

(i) $n = 0$ のときは, $\sin 0x = 0$ かつ $b_0 = 0$ ゆえに[†299], 明らかにゼロとなる.

(ii) $n \geq 1$ の場合は, ひとまず保留することとする:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{2.67}$$

[†297] これは, 実質的に (2.63) と等価といえる (理由を考えよ).

[†298] [注意] もちろん, これは解説のための形式的な数式である. 和をとる対象もなしに, 総和記号だけが単独で存在してはならない.

[†299] $b_0 = 0$ は重要である. 当たり前と軽視すべきではない. **実 Fourier 係数の段階では,** b_n **は, そもそも, 自然数** n **に限定されていた**ことにまで遡って, 丁寧に振り返ってほしい.

(iii) $n \leq -1$ の場合が重要である. **慎重に変形を進める**:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \underbrace{[-a_{-n}\sin(-n)x + b_{-n}\cos(-n)x]}_{(2.63)(2.64)\text{ を利用}}$$
$$= \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty}(-a_\ell \sin \ell x + b_\ell \cos \ell x)}_{\text{見易さのため } -n\equiv\ell \text{ とおいた}}$$
$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)}_{\text{もう一度 } \ell\equiv n \text{ とおいた}} \tag{2.68}$$

2 行目, 3 行目では, $\ell = -n$ のおきかえに伴い[†300], 総和の範囲が正値 $1 \leq n < \infty$ となった[†301].

(i)(ii)(iii) をまとめて (2.66) に戻すと, 虚部 (Im) は, 綺麗さっぱり消滅する:

$$\frac{i}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) + 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)\right] = 0 \tag{2.69}$$

虚部が消えたことで仕事の 7 割は終わったが, まだ安心してはならない. **実部の総和の範囲が実 Fourier 級数と異なるし, それゆえに, 総和記号の中に隠れている初項 $a_0/2$ を抜き取る作業**も残っている.

しかし, その式変形の処方箋は, 虚部の変形と何ら変わらない. 一気に実行し

†300 [念のため] 最後に ℓ を n とおきかえる操作には, 何の問題もない. 記号 n の役割は, 単に項の番号を明示する以上ではないからである. **わかりにくければ, あるいは, 違和感を感じるならば, ℓ とも n とも違う記号, たとえば m を新しく導入すればよい**.

†301 **[確かめよ]** 総和の範囲が, $-\infty < n \leq -1$ から $1 \leq \ell < \infty$ に変換された. $\ell = -n$ とおき, -1 を掛けただけである. 脳内で出来る者も, 一度は書き下してやっておくべきである (これを軽視すると, 案外, 本番で戸惑う).

よう:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}+\sum_{n=0}^{0}+\sum_{n=1}^{\infty}\right)(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\\
&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}[a_{-n}\cos(-n)x-b_{-n}\{-\sin(-n)x\}]\underbrace{+a_0}_{\text{残る!!}}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\\
&=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\left[\underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty}(a_\ell\cos\ell x+b_\ell\sin\ell x)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)}_{\text{同じものが 2 つ}\implies n\text{ か }\ell\text{に統一}}\right]\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

したがって, 複素 Fourier 級数は実 Fourier 級数に帰着し, 題意は示された[†302][†303].

問題 29. [(計算例) 実 Fourier 級数への帰着を確認]

問題 24 で求めた複素 Fourier 級数 (2.50) を振り返ろう. (2.50) と, 実 Fourier 級数 (1.64) は, 複素数を用いるか否かの違いこそあれど, 同じ実数値関数 x の三角級数展開なのだから, 等価に違いない. すなわち, (2.50) の虚部は消えて, 総和の範囲も正に整理され, (2.50) は (1.64) に帰着せねばならない. これを確かめよ.

[証明] Euler の公式 (2.4) を用いて, ie^{inx} を実部と虚部にわけると,

$$
f(x)=-\sum_{n=-\infty\,(n\neq0)}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\underbrace{+i\sum_{n=-\infty\,(n\neq0)}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx}_{\text{消えるはず}}
\tag{2.71}
$$

負の n の総和を正の n の総和に取り込むべく, 総和記号を分割する[†304]:

$$
\sum_{n=-\infty\,(n\neq0)}^{\infty}=\sum_{n=-\infty}^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}
\tag{2.72}
$$

---

†302 [2 行目から 3 行目に至る式変形] $a_0\cos 0x+b_0\sin 0x=a_0$ と, a_0 **のみ残ることに注意せよ**.

†303 本問題の要点は以下の 2 点に集約される: (i) 虚部の消去, (ii) **負の総和を正の総和に取り込む**.

†304 いまは, $n\neq0$ なので, もちろん $n=0$ は対象外である. **総和記号は 2 通りにしか分割されない**.

以降の式変形の処方箋は, 問題 28 と同じである. まず, 虚部を次のように消滅させよう[†305]:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\right)\frac{(-1)^n}{n}\cos nx &= \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{-\ell}}{-\ell}\cos(-\ell)x}_{n=-\ell\ \text{とおいた}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx \\
&= -\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell}\cos\ell x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

(2.73) を理解できれば, 実部の総和の範囲の整理など, たやすい[†306]:

$$
\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{-\ell}}{-\ell}\sin(-\ell)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx \tag{2.74}
$$

これら (2.73)(2.74) を, (2.71) に戻すと, 実 Fourier 級数 (1.64) に帰着する:

$$
f(x) = \underbrace{-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx}_{\text{このままでもよいが}\cdots} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx}_{\text{(1.64) の形に整理}\implies\text{スッキリ}} \tag{2.75}
$$

問題 30. 問題 26 で求めた複素 Fourier 級数 (2.54) が, 問題 11 で求めた実 Fourier 級数 (1.67) と一致することを示せ[†307].

[†305] **[基礎]** 整数 ℓ に対して成立する $(-1)^{\ell}=(-1)^{-\ell}$ を用いた. [証明] 両辺に $(-1)^{\ell}$ を掛ければ, すぐさまこの等号成立が理解できる. ℓ に適当な整数を当てはめても, 簡便に理解できるだろう.

[†306] 奇関数の定義 $\sin\ell x=-\sin(-\ell)x$ を用いるに過ぎない.

[†307] [処方箋 1] 実は, (2.55) から実部と虚部にばらすのは面倒である. n を k におきかえる前の **(2.54) から出発してみよ**. 問題 29 と同様に, 虚部がゼロとなることを示した後に, 実部を n の偶奇にしたがって場合わけして, k を導入する. (注意) もし, (2.55) からばらそうとすると, 上手くゆかないはずである. しかし, これは決して誤りではない. 級数の表現は人それぞれだからである.
[処方箋 2] 第 0 項すなわち $n=0$ の場合を考える必要があることに注意せよ.

問題 31. [(発展) 複素数値関数の複素 Fourier 級数]†308

区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された**複素数値関数** $e^{ix/2}$ を考える†309, これが周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に拡張して作られる複素数値関数を $f(x)$ とおく.

(i) $f(x)$ の複素 Fourier 係数が実数となることを示し, 以下の複素 Fourier 級数を導き†310, 具体的に 5 項程度を書き下せ†311†312:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-2n} e^{inx} \tag{2.77}$$

(ii) (2.77) を利用し, 実数値関数 $\cos(x/2)$ と $\sin(x/2)$ の実 Fourier 級数を導け†313†314:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1-4n^2} \cos nx\right] \tag{2.79}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n(-1)^n}{1-4n^2} \sin nx \tag{2.80}$$

---

†308 内容はやや発展的であるが, 計算自体はたやすい.

†309 [表記] このように指数部が長い場合は, $\exp(ix/2)$ のように書くことが多い. $\exp\theta = e^\theta$ である. ただし, 後者の場合は, 指数は上付き添え字であって, 小さく書く必要がある.

†310 [重要] この場合は, 複素数値関数の複素 Fourier 級数であるので, 複素 Fourier 級数も複素数に他ならない. すなわち, 級数の虚部はゼロとならない.

†311 **実数値関数に対して導いた公式 (2.35) は複素数値関数に対しても適用できる**. これを示せ. [ヒント] 複素数値関数といっても, 実部と虚部はそれぞれ実数値関数に他ならない. すると ⋯

†312 [解の一部] やはり, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ と整理して並べることが重要である:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \left(\frac{2}{\pi}e^{ix} - \frac{2}{3\pi}e^{-ix}\right) + \left(\frac{2}{-3\pi}e^{2ix} + \frac{2}{5\pi}e^{-2ix}\right) \underbrace{+\cdots}_{\text{忘れない}} \tag{2.76}$$

†313 [発展] 複素数の概念に頼ることなく (すなわち, 複素 Fourier 係数 (2.35) に頼ることなく), これらを導け. 実 Fourier 係数 (1.32)(1.33) にしたがって, 面倒な三角関数の積分計算を実行せよ. その結果, 複素 Fourier 級数を利用する場合と利用しない場合で, 計算量や計算に要した時間を比較せよ.

†314 [ヒント] 総和の範囲を自然数 n に整える. やはり, 以下のように総和記号を分解すればよい:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\right) a_n + a_0 = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\ell \equiv -n) \tag{2.78}$$

§ 3　Fourier 級数の性質

Fourier 級数には, いくつかの重要な数学的性質がある. ここでは, 物理あるいは工学のための応用数学という観点から重要かつ主要な性質を精選し, 数学的厳密性と応用のバランスに留意しながら述べる†315.

§ 3.1　Fourier 級数の収束定理

これまで, 与えられた関数がその Fourier 級数に収束するのかは問題としなかった. § 1.4 の初っ端で宣言したように, 大胆にも, 等号で結んできた.

収束性の一般的議論に現れる用語は難解かつ抽象的である反面, 知っておくべき**事実はあまりにも単純極まりない**. そこで, 厳密さを犠牲にしてでも, 先におおまかな結論を知ることに意味がある†316:

> $f(x)$ が **1 階**微分可能で, その不連続点が**無限個で "ない"** ならば, Fourier 級数は $f(x)$ に収束する. ただし, 不連続点においては, 真ん中 (右極限値と左極限値の平均値) に収束する.

つまりは, **大雑把に言って収束し, 注意すべきも不連続点だけ**といえる. Fourier 級数の懐は深く, 不連続点の存在すらも許容してくれて, 「平均値」というわかりやすい値に収束してくれるのである†317.

理工学に現れる関数のほぼ全てが, この条件を満たしている†318. したがって, Fourier 級数に展開可能で, それは元の関数に収束する. したがって, なんとなくの理解で済ませたければここまででもよいのだが, 数学的に厳密に知りたければ, 以下で詳細に学ぼう†319.

---

†315 実 Fourier 級数で議論を進めるが, 複素 Fourier 級数についても同様であるばかりでなく, 複素形の方が数式表現も簡潔となる. しかしながら, 複素数にどっぷりと浸かることを危惧する意味や, 複素形を不得手とする感想が多い意味で, 本資料では避ける.

†316 このような態度で臨むことが許されるのは, Fourier 級数の特権といえる (Taylor 級数の議論では許されない). とにかく, 収束してしまうからである.

†317 これは驚くべき事実である. **不連続点が 1 つでも存在すれば, 微分不可能であるがゆえに, Taylor 級数からは門前払い**である

†318 「工学で現れる関数のほとんどが ··· だから」と, 一見やさしい前置きをしてきたが, これは決して "難しいことは理解しなくてもよい" ことを意味しない. 以下の事項を理解するためには, さまざまな理屈への理解が必要不可欠であることに気づく. だからこそ, これまでも諸公式を丁寧に導いてきたのである. 「工学では ··· 」あるいは「"応用" 数学だから ··· 」などといって, 公式に数字を当てはめる操作だけでは, 数学は決して習得できない.

†319 そもそも, 不連続点の取り扱いとは, 泥臭い数学 (応用数学) であって, 純粋数学者ではなくわれ

§ 3.1.1　区分的に連続 (piecewise continuous)

具体的な数式が現れず, **高級感を漂わせる抽象的表現が続くが, 困難はない**[†320].

区間 $a \leq x \leq b$ で定義された関数 $f(x)$ が「区分的に連続」であるとは[†321], 以下を満たすことをいう:

(i) 有限個の不連続点しか持たない[†322].

(ii) それぞれの不連続点において**発散しない**. すなわち, 右側からの極限値と左側からの極限値が存在して[†323], ともに有限の値をとる[†324][†325].

§ 3.1.2　区分的に滑らか (piecewise smooth)

「$f(x)$ が区分的に滑らか」であるとは[†326], $f(x)$ **とその 1 階導関数** $f'(x)$ **が, ともに, 区分的に連続**であることをいう[†327]. $f(x)$ が区分的に滑らかならば, $f(x)$

われの主対象である. **工学で現れる関数に不連続点はつきもの**だからである (電気信号など).

[†320] 多数の目新しい用語が現れるが, § 3.1 では**用語とその意味を暗記する必要はない**. 試験では意味を与える (もちろん, 知っておくに越したことはない).

[†321] [**(基礎) 連続関数**] ある区間 $[a, b]$ において, 1 本のつながった曲線で表現される関数を連続関数という (x, e^x, $\sin x$ など). ただし, この区間で無限大に発散する関数は連続関数とはいわない ($\tan x$ など).

[†322] [噛み砕く] 有限個とは数えられる個数を指し, ものすごくざっくりいえば「たかだか数個」である. 有限個の対義語は無数 (無限大個) である. 数学の世界ならば「無限大」という概念は許されるが, われわれが目指す実際の応用において, 無数の不連続点を持つような関数に (基本的に) 遭遇するはずもない. したがって, 何の疑いもなく, (i) は満たされる.

[†323] [極限値] たとえば, $f(x)$ の不連続点の 1 つを $x = x_0$ とおこう. 正の方向すなわち右側からの極限値 (右極限値) $f(x_0 - 0)$ と, 負の方向すなわち左側からの極限値 (左極限値) $f(x_0 + 0)$ は, 正の数 h を用いて, それぞれ,

$$f(x_0 - 0) \equiv \lim_{h \to 0} f(x_0 - h), \quad f(x_0 + 0) \equiv \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) \tag{3.1}$$

と定義される. [注意] $h > 0$ を保ちながら h がゼロへと近づく.

[†324] [噛み砕く] 有限値をとるとは, その名のとおり, 発散しなければよいので,

$$|f(x_0 - 0)| < \infty, \quad |f(x_0 + 0)| < \infty \tag{3.2}$$

と数式表現される. やはり, 無限大の概念に (基本的に) 遭遇しないわれわれからは縁遠い.

[†325] [注意] 収束性の議論は, †323†324 のような数式に頼るまでもなく議論することも可能である. それほどまでに, 用語の高級感とは裏腹に, 容易なのである. この意味で脚注に記した.

[†326] [**(基礎) 滑らかな関数**] 関数とその 1 階導関数がともに連続な関数を意味する.

[†327] [用語] これを Dirichlet (ディリクレ) 条件という. はじめて聞いた人名と想像するが, 今後, 諸君は, 後半の講義をはじめとして, Dirichlet には至る所で遭遇することとなる.

の Fourier 級数は, 以下のように収束する:

(i) 不連続な点 x_0 では, **右極限値と左極限値の平均値に収束**する:

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \tag{3.3}$$

(ii) それ以外の連続な点 x では, $f(x)$ に収束する.

これも, 驚くほどに易しい条件である. Fourier 級数は, **不連続点の存在を許容してくれる**のみならず, 大雑把にいえば, **たった 1 階だけ微分できれば収束してくれる**のである[†328][†329].

§ 3.1.3 まとめ——Taylor 級数との比較——

Fourier 級数の収束性への理解を深めた結果, もはや,「理工学に現れるほとんどの関数の場合は … 」などと振りかぶるまでもない. Fourier 級数とは, 元の関数にきわめて収束しやすく, それゆえに工学に利用しやすい. これを実感するには, Taylor 級数に対する厳しい収束条件と比較することが有効だろう[†330][†331]. **Taylor 級数よりも, Fourier 級数の方が, はるかに収束しやすい**[†332].

最後に, ここでの定義を用いて収束定理を厳密に述べ直しておく[†333]:

[†328] [例] とがっていてもよい. [問] 具体的な関数を描いて確かめよ.

[†329] Fourier 級数の収束性の易しさは「微分に関する制約が極めて弱い」からといえる. 三角関数の積分だけで決まるのである.

[†330] [基礎] Taylor 級数は導関数 (微分) に支配される. すなわち, (i) 不連続点があっては門前払いであるし, (ii) **無限階の**微分可能性を前提とするのみならず, (iii) (i) と (ii) が満たされても, なお, 収束するとは限らない.

[†331] [注意] 果たして, 現実に, Taylor 展開はどこまで使えるのだろうかと懐疑的になるだろう. 決して, Taylor 級数を非難したいわけではなくて, 実用上は Taylor 級数は有限の項までで (すなわち有限階数の導関数までで) 打ち切る. そして, Fourier 級数には, 周期関数という大前提があることも忘れてはならない. ここでの論点は, Taylor 級数と Fourier 級数の是非ではなくて,「収束性に関する条件の厳しさ」以上ではない.

[†332] [**重要**] 事実, これまでの多数の例題において, 不連続関数の Fourier 係数を, 積分計算によって, 当たり前のごとく求めてきたではないか. つまり, 関数がたかだか数個の不連続点を有しても, **積分範囲を分割して計算できる**のである. この意味で, **積分とは便利**なのである. そもそも, **Fourier 級数が不連続点を許容してくれるのは「微分ではなく積分に支配される級数だから」**である. 積分の操作自体が不連続性を許してくれるのである. [**そもそも**] 微分と積分の定義は独立である. 微分と積分が互いに逆の演算であることは結果である (**微分積分学の基本定理**: fundamental theorem of calculus).

[†333] [発展] 本資料では, 収束性については, 証明よりも事実が最重要であるとみなす立場をとった.「区分的に滑らかな関数が Fourier 級数に展開可能であること」の証明は割愛する. また, 収束性

Fourier 級数の収束定理

周期関数 $f(x)$ が区分的に滑らかであるならば, $f(x)$ の Fourier 級数は, (i) 不連続点以外では収束し, 級数の和は $f(x)$ に等しい; (ii) 不連続点においては, 右極限値と左極限値の平均値に収束する.

問題 32. $y = \tan x$ は区分的に連続ではない. これを説明せよ.

問題 33. $y = \sqrt{|x|}$ は, 連続ではあるが, なめらかではない. これを説明せよ.

基礎 9. § 1.5 と § 2.2.3 で例示した全ての関数について, $f(x)$ のグラフを描き, 1 階導関数 $f'(x)$ を求め, たしかに, 区分的に滑らかであることを確認せよ.

§ 3.2　項別微分と項別積分

「項別微分は危険だが, 項別積分は許される」に集約される. 理由を考える.

以下では, 表記の簡潔さのために, 「区間 $[-\pi, \pi)$ で定義される実数値関数 $f_0(x)$ を周期 2π の周期関数となるように拡張された関数 $f(x)$」を, 単に「$f_0(x)$ を 2π で周期的拡張した関数 $f(x)$」とかく[†334]. $f(x)$ の実 Fourier 級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.35}$$

§ 3.2.1　項別微分すると痛い目を見る

x を 2π で周期的拡張した関数の Fourier 級数は次式で与えられた (問題 10):

$$x = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots \tag{3.4}$$

試験において「定数関数 1 を 2π で周期的拡張した関数の Fourier 級数を求めよ」と問われたとする[†335]. これまでの問題のように, 面倒な定積分をとおして Fourier

---

に関連する重要事項のいくつかも述べなかった. [発展]「一様収束と平均収束」について, 「項別積分と項別微分の可能性」から調べてみよ.

[†334] 「試験においても, このような長い表現, 多数の仮定, そして前置きをかかねばならないのか」と思うかもしれない. 試験では, 表現を指示する, あるいは, 問題文で与えるので, 現時点において, どこまで書かねばならないかということは気にする必要はない. ただし, **何を仮定しているのかという意識は必要不可欠**である (これを見失うと, 高校レベルの三角関数の微積分でしかなく, 応用など途方もない).

[†335] この場合, 周期的に拡張すると, 全ての x に対して $f(x) = 1$ だから, その Fourier 係数は $a_0 = 2$ で $a_n = b_n = 0$ という特殊な例である.

係数を計算せねばならないだろうか．そんなことはない．**1 次関数 x^1 を微分すれば定数関数 $x^0 = 1$ になるから**である．そこで, 既知の Fourier 級数をうまく利用すれば, さまざまな Fourier 級数を効率よく求めることができそうな予感がする．

つまりは, (3.4) において, **「まずは x に関する微分演算を行い, つぎに n に関する総和をとる」という項別微分**が許されるならば, x の Fourier 級数の両辺を微分した結果は, 1 の Fourier 級数に他ならないはずである．実際に, (3.4) の両辺を x で項別微分すると, 次式をうる:

$$1 = 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots) \tag{3.5}$$

これは収束するだろうか．たとえば, 連続点 $x = 0$ を代入すると, 右辺は,

$$(\text{RHS}) = 2(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots) \tag{3.6}$$

となり, **左辺の 1 には決して収束しないという予想外の結果**となった．

§ 3.1 の収束定理に立ち戻って考え直してみる．周期的に拡張された定数関数 1 は区分的になめらかであるから[†336], 連続点 $x = 0$ においては収束するはずであるし, 収束定理を満たしている．結局のところ, 原因は, **項別微分の仮定が誤りであったとしか思えない**.

ここで一般論に移る．$f(x)$ の Fourier 級数について, やはり項別微分が許されると仮定して, 両辺を x で微分すると,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n)(a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{3.7}$$

となる[†337]．原因はもはや一目瞭然となった．**項別微分の演算によって, 係数に n がかかる**ことに注意せねばならなかったのである．大きな n に対して収束するはずがないではないか[†338]．これによって, 収束性の条件は次のように厳しくなる[†339]:

[†336] 1 を微分するとゼロであるが, 1 もゼロも区分的に連続である (確かめよ)．したがって, 1 は区分的になめらかであるといえる．

[†337] やはり, 実 Fourier 級数だと, 符号の反転や, サインとコサインの反転への注意が煩わしい．複素形に不慣れである意味で, 本節は実数で書いているが, 余力のある者は複素形に書きなおしてみるとよい．

[†338] 収束性が悪くなるばかりか, 無限級数の項の数を多くとると, すなわち n を ∞ に近づける極限において, 発散する危険性すら想定される．

[†339] 有限個の部分和ならば, 項別微分は許される (証明略).

項別微分が許される条件 (証明略/**記憶不要**)

$f(x)$ **が連続**かつ $f'(x)$ が区分的に滑らかならば, 項別微分が許される.

これを覚える必要はない[†340]. それでも敢えて書いた理由は, **「Fourier 級数の収束条件よりも厳しくなった」**ことを実感してもらうためである. 注目すべきは, 項別微分は不連続点の存在を許してくれないこと, すなわち, **不連続関数をも無限級数に展開可能という, Fourier 級数の最大の特長を自己否定**してしまう点にある[†341].

そのように批判される項別微分であっても, もちろん, これが許される条件さえ満たしておれば役立つこともあるので, 一例を見ておこう:

問題 34. 関数 $|x|$ を周期 2π で周期的拡張した関数 $f(x)$ は, 項別微分が可能である[†342]. $f(x)$ の実 Fourier 級数の両辺を項別微分すれば, すでに問題 6 で求めた関数 $|1|$ の Fourier 級数 (1.60) と一致するはずである. これを示せ.

§ 3.2.2　項別積分は賢いのである

項別積分ならばどうか. 真逆である. 積分の演算によって, $1/n$ が係数に現れるがゆえに, **急激に収束する**. 大きな n を想像すれば, **項別微分は収束性を弱めるが, 項別積分は収束性を強める**ことがわかる. それゆえ, 項別積分は, Fourier 級数を求めるための有用な手段となることが期待される.

項別積分が許される条件 (証明略)

$f(x)$ が区分的に連続ならば, (それだけで) 項別積分が許される.

これを読めば項別積分の価値は明白である. 決して, 本条件の証明や, “連続” や “区分的に” などといった細部に気を留めてほしいのではなく, むしろ, **「Fourier 級数の収束条件よりも緩くなった」**ことに驚いてほしいのである[†343].

実際の例をとおして, 項別積分の強力さを実感しよう.

[†340] 項別微分など (ふつうは) 使えないし, 使わない方がよいからである.

[†341] [まとめ] 収束条件は, $f(x)$ と $f'(x)$ が区分的になめらかであることであった. 「区分的に」という堅い表現は, いうなれば, 不連続点の存在を許容するための前置きであった. しかしながら, 項別微分のために, $f(x)$ が連続関数であることを課されては, これまで Fourier 級数に展開してきた関数を思い起こしても, 少なくとも半分は不適となってしまうではないか.

[†342] $f(x)$ は連続関数であって, 1 階導関数 $f'(x)$ が区分的に滑らかだから (確かめよ), 項別微分が許される条件を満たしている.

[†343] [注意] ただし, いくら項別積分だけが可能であっても, 項別積分を適用したい Fourier 級数が収束せねば意味をなさないので, 結局は, $f(x)$ が区分的に滑らかである条件も必要となる. それでもなお, Fourier 級数の収束定理以上を課すものではないことに価値がある.

問題 35. 1 次関数 x を 2π で周期的拡張した関数の Fourier 級数 (1.64) を項別積分して, 2 次関数 x^2 を 2π で周期的拡張した関数の Fourier 級数を求め, それが問題 12 で求めた (1.71) と一致することを確かめよ.

[解答] 1 次関数 x の不連続点は無限個ではない. したがって, x は区分的に連続であるがゆえに, 項別積分が可能である. それゆえ, 2 回もの面倒な部分積分をとおしてゼロから Fourier 係数を計算せずとも, (3.4) の両辺を x で 1 階積分するだけで, x^2 の Fourier 級数をうる. つまり,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \tag{3.8}$$

の不定積分を項別に実行して整理する[†344]:

$$\frac{x^2}{2} + c = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx \tag{3.9}$$

積分定数 c の定め方には色々考えられるが, 示したばかりの性質「級数の初項は級数の平均値と等しい (問題 13)」を利用しよう. いま, 左辺第 1 項の関数 $x^2/2$ の Fourier 級数を考えており, 区間は 2π だから, c は

$$c = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\pi\text{ではない}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6} \left(= \frac{a_0}{2} \right) \tag{3.10}$$

と定まり[†345], x の Fourier 級数の項別積分から, x^2 の Fourier 級数 (1.71) をうる:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \cdots \tag{3.12}$$

このように, 項別積分とは便利な計算方法である. たとえば, つぎに「x^3 の Fourier 級数を求めよ」と問われたとして, 既知の x^2 の Fourier 級数の項別積分抜

[†344] 総和記号を使うことなく, 具体的に項を書き下して積分することも望ましい.

[†345] 積分定数 c は他の求め方もある (本質的に等価): (i) $c = a_0/2$ から決定する. すなわち, $x^2/2$ の Fourier 級数の初項を求める. (ii) 級数 (3.9) の両辺に $x = 0$ を代入すると,

$$c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \tag{3.11}$$

をうるが, 右辺は無限級数の和の公式 (3.13) から決定される (§ 3.3.1 で導く).

きに, Fourier 係数を求めるための複数回の部分積分の計算は大変である. 逆に, x^1 の Fourier 級数の計算など, 別に, x^2 の項別微分に頼らずとも容易ではないか[†346]. その意味で, **収束性の問題を差し置いても, 本質的に, 項別微分よりも項別積分を使うことの方が多くかつ便利**なのである.

§ 3.3 無限級数の和の公式と Parseval の等式

§ 3.3.1 Fourier 級数からたくさんの無限級数公式が得られる

これまで, Fourier 級数に具体的な数値を代入することは行わなかったが, たとえば, 導いたばかりの (3.12) の両辺に $x = 0$ を代入すると[†347], 面白いことがわかる. 自然数の逆数のべきの**無限級数の和の値が求まる**のである:

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \tag{3.13}$$

そもそも, 三角関数 $y = \sin x$ は, $x = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \cdots$ といった規則的な点において, $y = 0$ あるいは $y = \pm 1$ というわかりやすい値をとる周期関数である. この意味で, **三角関数から構成される Fourier 級数に適当な数値を代入すると, 有用な無限級数の和の公式 (和の値) の多数が, 特段の苦労なく導かれる**と予想される[†348].

たった "1 つ" の Fourier 級数から "多数" の無限級数和の公式が導かれる点が重要である. 実際に, 2 次関数 x^2 の Fourier 級数 (3.12) からは, 複数の無限級数公式が得られる[†349]. さっそく以下で試そう:

問題 36. 2 次関数 x^2 を 2π で周期的拡張した関数の実 Fourier 級数 (1.71) を眺め, **両辺に適切な数値を代入**し, つぎの無限級数の和の公式を導け[†350].

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{3.14}$$

[†346] **部分積分の回数と関連付けてみよ** (ここに本質の一つがある). べき関数 x^m の Fourier 係数を求めるための定積分の計算は, m が大きくなるにつれて大変になる.

[†347] $\cos n \times 0 = 1$ から逆算したのである.

[†348] これまで導いてきた相当数の Fourier 級数を眺めてみよう. 深く考えることなく, あてずっぽで数値を代入したとしても, 多数の無限級数和の公式が導かれそうだと感じないだろうか. 三角関数とは, それほどまでに, 規則正しく模範的な関数だからである.

[†349] $x = 0$ を代入して導かれた (3.13) など**一例に過ぎない**.

[†350] [ヒント] コサイン関数が特徴的な値をとる x を代入する. ここでは, $x = \pi$ とおいてみた. あてずっぽうに代入したら, 導かれたにすぎないといってもよい.

問題 37. 問題 11 と問題 6 で求めた Fourier 級数を利用して, 次式を導け[†351].

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4} \tag{3.15}$$

問題 38. 以下の実数値関数を 2π で周期的拡張した関数 $f(x)$ を考える[†352].

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad(-\pi\le x<\pi) \tag{3.16}$$

$f(x)$ の複素 Fourier 級数を利用して, 次の無限級数の和の値を求めよ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\pi(e^\pi+e^{-\pi})}{e^\pi-e^{-\pi}}-1\right]}_{\text{示すべき値 }(e\text{ も}\pi\text{も数値})} \tag{3.17}$$

[解] 複素 Fourier 級数はつぎのように求められる[†353]:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(e^\pi-e^{-\pi})(-1)^n}{2\pi(1+n^2)}e^{inx} \tag{3.18}$$

上式で $x=\pm\pi$ とおくと[†354],

$$f(\pm\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^\pi-e^{-\pi}}{2\pi(1+n^2)}(-1)^{2n}=\frac{e^\pi-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} \tag{3.19}$$

ここで, 題意の総和記号の和の範囲をみると, やはり総和記号を分割せねばならないことに気づく. これまで同様に, 負の n を $n=-\ell$ とおけば, 総和の範囲も

[†351] [ヒント] (a) 関数 $|x|$ の級数で $x=0$ とおく (問題 11). (b) 関数 $|1|$ の級数で $x=\pi/2$ とおく (問題 6). [注意] 以後, 具体的に項を書き下さないが, 自身で書き下すことが望ましい.

[†352] [発展 (発展どころか基礎レベルだが, 双曲線関数の定義だけを暗記しても無意味)] 双曲線関数 $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$ を利用して書き直したり, 双曲線関数の微積分を用いることも望ましい.

[†353] これを実 Fourier 級数に書き換えておく練習も望ましい.

[†354] 思いつきではなく, 明確な動機がある. $e^{\pm in\pi}=\cos(\pm n\pi)=(-1)^n$ を思い返したのである. さらに, $(-1)^{2n}=[(-1)^2]^n=1^n=1$ にも注意.

$1 \leq \ell < \infty$ となる. 以下では, 総和記号の内部だけ取り出して変形する:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=0}^{0} \right) \frac{1}{1+n^2} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{1+(-\ell)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

ところで, $f(x)$ にも $x = \pm\pi$ を代入すると,

$$f(\pm\pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} \tag{3.21}$$

である. $f(\pm\pi)$ すなわち (3.21) と, 複素 Fourier 級数に $x = \pm\pi$ を代入したもの (3.19) の値は等しいので, 等号で結ぶと,

$$\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1 \right) \tag{3.22}$$

これを変形すれば, 速やかに題意をうる[†355].

問題 39. 実数値関数

$$\begin{cases} 1 - |x|/2 & (0 \leq |x| \leq 2) \\ 0 & (-\pi \leq x < -2,\ 2 < x < \pi) \end{cases} \tag{3.23}$$

を 2π で周期的拡張した関数の実 Fourier 級数を利用して, 次式を示せ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2} \tag{3.24}$$

§ 3.3.2 Parseval の等式

無限級数和の公式を得るための手段は, Fourier 級数に値を代入する操作だけに限らない. 実は, もっと多様な無限級数の和の公式を導いてくれる強力な道具が

[†355] [ポイント] (i) これまで通りの総和記号の分割. (ii) **級数に題意に適した x を見出して代入**.

存在する．それが, 次の **Parseval の等式**である[356][357]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{3.26}$$

これは, 実 Fourier 係数 a_0, a_n, b_n の値と, 周期 2π の実数値の周期関数 $f(x)$ を関係付ける式である[358][359].

さて, 実際に (3.26) を用いて, x^2 の Fourier 係数から, 第 3 の無限級数の和の公式を導いてみよう．

問題 40. 2 次関数 x^2 を 2π で周期的拡張した関数の実 Fourier 係数 (1.71) を Parseval の等式に代入して, つぎの無限級数の和の値 (右辺) を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{3.27}$$

[解] Parseval の等式に, 問題 12 で求めた実 Fourier 係数 a_0, a_n, b_n を代入すれば,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x = \left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{n^2}\right]^2 \tag{3.28}$$

---

[356] もちろん, 複素 Fourier 係数 c_n に対しても, Parseval の等式は成立する (書き換えてみよ):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \tag{3.25}$$

Parseval の等式に限らず, 複素形の方が議論は簡潔だが, あえて実 Fourier 係数で進める．

[357] 三角関数に対する三平方の定理に相当する．本資料では, Parseval (パーシバル, パーセバル, パーセヴァル) の等式の導出は行わず, 天下りに受け入れて, 用法を中心に学ぶこととする．実は, Fourier 変換に対しても, Parseval の等式に対応する数式が導かれるので, そこで, 導出方法と物理的意味について触れる．[とはいえ導出は容易] 実 Fourier 級数 (1.35) の両辺に $f(x)$ を掛けて $[-\pi, \pi]$ で定積分を行い, Parseval の等式を導け．項別積分が許されると仮定する．

[358] **[補足 (今後)]** 被積分関数を, $[f(x)]^2$ でなく絶対値 $|f(x)|^2$ と書くことの方が多い．いまは実数値関数しか扱っていないので, $[f(x)]^2 = |f(x)|^2$ であって, むしろ絶対値の方が突拍子もないという危惧から前者を採用した．しかし, 以後, 複素数値関数を扱う際には, 区別が重要となり, $|f(x)|^2$ で議論を進めることとなる (複素共役が介入).

[359] [補遺] Parseval の等式およびこれと関連深い Bessel の不等式は, そもそも, Fourier 級数の範囲を (ある意味で) 逸脱して, 誤差解析という分野で重要となる式に属する (実際, Fourier 級数の成書では, そのような観点からの導出が多い)．その準備としては, 誤差に関連する新たないくつかの概念の導入を要する．すると, **「三角関数だけで Fourier 級数から Fourier 変換までを議論する」**という本講義における最重要目的を見失いかねないし, 知識の飽和も危惧される．そこで, 本資料では「Parseval の等式は無限級数の和を計算する道具である」という側面をとくに強調した．ハイレベルだから割愛したわけではない．全てを浅くやるのではなく, 重要度の高い項目を精確に学ぶという講義方針に即して割愛しただけである．Parseval の等式の導出や, 誤差解析との関連は, 独学可能である (難しくはないが, 容易には理解できない).

左辺の定積分を計算して整理すれば, 速やかに題意まで変形できる.

問題 41. Fourier 係数 (問題 5 と問題 11) と Parseval の等式から次式を導け[†360][†361].

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96} \tag{3.29}$$

たとえば, $[-\pi,\pi)$ で定義された 2 次関数 x^2 を周期 2π で x 軸全体に拡張した周期関数の Fourier 級数展開は一通りである[†362]. しかしながら, **Fourier 級数から導かれる無限級数の和の公式は複数にわたる**のである. そのための道具の一つが Parseval の等式である.

§ 3.4 未講述事項

以上で, Fourier 級数に関する章を終えるが, **複素 Fourier 係数のすぐ先には Fourier 変換がある**[†363]. 割愛した項目と割愛理由や学習のすすめを以下に (脚注含め) 列挙する[†364]:

- 任意の周期への拡張[†365].
- Fourier 正弦級数および余弦級数[†366]
- 三角多項式, 誤差, Bessel の不等式, Parseval の等式の一部.

[†360] [**重要・発展**] よく見れば, **問題 37 で求めた (3.15) の (a) と, 本問題の (a) は全く同じ**である. それにもかかわらず, 前者は $|x|$ の **Fourier“級数”から**, 後者は異なる関数の **Fourier“係数”と Parseval の等式から**, それぞれ導かれている. [発展] これは何を意味するのだろうか.

[†361] [ヒント] 項の番号が偶数か奇数かで, 場合分けおよび置き換えを要する.

[†362] 周期的拡張には, y 軸対称的な拡張 (偶関数的拡張) 以外の拡張もありえるので, ここでは, 誤解を避ける意味で, 久しぶりに, 厳密かつくどい表現を採用した.

[†363] 次章から全く新しいことを学ぶわけではなく, むしろ, 本章までは前座にすぎない.

[†364] 割愛項目は試験には出題しないが, これらを学んでさらなる高みへと到達してほしい.

[†365] 計算が煩雑となることと, 周期 2π の議論だけで本質のほぼ全てが理解できるため省略した. ただし, 拡張自体は容易であって (座標軸の伸縮にすぎない), 実用上も重要である. **30 分で独学可能**であるので, 是非一度はやっておくべきである.

[†366] 計算を簡便に行うことができる. テクニック的な側面が強く, 優先順位を鑑みて割愛したが, 実質的には, 諸君が既に解いた問題の中にその考え方は盛り込まれていることに気づくだろう (用語には触れなかったが). 本講義資料と Fourier 解析の参考書を比較しながら考えてみてほしい.

§ 4　Fourier 変換

Fourier 級数の方法の大前提には, **周期関数**であることが課されていた．この制限には, 改めて注意を払うべきである[†367]．本節で学ぶ **Fourier 変換の最大の特長は非周期関数にも適用できる**こと, それは, "大胆にいえば", いかなる関数にも適用できることにある．

複素 Fourier 係数の延長線上に「Fourier 変換」が位置付けられる[†368]．また, 複素 Fourier 級数の延長線上に「逆 Fourier 変換」というものが対応する[†369]．

Fourier 変換は, 常微分方程式や偏微分方程式 (応用数学 B) の解法において威力を発揮するが, その効用は微分方程式に留まらない．アンケート調査の結果分析や, 実験データの統計処理などを代表として, **Fourier 変換は理工学の全分野における必須スキル**といえる．この意味で, 応用数学 A における最重要項目に位置づけられる．

§ 4.1　概要——Fourier 変換を大雑把につかむ

概要であるので, 厳密な前置きは敢えて避けて, 全体像を大雑把につかもう．Fourier 級数の発祥となった考え方 (§ 1.4.1) を精密に再考すると, Fourier 変換が自然と現れる．これまで通り, 周期 2π の実数値の周期関数 $f(x)$ を考える．

(i) 複素 Fourier 級数[†370]

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \cdots + c_{-1}e^{-1ix} \underbrace{+c_0 e^{0ix} + c_1 e^{1ix} + c_2 e^{2ix}}_{\text{飛び飛び (0 と 1 や 1 と 2 の間は?)}} + \cdots \tag{4.1}$$

とは, n について **1 ずつ飛び飛びの (離散的な) 和**を表した．諸君は, これで満足できるだろうか．たとえば, 1 と 2 の間に何が存在するのか気にならないだ

[†367] **[重要]** たとえば, 無限区間 $(-\infty, \infty)$ で定義されたべき関数 x^m や指数関数 e^x などは, Fourier 級数に展開できるはずもない．「1 次関数 x の Fourier 級数を求めたではないか」と反論するかもしれないが, **あくまで, 有限の区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数に対して, 周期的拡張という形式的手段に頼って級数展開してきたにすぎない**．
[ゆえに] ここから (本章) が, **真の意味での三角関数近似**そして Fourier 解析の本番である．

[†368] **[重要]** "級数"ではなく "係数"である．**「級数よりも "係数が"重要」**であると強調してきた．

[†369] "逆"Fourier 変換については, この場で意味不明でも構わない．対応関係があることだけ意識しておいてほしい．

[†370] [もちろん] 実 Fourier 級数で議論してもよい．**複素形を用いるのは, 膨大な計算を避けたいからである**．

ろうか[†371]. つまり, **整数 n だけでなく, 全ての n に対する総和をとれないのだろうか**[†372]. この願望を可能にしてくれるのが, **離散的な "総和" ではなくて連続的な "積分"** である. それは, 総和記号を積分記号に書き換えれば,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(n) e^{inx} \mathrm{d}n$$

と書ける. なお, 記号や係数も含め, 正確に書きだすと,

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{気にしない}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{\infty!!} F(k) e^{ikx} \mathrm{d}k \tag{4.2}$$

である (理由後述). 全ての番号を考えたいのだから, 積分範囲はもちろん $-\infty < k < \infty$ である. n を k に置き換えたり, 係数に $1/\sqrt{2\pi}$ が現れたのは, 本質ではないので, 現時点では気にしなくてよい. (4.2) の右辺を**逆 Fourier 変換**とよび, その被積分関数に含まれる $F(k)$ を **Fourier 変換**という[†373].

(ii) 複素 Fourier 係数 c_n—— たとえば, c_2 は 三角関数 e^{2ix} が級数 (4.1) の中にどの程度含まれているかを教えてくれる数列であって, 次式から計算できた:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x \quad \underbrace{(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)}_{\text{飛び飛び (精度不十分)}} \tag{4.3}$$

近似の精度を考えると, やはり, 飛び飛びの n ではなくて, **全ての n に対して c_n を求めたい**. このとき, 係数は**数列ではなくて連続関数**となる. すなわち,

$$F(k) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{気にしない}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \quad \underbrace{(-\infty < k < \infty)}_{\text{全て考えたい!!}} \tag{4.4}$$

であって, k **も** x **も** $(-\infty, \infty)$ **が定義域**であることに注意を要する[†374]. これ

[†371] そもそも, **"全ての" 三角関数**を用いて $f(x)$ を再現することが, Fourier の発想の真骨頂であったが (§ 1.4.1), $\sin 1.1x$ などは除外していた.

[†372] **[重要]** 総和記号は役立たずといってよい. いくら工夫しようが, 飛び飛びの n に対してしか総和を取ってくれないからである. それゆえ, **本質的に全ての総和を意味する積分記号に頼りたくなる**—— これは自然な感情である.
[総和から積分への移行] 近似の精度が向上するとイメージしてよい.

[†373] いきなり "逆" 変換といわれ, 奇妙に思うだろうが, 現時点では一切気にする必要はない.

[†374] やはり注意する—— (i) n を k に書き換えたことに深い意味はない. (ii) 係数 $1/\sqrt{2\pi}$ は現時点では気にしなくてよい.

が Fourier 変換である[†375][†376]. たとえば, $F(2.5)$ **とは, 三角関数** $e^{2.5ix}$ **が** $f(x)$ **の中に ((4.2) 右辺の中に) どれだけ含まれているか**を教えてくれる.

現時点では, 細部にはこだわらず, **"全ての総和をとる (積分)" への拡張**を理解し, 全体像をなんとなく掴めばよい.

§ 4.2 準備——変換とは

そもそも「変換」とは何だろうか. 高校まででではあまり聞いた覚えがない[†377].

§ 4.2.1 関数 (function)

解析学や高校数学の復習から始める. もし,

$$y = f(x) \tag{4.5}$$

と書かれていれば, 諸君は「x を定めた際に y が対応する」と解読するであろう.

このような, 変数と変数の対応関係 $f(x)$ こそを「**関数**」という[†378][†379]. ここに, x は**独立変数**, y は**従属変数 (未知変数)** という[†380][†381].

[†375] [つまり] Fourier 変換とは, Fourier "級数" の拡張ではなくて, **Fourier "係数" の拡張**である.

[†376] x の全範囲 ($|x| < \infty$) で積分する理由は, すぐに明らかになる.

[†377] [用語] 振り返れば, 大学 1 年の数学まででは, あまり聞いたことがない言葉なのではないだろうか. 「線形変換」や「変数変換」は反例の 1 つだが, 意味合いは異なる. ここで扱うのは, 厳密には, 「**積分変換** (integral transform)」といわれる. Laplace 変換も積分変換の一種である.

[†378] [用語] 関数 (function) ではなく, **写像** (mapping) といってもよい. x を箱 (函) に入れると y が対応してくれるという意味で, とくに古典では, 「関数」ではなく「函数」と書く書物も多い.

[†379] [厳密にいおう] y は集合 Y の要素, また, x は集合 X の要素であって, 数式では, $y \in Y$, $x \in X$ とかく. **集合** (set) の中には無数の**要素** (element) が対応するが, 任意の (全ての) y および x に対して, 一通りの対応関係が定まるとき, これを関数という.

[†380] [イメージ] **独立変数とは人間が指定する (制御可能な) 変数**といえる. これに対して, **従属変数 (未知変数) とは, 求めるべき変数, あるいは, 自然にゆだねる変数**といえる.
[例] キーボードを叩く行為が独立変数の指定で, モニタに出力された映像が従属変数といえる.

[†381] 1 変数関数の場合, 独立変数と従属変数の区別は, 実は, さほど重要ではない. なぜならば, x が決まることは, それだけで y の対応を意味するからである. しかしながら, 2 変数関数の場合は, 取扱いが全く異なるといっても過言ではない. それゆえ, 多変数関数 (微積分) や偏微分方程式 (応用数学 B) を扱う場合には, 注意を要する.

§ 4.2.2　変換 (transform)

では**関数と関数の対応関係**は何か．これが **"変換"** である．これから学ぶ Fourier 変換や Laplace 変換は，積分変換ともいい，関数と関数を対応付ける道具である．

§ 4.3　Fourier 変換を導く

これまでの Fourier 級数の周期 2π を任意の周期に拡張し，それを基に，**周期を無限大**に近づける極限をとる．この極限は，**周期関数という束縛からの脱却，すなわち非周期関数への拡張**を意味する．そのとき，Fourier 級数は逆 Fourier 変換となり，その Fourier 係数として Fourier 変換が現れる．

§ 4.3.1　Fourier 級数を任意の周期 $2L$ へ拡張

Fourier 変換を導くに先立ち，準備を行う[†382]．

これまで，周期関数 $f(x)$ の周期は 2π に限定されていた．すなわち，定義域は

$$-\pi \le x \le \pi \tag{4.6}$$

であった[†383]．これを $2L$ **という任意の周期へ拡張**したい (L は正の実定数[†384])．そこで，両辺に $L/\pi\,(>0)$ をかけると，

$$-L \le \frac{Lx}{\pi} \le L \tag{4.7}$$

をうる．$Lx/\pi \equiv y$ とおくと，新たな変数 y の定義域として，

$$-L \le y \le L \tag{4.8}$$

をうる．これによって，**独立変数を x から y へと変更した**．このとき，周期 2π の周期関数 $f(x)$ は，以下のように書ける[†385]:

$$f(x) = f\left(\frac{\pi y}{L}\right) = \tilde{f}(y) \tag{4.9}$$

[†382] 結果だけを見ると，一見複雑に感じるだろうが，実際の計算は小手先に過ぎず中学レベルである．

[†383] $0 \le x \le 2\pi$ でもよい (本当か．確かめよ)．

[†384] 計算上は負でも問題ないともいえるが，以下をみればわかるように，意味がない．

[†385] 真ん中の引数の π も L も定数なので，独立変数から影を潜めた．厳密には，同じ関数 f でも独立変数が異なるので，チルダをつけて $\tilde{f}(y)$ と書いたが，$f(y)$ と書いても間違いではない．

さて, 複素 Fourier 級数を書き換えてみよう:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi y/L} = \tilde{f}(y) \tag{4.10}$$

続いて, 級数に含まれる複素 Fourier 係数も書き改める[†386]. 処方箋としては[†387],

$$x = \frac{\pi y}{L} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\pi}{L}\mathrm{d}y \tag{4.11}$$

を c_n を与える (2.35) に代入し, f の定義域 (積分範囲) が $-\pi \leq x \leq \pi$ から $-L \leq y \leq L$ に変化した点に注意するだけである[†388]:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(y)e^{-in\pi y/L}\mathrm{d}y \tag{4.12}$$

指数を見ると複雑に感じても仕方ないが, $L = \pi$ **とおけば, これまでどおりの周期 2π の周期関数に対する複素 Fourier 級数およびその係数にきちんと帰着**する (このような操作を習慣づけよ)[†389].

問題 42. (2.34)(2.35) を (4.10)(4.12) へと書き換えよ.

問題 43. 周期 2π の周期関数に対する複素 Fourier 級数 (2.34) および複素 Fourier 係数 (2.35) を書き換えるのではなく, 初めから周期 $2L$ (あるいは周期 ℓ でもよい) の周期関数を考えて, (4.10)(4.12) を導け. まず, 実 Fourier 級数へと展開し, その実 Fourier 係数を与える式を導き, 複素 Fourier 級数への拡張へと進み, (4.10)(4.12) の形まで整理せよ.

§ 4.3.2 複素 Fourier 係数から Fourier 変換へ

周期 $2L$ **の**周期関数 $f(x)$ の複素 Fourier 級数 (4.10) に, 複素 Fourier 係数 c_n

---

[†386] もちろん, 実 Fourier 係数も同様である

[†387] [発展 (厳密には)] $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\pi}{L}$ と書く方が好ましい (理由を考えよ).

[†388] [基礎] **定積分であるので**, もちろん, 積分変数は, x や y である必要はなく何でもよい.
[不定積分ならば] この理屈は通用しない. なぜか.

[†389] この意味で, 覚えるよりも, いちいち変換した方が誤りがないだろう. すでに記憶済みの周期 2π の場合に帰着するかを常に確認すれば誤りはない.

を与える式 (4.12) を代入する[†390]:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x\right)}_{c_n} e^{in\pi x/L} \tag{4.13}$$

煩雑に見える指数部が n に依存する数列であることに着目する．そこで, 表記を簡潔にすべく, 数列

$$k_n \equiv \frac{n\pi}{L} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{4.14}$$

を導入し[†391][†392], 同時に数列の幅 (各項の差) を与える $\varDelta k$ も定義しておく[†393]:

$$\varDelta k \equiv k_{n+1} - k_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \tag{4.15}$$

定義したばかりの k_n を用いて, (4.13) を簡潔に書き換えよう[†394]:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varDelta k}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-ik_n x}\mathrm{d}x\right) e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[g(k_n)\varDelta k\right] e^{ik_n x} \tag{4.16}$$

ここに, $g(k_n)$ は k_n のみに依存する関数であって, 以下のように定義した[†395]:

$$g(k_n) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-ik_n x}\mathrm{d}x \tag{4.17}$$

§ 4.3.3 周期関数から非周期関数への拡張

周期関数からの延長線上という観点から, 非周期関数を直観的に理解しよう．$L \to \infty$ **なる周期をもつ関数が非周期関数**に相当する．なぜならば, 周期が無限大ならば, それはもはや周期関数とはみなせないからである[†396]．そこで, $L \to \infty$ の

[†390] [基礎] 最右辺の $e^{in\pi x/L}$ は, n の総和に関係するが, x の定積分には無関係である．

[†391] [表記] n に対する数列 (sequence) なので, n 依存性を明示すべく k_n と添え字をつけた．

[†392] [物理では] k_n は波数 (波長の逆数: 単位長さの間に含まれる波の個数) に相当する．

[†393] 最右辺の π/L には n を含まないので, $\varDelta k$ には添え字 n は不要である．

[†394] $L = \dfrac{\pi}{\varDelta k}$ だから, 積分記号前の係数を $\dfrac{1}{2L} = \dfrac{\varDelta k}{2\pi}$ と書き改めることができる．

[†395] x で積分するのだから, 積分後は k_n のみに依存する関数 g となる．

[†396] [例 1] **1 周期だけの正弦波があり, その隣にある正弦波までの距離が ∞ というイメージ**が相当する．[例 2] 宇宙空間から地上の人間を眺めようとでもしない限り, もはや, 周期性は見えるは

極限を考えると, (4.15) より, $\Delta k \to 0$ に収束する. このとき, 周期 $2L$ の周期関数は, 非周期関数とみなされる.

Riemann 積分の定義にしたがうと, $\Delta k \to 0$ **の極限において,** k **に関する総和は** k **に関する積分**に書き換えられる[†397][†398][†399]:

$$\lim_{\Delta k \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n) e^{ik_n x} \Delta k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} \mathrm{d}k \tag{4.18}$$

$$\left(\lim_{\Delta k \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n) \Delta k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \mathrm{d}k \right) \tag{4.19}$$

$\Delta k \to 0$ の極限に連動して, 数列の概念は消滅し, n 依存性は消える. 上式では $g(k_n) \to g(k)$ となり, 指数関数は $e^{ik_n x} \to e^{ikx}$ と, 周期は $L \to \infty$ となる (次式).

(4.16) の左辺 (すなわち元の関数 $f(x)$) は, この極限 $\Delta k \to 0$ の影響をうけない. したがって, $f(x)$ と (4.16) の最右辺を等号で結ぶことができる. 変形を進める:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{\Delta k \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n) e^{ik_n x} \Delta k \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} \mathrm{d}k \qquad [\because \text{積分の定義 (4.18)}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \right) e^{ikx} \mathrm{d}k \qquad [\because g(k) \text{ の定義を代入 } (L \to \infty)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \right)}_{\text{Fourier 変換 } F(k)} e^{ikx} \mathrm{d}k \qquad \left[\because \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \mathrm{d}k
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ずもない. [例 3] 周期が 50π の三角関数や方形波 (方形パルス) を想像してみよ.

[†397] [Riemann (リーマン) 積分] 一言でいえば, 曲線 $y(x)$ と x 軸で囲まれた面積を, 無限個の長方形の総和として近似表現した後に, 長方形の幅をゼロに近づける極限として定義される積分であった (高校数学や微積分). [発展] あえて, "Riemann" 積分といったのは, これ以外の積分もあるからである—— Lebesgue (ルベーグ) 積分: 大学院生レベル.

[†398] [重要] **総和の範囲** $-\infty < n < \infty$ **に完全に対応して積分範囲** $-\infty < k < \infty$ **が定まった**.

[†399] 総和記号内が込み入っており, この極限操作をわかりやすく見せるために $g(k_n)$ を導入したのであるが, もちろん, 頭の中で計算が容易な者は, 導入しなくてもよい.

最下行からわかるように, $F(k)$ は非周期関数 $f(x)$ の複素 Fourier 係数に相当し,

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{4.21}$$

と定義した (おいた). この $F(k)$ **を** $f(x)$ **の Fourier 変換**という. また,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.22}$$

とは, $F(k)$ **を逆 Fourier 変換すると** $f(x)$ **に戻る**ことを教えてくれている.

本資料では, **対称性**を意識して, 変換 (4.21) と逆変換 (4.22) の双方に係数 $1/\sqrt{2\pi}$ を付けることとする[†400].

問題 44. (4.13) から出発して, (4.21)(4.22) までを導け.

§ 4.4 定義

背景が理解できない者や面倒な者は, 以下を暗記することを妨げない[†401].

[†400] Fourier 変換に関する成書の一定数は, 以下の定義を採用している:

$$F(k)\equiv\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x,\quad f(x)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.23}$$

[つまり] (4.20) の 2 行目から 3 行目に至る過程で, $1/(2\pi)$ **を分割するか否かの判断が迫られる**のだが, それは本質ではなく, どちらでもよい. **本質は, あくまでも,** $1/(2\pi)$ **というひとかたまりにある**.
[そもそも] $1/(2\pi)$ の意味するところは何であったか. 実 Fourier 係数 (さらにはその伏線) まで遡って確かめよ.

[†401] 定理や公式はともかく, **定義は覚えるしかない**という考え方は, 決して否定されるものではないからである. とはいえ, Fourier 変換の定義に限って言えば, 確固たる理由づけがあるので, それを理解せずに丸暗記することはもったいないが.

§ 4.4.1　Fourier 変換と逆 Fourier 変換

周期を持たない非周期関数 $f(x)$ を考える．$f(x)$ は実数変数 x に対する実数値関数とする．$f(x)$ の Fourier 変換 $F(k)$ は, 次式で定義される†402:

$$F(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{4.21}$$

右辺を見ればわかるように, x **で積分しているから, その結果は** k **だけの関数となる**し†403, $F(k)$ **が複素数値関数**であることもわかる†404†405．ここに, k は実数変数 (実変数) であるとする†406.

また, 逆 Fourier 変換は, 次式で定義される:

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{+ikx} \mathrm{d}k \tag{4.22}$$

つまりは, Fourier 変換 $F(k)$ を k で積分すると, x だけの関数として元の関数 $f(x)$ に戻る．これを逆変換が保証してくれる.

§ 4.4.2　演算子 $\mathcal{F}$ による表現

Fourier 変換を表す演算子 $\mathcal{F}$ を用いて†407, Fourier 変換を表現することもある．つまりは, 関数 $f(x)$ を Fourier 変換すると, 新たに k 依存の関数が対応するこ

---

†402 [物理との対応] 変換前の独立変数 x は空間座標を意識し, 変換後の独立変数 k は波数 ($k = 2\pi/\lambda$, λ は波長) を意識している．時間 t の場合は, k のかわりに角振動数 ω が対応して (次元を確かめよ), Fourier 変換を次式のように書くことが多い:

$$F(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \tag{4.24}$$

このように, 時間依存関数, 空間依存関数のどちらを考えているかで記号は異なる．**時間も空間も Fourier 変換できることが重要**である．本資料は, 空間を意識した表現を採用する.

†403 [定積分と総和] **定積分をとった後, 総和をとった後, 記号として何が残るのか**を常に注意する必要がある．不定積分は例外.

†404 **複素関数ではない**ことに注意せよ．[復習] 複素関数 (complex function) の定義を述べよ.

†405 [基礎] Euler の公式 (2.4) を代入すれば, 虚部の存在に気づく.

†406 [発展 (拡張)] もちろん, k を複素変数としてもよいし, $f(x)$ を複素数値関数としてもよいが, 本講義の範囲を逸脱する.

†407 [記号] 斜体 F よりもさらに傾けた筆記体の $\mathcal{F}$ を使う (個人的にも書くことがやや難しい)．F と $\mathcal{F}$ を区別して書いておれば問題はない.
[余談] 関数 (“F”unction) の F と “F”ourier の $\mathcal{F}$ が同じであるがゆえの面倒さが避けられない.

とを,

$$\mathcal{F}[f(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x = F(k) \tag{4.25}$$

と表現する[†408]. なお, $\mathcal{F}[f(x)](k)$ の引数 (k) は, k 依存性を強調するためのものであって, 書かなくてもよい.

演算子 $\mathcal{F}$ を使うと, 逆 Fourier 変換は,

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \mathrm{d}k = f(x) \tag{4.26}$$

と書ける. つまり, **$\mathcal{F}^{-1}$ が逆 Fourier 変換の演算子**である.

$f(x)$ を変換して逆変換すると, $f(x)$ に戻る. すなわち, 次式が成立する[†409][†410]:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(x)]] = f(x), \quad \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[F(k)]] = F(k) \tag{4.27}$$

問題 45. **[線形性]** Fourier 変換が線形演算であること, すなわち,

$$\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{F}[f(x)] + b\mathcal{F}[g(x)] \tag{4.28}$$

の成立を示せ. ここに, a と b は実数定数, $f(x)$ と $g(x)$ は実数値関数である.

§ 4.4.3 Fourier 変換の意味と複素 Fourier 係数との対応

$-\infty < x < \infty$ で定義される "非" 周期関数 $f(x)$ をも全ての三角関数の線形結合で表現する操作が逆 Fourier 変換であって, あくまでも複素 Fourier 級数の延

[†408] 表現 $F(k)$ が活きる場面と $\mathcal{F}[f(x)](k)$ が活きる場面の双方が存在する. 煩雑に感じるだろうが, 使い分けは現時点で気にする必要はない. 関数 $f(x)$ の変換として, k を独立変数とする関数が対応することを知っておけばよい.

[†409] これを見ると, 演算子 $\mathcal{F}$ による表現の有用性に気づくだろう.

[†410] [応用] 逆 Fourier 変換は, 工学のみならず**日常生活にありふれており**, その応用例は枚挙に暇がない. われわれに最も身近な例は, 病院における**レントゲン撮影などの CT** (Computed Tomography: コンピュータ断層撮影) や **MRI** (Magnetic Resonance Imaging: 核磁気共鳴画像法) などの**画像再構成** (image reconstruction) であろう. 超音波を用いた材料の非破壊検査, 地震波のトモグラフィなどは, 逆 Fourier 変換そのものであって, それゆえ重要といえる.
[宣伝] 金川は, 超音波診断 (diagnosis) と超音波治療 (therapy) の研究も行っています. 後者について, 今年度, 流体力学 (と熱工学), 計算力学, 生体力学, 音響学の融合研究として, **"強力集束超音波を用いた低侵襲ガン焼灼医療における治療効果の次世代型高速シミュレータの開発"** を遂行中です (カシオ科学振興財団, 2019 年 12 月から, 100 万円, **採択率約 15**%).

長線上に位置づけられる[†411].

逆 Fourier 変換に含まれる各三角関数成分の係数 $F(k)$ こそが Fourier 変換であって, 複素 Fourier 係数 (離散的な数列) を連続関数へと拡張したものである[†412]. **$F(k)$ とは, $f(x)$ の中に e^{ikx} (すなわち k 成分) がどれだけ含まれているか**を教えてくれる[†413].

§ 4.4.4 Fourier 変換の前提と方針

§ 3.1 で詳述したように, 関数 $f(x)$ の Fourier 級数が収束するための条件は, $f(x)$ が区分的に滑らかであることであった[†414]. そもそも, Fourier 係数を求めるための積分計算の前提として, $f(x)$ が絶対可積分であることも課された[†415][†416][†417]. 実は, **Fourier 変換が存在するための条件はこれと同一**である[†418]. 天下りに述べておこう:

[†411] 離散的な総和を連続的な積分に拡張したものが逆 Fourier 変換である.

[†412] 複素 Fourier「係数」は数列であって, 離散的な値をとった.

[†413] 周期関数から**非周期関数に拡張されたがゆえに, 対象は振動や波に限定されない**し, 振動や波を見ているわけでもない. しかしながら, ある現象を疑似的に波とみなして, 三角関数の各成分が占める割合を知ることは極めて有益なのである. 実際に, どう考えても波には見えない現象であっても, Fourier 変換 (Fourier 解析) の手法は, 当たり前のように用いられている.

[†414] [復習] 大雑把にいうと, $f(x)$ および $f'(x)$ の不連続点がたかだか数個であって, 全ての不連続点で発散しないことを意味する.

[†415] [絶対可積分 (†124)] 関数 $f(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で絶対可積分であるとは, 積分値が確定すること, すなわち, 次式を満たすことをいう:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, \mathrm{d}x < \infty \tag{4.29}$$

[†416] 厳密には, Fourier 変換右辺の無限積分は, 無限区間 $(-\infty, \infty)$ で連続な関数 $f(x)e^{-ikx}$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \equiv \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{4.30}$$

と定義される. 右辺が有限の極限値をもつとき, 被積分関数は, 無限区間 $(-\infty, \infty)$ において無限積分可能であるという. これは, 広義積分 (improper integral) である. しかし, 本資料では意識しないし, 広義積分や無限積分という言い回しも最小限に留める. 意欲の高い者は, 広義積分が, 定積分の積分区間を動かしたときの極限であることさえ意識しておればよい.

[†417] [練習] つぎの広義積分 (無限積分) は存在するか否か. 存在するならば積分値を求めよ: (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$, (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ [解] (1) 存在しない. (2) 存在しゼロとなる.

[†418] **Fourier 級数の延長線上にあるのだから, ある意味で当然**ともいえる. 予想の範疇である.

Fourier 変換の存在条件

$-\infty < x < \infty$ で定義される関数 $f(x)$ に対して, 全ての x において,

(i) $f(x)$ が絶対可積分である

(ii) $f(x)$ が区分的に滑らかである

という 2 条件が満たされるならば, $f(x)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}[f(x)]$ が存在する.

その都度, (i)(ii) に気を留めながら変換の計算を実行せねばならないのか. もちろん, それが理想ではあるが, そうではなくともよい[†419][†420].

§ 4.5 基礎的な関数の変換

例題形式で, 基礎的な非周期関数の Fourier 変換を計算してゆこう. その計算は, 実 Fourier 係数を求める計算よりも, はるかにたやすいことに気づくだろう[†421].

§ 4.5.1 定数関数

問題 46. [方形波] **全ての x に対して定義**される関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-a \leq x \leq a) \\ 0 & (-\infty < x < a,\ a < x < \infty) \end{cases} \tag{4.31}$$

の概形を描き[†422], その Fourier 変換 $F(k)$ を求めよ.

[†419] [発展だが重要] Fourier 変換の存在条件や実際の計算過程を眺めると, 多くの数学的制約および仮定を課しているように見えるかもしれない. しかしながら, 結論からいうと, **Fourier 変換の理論は極めて広範の関数に適用できる** (その証明は本講義の範囲を超えるので省略). 少なくとも, 本講義のレベルでは, 収束性に注意を払う必要性は低い (決して重要でないという意味ではない).

[†420] [発展だが重要] Fourier 変換を工学や物理などに応用することを目指すわれわれの立場からは, Fourier 変換の方法が適用可能かの考察は後回しにして, **まずは Fourier 変換を利用して式変形を行うのがよい**. 解答が得られた後で, それが正しいかを検討すればよい.
[補足] これは Fourier 級数についても同様である. 級数が収束するか否かの考察は後回しにして, まずは Fourier 級数に展開してみる. **解答を得た後で収束性を確認**すればよいし, 事実, それで上手くいったはずである (§ 1–§ 3).

[†421] **[Euler の公式の効用]** 三角関数を複素数に拡張したおかげに他ならない.

[†422] [もちろん] 非周期関数であるので, 周期的拡張などは不要である. そもそも, 定義域が $|x| < \infty$ である.

[解] 変換の定義式 (4.21) に代入し, 素直な無限積分 (定積分) を実行すればよい[†423][†424][†425]:

$$\underbrace{\sqrt{2\pi}F(k)}_{\text{掛けておく}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} e^{-ikx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{i}{k}(e^{-ika} - e^{ika}) \underbrace{=}_{\text{Euler}} \frac{2\sin ak}{k} \tag{4.32}$$

したがって, 求めるべき Fourier 変換は

$$F(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin ak}{k} \tag{4.33}$$

と求まる. ここに, k は実数変数であって, $F(k)$ **は実数値関数**となった[†426].

問題 47. Fourier 変換 (4.33) が偶関数であることを, 数式を用いて示せ. その後で, コンピュータを用いて実際にグラフを描いて, 偶関数であることを確認せよ[†427][†428].
[略解] 奇関数 k^{-1} と奇関数 $\sin ak$ の積だから, 偶関数である.

§ 4.5.2 指数関数

問題 48. 次の指数関数の Fourier 変換を求め, その概形をフリーハンドで描け. ここに, a は正の実定数とする.

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{4.34}$$

[†423] Fourier 級数の時と同様, やはり, 予め両辺に $\sqrt{2\pi}$ を掛けておくとよい. 計算ミスを防ぐための技法にすぎないが.

[†424] [§ 2.1.4] たとえ e^{-ikx} のように虚数単位が入っていようとも, 実数値関数と同様に, $e^{-ikx}/(-ik)$ と積分してよかった (証明略).

[†425] [§ 2.1.3] 最後は, Euler の公式を用いて, $\sin ak = i(e^{-ika} - e^{ika})/2$ とまとめた. **この公式は, 覚えるよりもその場で導く方がよいだろう (負号の位置を間違えやすい)**.

[†426] [発展] Fourier 変換は, 一般に複素数値関数であるにもかかわらず, 虚部がゼロとなり, 実数値関数が現れたことは重要である. 問題 27 との関連から, この原因を考察せよ.

[†427] **[人間の頭とコンピュータ]** このように, **どこまでが人間の頭だけで出来るのかを考えることは重要極まりない**.

[†428] (4.33) のグラフを手で描くことは困難である. それでも, いくつかの基礎的な情報は, 数式からわかるだろう. 本問題はその練習台の 1 つに位置づけられる.

[解] x の正負に応じて被積分関数が変化する点に注意して計算を進める[†429]:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-ik)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+ik)x}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{a-ik}\left(1-\lim_{x\to-\infty} e^{ax}e^{-ikx}\right) - \frac{1}{a+ik}\left(\lim_{x\to\infty} e^{-ax}e^{-ikx}-1\right) \\
&= \frac{1}{a-ik}+\frac{1}{a+ik} = \frac{a+ik+a-ik}{(a-ik)(a+ik)} = \frac{2a}{a^2+k^2}
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

注意すべきは極限操作だけであるが, その演算は初学者にとって容易くはない. 以下に順を追って説明する:

(i) 指数関数 e^{-ax} は, 以下の極限にしたがった[†430][†431]:

$$
\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^{-ax} = 0 \tag{4.36}
$$

(ii) 三角関数 e^{-ikx} の取り扱いこそが重要である. しかし, 実は, これを深く考える必要などない. なぜならば, 実部と虚部にばらしてみると

$$
\lim_{x\to\infty} e^{-ikx} = \lim_{x\to\infty}\cos kx - i\lim_{x\to\infty}\sin kx = \ ?? \tag{4.37}
$$

実部と虚部の極限 (三角関数の極限) は収束しないことに気づく[†432]. ゆえに, これ以上考える労力が無駄である. ならば, われわれは, どうすればよいのか. 悩む必要などなく, **(4.36) だけでゼロに収束してくれるから, それで十分**な

[†429] [練習] $f(x)$ および $F(k)$ がそれぞれ偶関数であることを示せ.

[†430] [無限積分 (広義積分)] たとえば $0 \leq x < \infty$ のように, 変数 x の定義域を明示する際には, x は "0 以上" なのか "0 より大きい" のかなどを明示できる. その一方で, $\int_0^\infty \mathrm{d}x$ なる積分記号の表現が意味するところは, とくに無限積分の場合に (無限大を扱う際に) わかりにくいので注意を要する. すなわち, あくまで $x\to\infty$ **の極限であって, 決して** $x=\infty$ **なる等号では "ない"**.

[†431] 指数関数のグラフを描いて, これが満たされることを確かめよ. a が正であることに注意せよ.

[†432] どれほど x が無限遠に近づいたとしても, 三角関数は, $+1$ から -1 を行ったり来たりである.

のである[†433].

したがって, 以下の実数値関数が求めるべき答えである[†434]:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2+k^2} \tag{4.39}$$

[グラフ] フリーハンドで描くことができる (横軸に k を, 縦軸に $F(k)$ をとれ).

問題 49. [Fourier 変換と偶奇性——問題 27 の拡張——]

実数値関数を考えるとき, 偶関数の Fourier 変換は実数値をとり, 奇関数の Fourier 変換は純虚数値をとる. これらを示せ.

[ヒント] Fourier 変換の定義 (4.21) に Euler の公式 (2.4) を適用する[†435].

問題 50. 実数値関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (0 \leq x < \infty) \\ 0 & (-\infty < x < 0) \end{cases} \tag{4.40}$$

の Fourier 変換 $F(k)$ は, 以下の**複素数値関数**で与えられることを示せ[†436][†437]:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{a^2+k^2} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{k}{a^2+k^2} \tag{4.42}$$

---

†433 **[重要]** 初学者は「なぜ e^{-ax} の極限だけでよいのか」とか,

$$\lim_{x\to\infty} e^{-ax} e^{-ikx} = 0 \tag{4.38}$$

が満たされるためには複雑な考察を必要とするのではないかと危惧するかもしれない. **見掛け倒しに過ぎなかった**. この一見高尚そうな極限の計算は, 高校数学の三角関数と極限さえ習得しておれば, 一瞬で解消された.

†434 [用語] これを Lorentz (ローレンツ) 型関数とよぶことがある. 見慣れない形と錯覚するかもしれないが, $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ と同一である.

†435 本性質は, 複素 Fourier 係数に対して証明済みである (問題 27). その改題であるが, そもそも, **Fourier 変換は複素 Fourier 係数の延長線上にあるのだから, この性質が受け継がれることは当然**といえる (定義式をもう一度眺めてみよ).

†436 **実部は (4.39) と同じ**であることに気づく. なぜだろうか.

†437 実部と虚部にわけて表現するならば, つぎのように書ける:

$$\mathrm{Re}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}, \quad \mathrm{Im}[F(k)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{k}{a^2+k^2} \tag{4.41}$$

[基礎] 複素数 $z = x+iy$ の実部を $\mathrm{Re}[z] = x$, 虚部を $\mathrm{Im}[z] = y$ とそれぞれかく (この表記を用いる際には, 虚数単位 i は含めない).

さらに, (4.42) の実部が偶関数であること, 虚部が奇関数であることを, 計算によって示せ[†438].

問題 51. [挑戦状][†439]つぎの実数値関数 $f(x)$ の Fourier 変換を求め, その虚部が奇関数となることを示せ. ただし, x は実数変数, a は正の実数定数である.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\infty < x < 0) \\ e^{-ax} & (0 \leq x < \infty) \end{cases} \tag{4.43}$$

§ 4.6 導関数の変換[†440]

これまで通り, **微分可能**な関数[†441] $f(x)$ の Fourier 変換を $F(k)$ とおく:

$$\mathcal{F}[f(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \equiv F(k) \tag{4.21}$$

これを用いて, 1 階導関数 $f'(x) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{4.44}$$

を部分積分を用いて計算することができる[†442]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(x)] &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\mathrm{d}e^{-ikx}}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[f(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\text{ゼロ (後述)}} - (-ik) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x}_{F(k)\ \text{の定義}} \\ &= ik\mathcal{F}[f(x)] = ikF(k) \end{aligned} \tag{4.45}$$

[†438] [発展] 余力がある者は, コンピュータを用いて実部と虚部のグラフを描いて, 実際に, それぞれ偶関数と奇関数であることを確かめよ. さらに, これらの関数の主要な特徴を見出せ.

[†439] 2016 年度中間試験で出題し, 想定通り, ほぼ全滅の結果を得た. 一見, 最も易しそうにみせかけて, 最も出来の悪かった, 意地の悪い出題に属する. 正答者は 2 名ほどであった. しかしながら, 奇問でも悪問でもなく, 基本に忠実に落ち着いて考えることができる者ならば, 誰でも正当可能である. センス, 数学力, 計算力は一切不要であるが, **雑な者には絶対に正答できない**. 先入観を捨てて解いてほしいので, 解答も示さない.

[†440] 本節は, Fourier 変換の演算子 $\mathcal{F}$ による表現が活きる箇所といえる.

[†441] [発展] 厳密にいうと「区分的に滑らかで絶対可積分な関数」を仮定する (§ 4.4.4).

[†442] [†183] 部分積分の公式を万一忘れても, 一瞬で再現できることを示した. むしろ, その都度導く位でもよいだろう.

すなわち, **導関数の変換は** $F(k)$ **の** ik **倍**になる．ただし, 第 1 項の極限においては, $f(x)$ が x の遠方で十分速く収束すること

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \tag{4.46}$$

を仮定し[†443][†444], これを根拠に第 1 項をゼロとみなした．繰り返すが, この仮定の妥当性に現時点で固執しすぎるのではなく, **最終的に答えが得られてから収束を検証すればよい**[†445].

$f(x)$ の x に関する微分の演算は, $f(x)$ の Fourier 変換 $F(k)$ に ik を掛ける操作に変換された．**導関数の変換と聞くと, 一見, 面倒な微分の操作を行う必要を感じさせるが, そのようなものは不要であって, 機械的に** ik **を掛けるだけでよい**[†446]. この掛け算は小学生でもできるという意味で[†447], 面白い性質であるばかりでなく, Fourier 変換を応用する上で強力な道具となる[†448][†449].

問題 52. 2 階導関数 $f''(x) = \mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}x^2$ の Fourier 変換を $F(k)$ を用いて表せ[†450].

---

†443 「本当か」と思うかもしれないが, 普通に考えて, これが満たされねば, 無限大の区間での定積分ができるはずがない．さもなくば発散する．

†444 先ほどと同様に, 可能ならば

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)e^{-ikx} = 0 \tag{4.47}$$

が満たされればよいのだが, 複素指数関数 (三角関数) e^{-ikx} の極限が不定であるため, ここを考えることは放棄して, $f(x)$ だけに制約を課す．

†445 そもそも, ある x に対して $f(x)$ が発散するのならば, 可積分であるはずがないし, Fourier 変換を計算できるはずもない．

†446 三角関数を複素指数関数に拡張したときと似た性質だが (§ 2.1.3), **当たり前といえる**．やっていることは, (複素) 指数関数の微積分に他ならないからである．何より, Euler の公式 (2.4) の恩恵を忘れてはならない．そして, この性質が, (とくに高階の) **微分方程式を解くときに威力を発揮**することも予想できるはずである．

†447 累乗の代数計算ならば中高生レベルといえるが, **単なる掛け算**であるので, 小学生レベルまで簡略化された．これも驚くべき事実である．**複素数のおかげ**である．

†448 現時点では, 導関数の Fourier 変換の恩恵が想像しづらいかもしれない．しかし, Laplace 変換においても類似の処方箋で行うこととなるし, 何より, 微分方程式の解法への応用を考える上で極めて重要である．

†449 繰り返すが, 収束性は, 微分方程式の解を求めた後で容易に確かめることができるし, その方が効率もよい．

†450 [発展] もちろん, $f(x)$ が 2 階まで微分可能でなければならないし, $f'(x)$ が絶対可積分かつ区分的に滑らかな関数でなければならない．

[解] 以下のように計算できて, 元の関数の変換 $F(k)$ の $(ik)^2=-k^2$ 倍となる[†451]:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f''(x)] &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f'(x)e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{(-ik)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= ik\mathcal{F}[f'(x)] = (ik)^2\mathcal{F}[f(x)] = -k^2F(k)
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

ここでは, (4.46) に加えて, 1 階導関数 $f'(x)$ も x の遠方で十分速く収束することを仮定した:

$$
\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0 \tag{4.49}
$$

導関数の Fourier 変換—— $(ik)^n$ を掛ければよい

n 階導関数の Fourier 変換は次式で与えられる:

$$
\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^nF(k), \quad \text{ただし,} \ \lim_{x\to\pm\infty} f^{(n-1)}(x) = 0 \tag{4.50}
$$

「Fourier 変換の導関数」$F'(k)=\mathrm{d}F/\mathrm{d}k$ は,「導関数の Fourier 変換」$\mathcal{F}[f'(x)](k)$ とは**全く異なる**ことに注意を要する[†452].

§ 4.6.1 導関数の Fourier 変換と Laplace 変換

Laplace 変換とその導関数 (前半の講義) を思い返そう[†453]:

$$
\mathcal{L}[f(x)] = F(s) \left(\equiv \int_0^x f(x)e^{-sx}\mathrm{d}x\right) \tag{4.51}
$$

$$
\mathcal{L}[f'(x)] = sF(s) - f(0) \tag{4.52}
$$

$$
\mathcal{L}[f''(x)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{4.53}
$$

[†451] k は実数変数なので, 複素数 $F(k)$ の実部と虚部がそれぞれ k 倍されるという意味である.
[注意] $F(k)$ は一般に複素数値関数だが, その独立変数 k が実数である点には注意を要する.

[†452] 演算子による表記 $\mathcal{F}[f(x)](k)$ と $F(k)$ を併用すると, 混同を招くことが多い. しかし, このポイントを伝える目的においては, 演算子 $\mathcal{F}$ の記号を用いた方が誤解が少なくなるばかりでなく, むしろ有効に働く. 実際に, 導関数の変換においては, $F(k)$ の表記は使いづらい. $\mathcal{F}$ の表記を諸君が使う使わないは自由である.
[重要] いうまでもなく, **1 階導関数 $f'(x)$ の変換を $F'(k)$ と書くのは全くの誤り**である.

[†453] 慣例では独立変数に t を用いるが, Fourier 変換との統一性を意識し, x を用いた.

ここに, s は複素変数であったが, 次章で詳しく述べる.

さて, 導関数の Fourier 変換は, 導関数の Laplace 変換と何が異なるのだろうか[†454]. 導関数の Laplace 変換の場合には,

(i) $f(0)$ や $f'(0)$ などの**初期条件を含む**点が顕著な差異である[†455].

(ii) ならば, なぜ初期条件を含むのか. それは, 積分範囲が $0 \leq x < \infty$ すなわちゼロから積分が始まるからである. これが本質である.

(iii) 初期条件を含むことのメリットは[†456], 常微分方程式の**初期値**問題を解く際に明らかとなる[†457].

§ 4.7　たたみこみとその変換[†458][†459]

たたみこみ積分とは[†460], その名のとおり, 積分によって定義される関数である. 本科目や Fourier 変換のみならず, Laplace 変換や微分方程式の解法の全般において多用されるばかりでなく, **工学の道具として欠かせない新出の関数**である[†461][†462].

[†454] **[注意] 決して「Fourier 変換の導関数」ではない. 「導関数の Fourier 変換」が正しい.** 前者と後者の数式表現は異なる. 実際に書き下せ.

[†455] 独立変数に, あえて, 時間を連想させない x を用いたので, 初期条件という用語を使う必然性はない.

[†456] 初期条件とは, 初期時刻における物体の位置などを意味する既知の値である. そのような有益な情報は, むしろ, 含まれていた方がよいと喜ぶべきであろう.

[†457] Fourier 変換は常微分方程式の "境界値" 問題に応用される. 導関数の Fourier 変換には, 境界条件を含まない点が重要である.

[†458] 本節からは, Fourier 変換の発展事項 (のいくつか) に属する. 発展とはいっても, 工学や物理という重要な応用先から見れば全てが基礎事項であって, とくに**工学応用のために欠くことのできない有用な道具ばかり**である. 決してこれで全てではない. 講義時間数と難易度を鑑みて, 残念ながら, 多くの項目を割愛せざるを得ない現状にある.

[†459] カレーやノイズの例など, 追って応用例にも触れたいと思っている (どこかで話す予定).

[†460] [用語] 単に, たたみこみや, 合成積 (convolution) ということもある.

[†461] 現時点では, たたみこみの定義や諸公式を見てもわかりづらく, 何に役立つのかも意味不明で, 退屈かもしれない. しかしながら, 研究レベルにおいても多用される必要不可欠な「応用のための」道具であるから, 準備しておかねばならない.

[†462] [応用] 2 年次の関連科目でいうならば, 電気回路やフィードバック制御などで多用される. 音響学, 光学, 画像処理, 信号処理などは典型的な応用先である. 光の回折やホールの音響に利用されている. **Fourier 変換と Laplace 変換と極めて相性がよい積分**である.

§ 4.7.1　たたみこみ積分の定義

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみこみ $h(x)$ とは, 次式で定義される[†463][†464]:

たたみこみ積分 (合成積)

$$h(x) \equiv \underbrace{f(x) * g(x)}_{\text{たたみこみ演算子} *} \equiv \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y}_{y\text{ が消えて }x\text{ 依存が残る}} \tag{4.54}$$

ここに, $*$ は, たたみこみ積分を明示する演算子である[†465][†466][†467]. 右辺は y に関する無限積分 (広義積分) であるから, たたみこみ積分 $h(x)$ は x だけの関数となる[†468].

問題 53. "たたみこみの順番は問題にならない" こと, すなわち, 次式を示せ[†469]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(x-\eta)\mathrm{d}\eta \tag{4.56}$$

---

†463 **定義なので記憶**せねばならない.

†464 Laplace 変換 (前半) の章では, 積分範囲の下限がゼロで上限が独立変数 x であったが, Fourier 解析 (後半) では, 積分範囲の下限が $-\infty$ で上限が ∞ となる. したがって, 同じ "たたみこみ" でも, 定義が異なるのだが, それらを特別に区別する名称はない. したがって, 用語ではなくて式で語ればよい.

†465 [記号] $f(x) * g(x)$ ではなく, $(f * g)(x)$ と書いてもよい. どちらかというと, 後者の方が簡潔な表現だろう. また, x 依存性を表す引数 (x) は省略してもよい. 演算子 $*$ を使いたくなければ使わなくともよい. Fourier 変換の演算子 $\mathcal{F}$ と同様の立ち位置と思ってよい.

†466 [記号] $f(x) * g(x)$ を省略して, 単に, 次式のように書いてもよい:

$$h(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \tag{4.55}$$

†467 [発展][さまざまな積の記号] $\cdot$ を内積 (スカラー積), $\times$ を外積 (ベクトル積), $\otimes$ を行列積 (テンソル積), $*$ を合成積 (たたみこみ), : を縮約という. これらは, 階数 ("テンソル代数" の用語) を上げるか下げるか (調べてみよ).

†468 変数 y について $-\infty < y < \infty$ で (無限) 積分するのだから, (無限) 積分後には y の依存性は消えている. この意味で, y ではなく他の記号を用いてもよい. 不定積分ではなく, 定積分 (無限積分) なので, 結局は y は消えるからである. しかし, x **を他の記号にすり替えることは厳禁**である.

†469 たたみこみの演算子を用いると, 「$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$ を示せ」と言い換えられる.

[ヒントと略解] 重要なことは, **左辺の積分において x が "形式的に" 定数とみなされる**ことである[†470]. そこで, $\eta = x - y$ と変数変換する[†471]. これに伴って以下に注意する:

(i) $\mathrm{d}\eta = -\mathrm{d}y$ となる[†472].

(ii) y の積分範囲は, "$y \to -\infty$ から $y \to \infty$ まで" であったので, η **の積分範囲は "$\eta \to \infty$ から $\eta \to -\infty$ に負号が逆転" する**.

(i) と (ii) を左辺に代入して, 2 つの負号の相殺を考慮すれば, 題意の等号が示される.

§ 4.7.2 たたみこみの定理 (たたみこみの変換)

極めて強力な公式であるので, 結論からいおう—— **「2 つの関数の Fourier 変換の積 (の $\sqrt{2\pi}$ 倍) は, それらの関数のたたみこみの変換に等しい」**[†473].

これを数式で表現する. $f(x)$ の Fourier 変換を $F(k)$, また, $g(x)$ の Fourier 変換を $G(k)$ とするとき, $f(x)$ と $g(x)$ のたたみこみとして作られる関数 $h(x)$ の Fourier 変換 $H(k)$ は, 次式で与えられる[†474][†475]:

$$H(k) = \sqrt{2\pi}F(k)G(k) \tag{4.58}$$

ひとまずは, (4.58) を証明しよう. その後に, 次節で常微分方程式の解法への応用を体感し, たたみこみの強力性を実感してもらうこととする[†476].

---

†470 [**基礎だが重要**] もちろん $f(x-y)$ と書かれているのだから, 関数 f は独立変数 x にも独立変数 y にも依存する. しかしながら, **被積分関数 (integrand) としてみると, 積分はあくまで y だけに関して実行される** (決して重積分ではない). したがって, x **は積分に関与しないのだから, 「"被積分関数として" ならば」 x を形式的な定数 "のように" 扱うことに問題はない**.

†471 [記号] ギリシャ文字のイータ (eta) η は, アルファベットの y に対応して使われることが多い. 同様に, 後出のグザイ (クサイ, xi) ξ は, x に対応して用いられる.

†472 積分の中では x が "形式的に定数" とみなされるからである. なお, **"x は定数" と書くと誤りとなる (例年減点)**. x はあくまでも変数である. 事実, 積分後には x が変数としての主役を演ずるからである.

†473 Laplace 変換の場合 (既習) とは異なり, $\sqrt{2\pi}$ がつく. その直感的意味を考えてみよ.

†474 演算子 (operator) を用いるならば, 次式のようにも書ける:

$$\mathcal{F}[(f * g)(x)](k) = \mathcal{F}[f(x) * g(x)](k) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)](k)\mathcal{F}[g(x)](k) \tag{4.57}$$

念のため, 引数の (k) を略さず書いているが, 自明と思えば略してもよい.

†475 書物によっては, $\sqrt{2\pi}$ がないものもあるが, それは, 単に, Fourier 変換の定義における積分記号前の定数係数 $1/\sqrt{2\pi}$ の整え方が異なるからであって, 本質とは程遠い.

†476 [指針] $f(x)$ と $g(x)$ の変換がわかっており, つぎに $h(x) = f(x) * g(x)$ の変換を求めたいとす

問題 54. (4.58) を証明せよ.

[証明][†477] $h(x)$ の Fourier 変換 $H(k)$ にあらかじめ $\sqrt{2\pi}$ をかけて, 変形してゆく:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{2\pi}H(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x}_{\text{Fourier 変換の定義}} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)*g(x)}_{\text{たたみこみの定義}} e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{x\text{ 積分}} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{y\text{ 積分}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right) e^{-ikx}\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

ここで休止し, 式変形の方針を立てよう[†478]. **題意から推測すると,「$f(x-y)e^{-ik(x-y)}$ および $g(y)e^{-iky}$ なる 2 つの塊が欲しい」と望む**だろう. 被積分関数の中にはすでに e^{-ikx} は含まれているがゆえに, e^{iky} を持ち込むことを検討するが, これには支障はなさそうである. なぜならば, 上記の望みに含む指数関数は, $e^{iky}e^{-iky}=1$ を満たすからである. そこで, 躊躇せずに e^{iky} と e^{-iky} を導入して, 式変形を進めよう:

$$
\begin{aligned}
(4.59) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right) e^{-ikx} \underbrace{e^{iky}e^{-iky}}_{\text{掛けて } 1} \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{y} \underbrace{g(y)e^{-iky}}_{\text{順序交換}} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{x} f(x-y)e^{-ik(x-y)}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

x 積分と y 積分の順序を交換し[†479][†480], e^{iky} を利用して, **うまく Fourier 変換の定義に近づけた**.

(4.60) の 2 行目の大括弧内の積分において, **積分に関与しない変数 y は "形式**

る. そのためには, まず, $h(x)$ を求めねばならない. しかし, たたみこみの定義に従った積分計算が困難であることが想定される. そうだとしても, $h(x)$ を知らずともその変換 $H(k)$ は計算できるのである. つまり, $h(x)$ を求めるための面倒なその積分を回避して, 単に, $f(x)$ と $g(x)$ の変換を (および $\sqrt{2\pi}$ を) 掛けるだけで $H(k)$ が得られるのである. ここに, たたみこみの変換の恩恵の 1 つがある.

[†477] 詳細に書くのでややしつこいと思うかもしれない. 諸君は必ずしもこのとおりに理解する必要はない.

[†478] [微積分] (4.59) は**重積分** (multiple integral), 正確には 2 重積分 (double integral) である.

[†479] 順序は問題とはならない. しかし, 決して, **積分記号の外に出してはならない (なぜか)**.

[†480] もちろん, 初見では「このような順序交換をどうやって思いつけるのか」と思うだろう. あえて大雑把にいうならば, **試しにどんどん入れ替えてみて最後に辻褄をあわせる**のである. 繰り返すが, **講義を聴いて (読んで) すぐさま理解できる内容ではありえない**. 復習と自習が必須であって, 他人が書いた式変形を見て覚えても力はつかない.

的に”定数とみなされるので[†481], $x-y\equiv\xi$ とおくと, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\xi$ と変換され, 積分範囲は, x も ξ も, $-\infty$ から ∞ までで変わらない. 変形をすすめる:

$$
\begin{aligned}
(4.60) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ik\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky}\mathrm{d}y}_{y\ \text{積分後に}\ k\ \text{の関数}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ik\xi}\mathrm{d}\xi}_{\xi\text{積分後に}\ k\ \text{の関数}} \\
&\equiv \sqrt{2\pi}G(k)\sqrt{2\pi}F(k) = 2\pi F(k)G(k) = \sqrt{2\pi}H(k) = (4.59)\ \text{左辺}
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

したがって, 両辺を $\sqrt{2\pi}$ でわれば, 題意 (4.58) をうる. [証明終]

§ 4.8 常微分方程式の境界値問題の解法への応用

導関数 (§ 4.6) とたたみこみ積分 (§ 4.7) の Fourier 変換を利用する常微分方程式を 1 題解いておこう[†482][†483]. 一言でいえば, **Fourier 変換は空間変数の変換に適用**されることが多い. 積分範囲の ∞ から想像されるように, **無限に広がった空間**を考える際に応用がきく[†484].

[†481] [注意] y **はもともと変数**であって, 決して, 完全な定数ではない. ここを安直な理解で済ませてしまい, 試験で大幅に減点される者が例年多い.

[†482] わずか 1 題なのか——と残念がるかもしれないが, 常微分方程式への解法の応用においては, 諸君も体感済みのように, Fourier 変換よりも, Laplace 変換が主役を演ずる (本講義前半, フィードバック制御, 電気回路など, 常微分方程式の初期値問題と密接に関連する諸科目) からである. [さらに] 多数の類題を解いて, 演算能力を付けることは, 本講義や大学数学の主目的ではないからである (何度も述べた). 本節の目的は, 積分変換の方法をとおして常微分方程式を解くことの意義の理解だけにある.

[†483] [使い分け] **Fourier 変換が境界値問題** (boundary value problem) に応用される一方で, **Laplace 変換は初期値問題** (initial value problem) に応用される.

[†484] Fourier 変換は, 区間 $|x|<\infty$ の定積分で定義された. したがって, 無限に広い空間で定義される関数の変換 (空間座標 (空間変数) の変換) に応用される. その一方で, Laplace 変換は, $0\leq t<\infty$ で定義されたので, 時間や半無限空間の変換に有効である.

§ 4.8.1 "非斉次の" 2 階定数係数線形常微分方程式の解法

問題 55. Fourier 変換の方法を用いて, 非斉次の 2 階定数係数線形常微分方程式[†485]

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - a^2 f = q(x) \tag{4.62}$$

を解け. ただし, 境界条件は

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0 \tag{4.63}$$

とする[†486][†487]. ここに, $f(x)$ は実変数 x に依存する未知の実数値関数 (求めるべき変数), $q(x)$ は x には依存する**既知**の関数 (非斉次項あるいは任意関数), a は正値をとる**既知**の実定数である.

[解] **両辺を Fourier 変換**する[†488][†489]:

$$((ik)^2 - a^2)F(k) = (-k^2 - a^2)F(k) = Q(k) \tag{4.64}$$

ここに, $Q(k) = \mathcal{F}[q(x)](k)$ であって, 左辺第 1 項の変換には 2 階導関数の変換公式 (4.48) を用い, その際に**境界条件 (4.63) を適用**した[†490]. $F(k)$ について解く:

$$F(k) = -\frac{1}{a^2+k^2}Q(k) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathcal{F}[e^{-a|x|}](k)\mathcal{F}[q(x)](k) \tag{4.65}$$

---

†485 [基礎] **常微分方程式の分類**ができるだろうか—— (i) 線形と非線形, (ii) 斉次 (同次) と非斉次 (非同次), (iii) 定数係数と変数係数, (iv) 常微分方程式 (**ODE**: Ordinary Differential Equation) と偏微分方程式 (**PDE**: Partial Differential Equation), (v) 階数 (1 階, 2 階, n 階など). これらの分類は, 微分方程式を解けるか否か以前の問題であって, 理工系の一般常識であるので, 速やかに復習すべきである.

†486 [用語] 微分方程式と境界条件の組み合わせを微分方程式の境界値問題という. 同じ意味で, 初期値問題や**初期値境界値問題**という言い回しも多用される (とくに数値解析の分野). **"定数係数の線形" 常微分方程式の初期値問題の全て**は, Laplace 変換に支配されると言っても過言ではない.

†487 [重要] なぜ境界条件が "2 本" あるのか. それは, "2 階" 方程式だからである. 身近な 2 階常微分方程式を例示して, もしも境界条件が 1 本あるいは 3 本ならば, 解が定まらないことを確かめてみよ.

†488 この方法は**丸暗記する価値**すらある.

†489 [基礎] **Fourier 変換は線形演算**であるので, 各項を独立に変換することが可能である. (4.28) で証明済みであるが, 改めて確認せよ.

†490 [復習] 導関数の変換公式 (4.48) の前提に何があったのかを復習せよ.

2 つ目の等号に面食らうだろうが, この変形の動機は, $e^{-a|x|}$ **の Fourier 変換**

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+k^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a^2+k^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathcal{F}[e^{-a|x|}](k) \tag{4.66}$$

を思い出したのである (式 (4.39))[†491]. 係数が少々煩雑になるのは仕方がない[†492].

さて, 解としての $f(x)$ を求めるべく, **両辺を "逆" Fourier 変換する**[†493]:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[F(k)](x) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathcal{F}^{-1}\left[\underbrace{\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right]\mathcal{F}[q(x)]}_{\text{変換の積}}\right](x) \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\mathcal{F}\left[e^{-a|x|} * q(x)\right]}_{\text{たたみこみの変換}}\right](x) \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|}q(y)\mathrm{d}y}_{\text{たたみこみの定義}}\right]\right](x) \\
&= -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|}q(y)\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{4.67}$$

2 行目では, **変換の積の $\sqrt{2\pi}$ 倍がたたみこみの変換に等しい性質** (4.58) を思い出し, 4 行目では, 変換の逆変換は元の関数に戻る性質を用いた.

したがって, 境界値問題 (4.62)(4.63) の解は次式で与えられる[†494]:

$$f(x) = -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|}q(y)\mathrm{d}y \tag{4.68}$$

この解が境界条件 (4.63) を満たしていることは, 容易に確認できる[†495]. [証明終]

[†491] こう書かれると,「いちいち諸関数の Fourier 変換の結果までも覚えねばならないのか」と思うだろうが, そうではない. 網羅的に覚える必要などない. しかしながら, **「指数関数の Fourier 変換が $1/(1+x^2)$ に似ていた」程度のイメージ**は忘れないでほしい. **変換の概形が元の関数の概形と似ている**ことも知っておくべきである.
[補足] 試験対策のためにという意味ならば, もちろん, 記憶は不要である.

[†492] もちろん, 係数は本質とは程遠い. **煩雑な係数ではなくて, どのような関数か**だけに注意を払ってほしい.

[†493] **変換を逆変換すると元の関数に戻る**性質を思い返す ($\mathcal{F}^{-1}$ と $\mathcal{F}$ の相殺): $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[F(k)]] = f(x)$

[†494] 境界条件を既に代入した解であるがゆえに, もちろん, **任意定数は含まない** (確かめよ).
[基礎] 2 階常微分方程式の一般解は 2 個の任意定数を含む.

[†495] 実際に, $x \to \pm\infty$ の極限を取って, 境界条件を満足していることを確かめよ.

問題 56. (4.68) は確かに常微分方程式 (4.62) の解であるのか. 常微分方程式 (4.62) に解 (4.68) を代入して, 満たすことを確かめよ.

§ 4.8.2　意義と要点

常微分方程式を Fourier 変換 (や Laplace 変換) で解くことの意義と要点を列挙しておこう:

(i) 春学期の諸君ならば, 非斉次項の存在をみて「まずは非斉次項の特殊解 (特解) を求めねばならない」と思ったはずである†496. しかし, 本手法ならば, **非斉次方程式を "そのまま" 解く**ことができる. つまり, 非斉次方程式の特殊解や斉次方程式の一般解という, **さまざまな解をそれぞれ求めて和をとる労力から解放される**†497.

(ii) 非斉次項が $q(x)$ と一般的に与えられているので†498, 多くの者が定数変化法で解いていたはずであるが, いささか計算量が多い†499. これを避けて, **わずか数行で解を求められる**.

(iii) 微積分を行う必要がなく†500, **代数的な計算で閉じてしまう**. その際に, **たたみこみ積分が有用**となる.

(iv) $-\infty < x < \infty$ という**無限空間で定義される未知変数 $f(x)$ がしたがう微分方程式の境界値問題の解法**において, Fourier 変換は強力な道具となる†501†502.

---

†496 [用語] 非同次項と非斉次項は同義 (inhomogeneous term) であるが, 同次形の微分方程式との区別のため, 本資料では, 用語 "非斉次" を積極的に用いる.

†497 **[重要な価値]「非斉次方程式の一般解は斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和」という, 長ったらしい定理を知る必要がない** (復習: この定理を示せ). これは, Laplace 変換の常微分方程式の "初期値" 問題の解法への応用でも同様である.

†498 非斉次項がたとえば $q(x) = \sin x$ のように具体的に与えられていたならば, 未定係数法 (method of indeterminate coefficients) に頼る者もいるだろう.

†499 むろん, 定数変化法 (method of variation of constants) は汎用的な解法である. そして, 1 階方程式ならば計算量は多くはなくて有効といえるが, 2 階方程式を解くための計算量はそれなりに多く, これを毎日のように書き下すことは耐えきれないと感じるはずであろう.

†500 具体的な微積分という意味である. もちろん積分記号は現れているし, 導関数の変換公式を用いているが, それらは形式的なものといってよい.

†501 この点は**偏微分方程式の解法 (応用数学 B) においても同様**である. **無限空間で定義される関数に遭遇したならば, 瞬時に, Fourier 変換を思い浮かべるべき**である.

†502 [発展] 変数係数の微分方程式ならば, Fourier 変換で解けるか. 解けないか. 検討せよ.
[答え] 解けない (理由を考えて自由レポートの形でとりまとめてみよ).

§ 4.9 Plancherel の等式とエネルギースペクトル

§ 4.9.1 変換のたたみこみは元の関数の積の変換

たたみこみ (§ 4.7) について, 次式も成立する:

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)g(x)](k) = [\mathcal{F}[f(x)] * \mathcal{F}[g(x)]](k) \tag{4.69}$$

すなわち, **「2 つの関数の積の Fourier 変換 (の $\sqrt{2\pi}$ 倍) は, それぞれの関数の Fourier 変換のたたみこみに等しい」**[†503]. 初学者にとっては, 表現が難解に見えるのは致し方ないが, 見掛け倒しに過ぎない. 数回書き出せば確実に慣れるので心配は無用である[†504].

ここから Plancherel の等式が導かれる (次節).

問題 57. (4.69) を証明せよ. [証明] 左辺から変形して右辺に至ることを示す:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{LHS}) &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)g(x)](k) \\
&\underbrace{\equiv}_{\text{変換定義}} \underbrace{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{相殺}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)e^{+i\ell x}\mathrm{d}\ell\right)}_{g(x)\text{ の逆変換 } G(\ell) \text{ を代入}} \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.71}$$

ここで, $G(\ell)$ を逆 Fourier 変換すると $g(x)$ に戻ること, すなわち逆変換の定義

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)e^{+i\ell x}\mathrm{d}\ell = \mathcal{F}^{-1}[G(k)](x) \tag{4.72}$$

[†503] 見にくければ, 次のように書いてもよいだろう:

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)g(x)](k) = F(k) * G(k) = (F * G)(k) \tag{4.70}$$

これ以外にも, 自身の理解しやすい形に書き換えればよい. 表現は問題ではない.

[†504] 同様の意味で, 講義を聴いただけで理解できることはありえない. 講義は理解の助け以上ではない. 復習によって, **自分の手で式変形を一行一行確かめねば理解はありえない**. 復習していない者は, 今現在, 全く持って訳が分からなくなっているはずであるが, たとえ復習していたとしても, 容易に理解できる内容ではない. **改めて復習が全てである**ことを強調しておきたい.

を代入した[†505][†506]. あとは, x と ℓ の積分順序の交換だけで対処できる:

$$
\begin{aligned}
(4.71) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}e^{i\ell x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\ell \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-\ell)x}\mathrm{d}x\right)}_{\text{変換 } F(k-\ell) \text{ の定義}}\mathrm{d}\ell \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)F(k-\ell)\mathrm{d}\ell \equiv F(k)*G(k)}_{\text{たたみこみの定義}} = (\mathrm{LHS}) \qquad (4.73)
\end{aligned}
$$

一見複雑に見えるが, **逆変換と変換の定義に忠実に従う**以上ではない[†507][†508].

§ 4.9.2 Plancherel の等式

実数値関数 $f(x)$ とその Fourier 変換 $F(k)$ の間に, Plancherel (プランシュレル) の等式が成立する[†509][†510]:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)]^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|F(k)|^2\mathrm{d}k \qquad (4.75)
$$

[†505] 逆 Fourier 変換の場合, **指数関数 $e^{\pm ikx}$ の負号が付かない**ことに注意せよ (e^{ikx}). つまり, 複素 Fourier“係数”ではなく, **複素 Fourier“級数”を逆 Fourier 変換と関連付けるのである**.

[†506] 最後に出てくる変数 k との差別化のために, 積分変数に ℓ を用いたが, 定積分によって積分変数の記号 k は消えてしまう. したがって, ℓ ではなく k を用いても, 完全な誤りではない.

[†507] $F(k-\ell)$ の逆 Fourier 変換に注意せよ:

$$
F(k-\ell) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-\ell)x}\mathrm{d}x \qquad (4.74)
$$

F の引数 $(k-\ell)$ に違和感を感じているかもしれないが, 重要なのは, f の引数 (x) である. [用語] $f(x)$ の (x) を引数 (argument) ということがある. とくに, (x) が複雑な場合に使われる.

[†508] [まとめ] とはいっても, 慣れるまでは大変である. とくに, **逆変換と変換の差異, x と k の差異, どのような変数で定積分して積分後の変数は何になるのかなどには, 十分な注意を要する**.

[†509] [用語] Fourier 級数に対する Parseval の等式 (3.26) と本質的に等価な位置付けである. 用語を区別せずに, Plancherel の等式を, 広い意味での Parseval の等式に含めることもある.

[†510] [発展] 実は, $f(x)$ は実数値関数に限定されず, 複素数値関数でもよい. 複素数は実数を包含するがゆえに (虚部がゼロの場合が実数なので, 実数とは複素数の特別な場合に属する), $f(x)$ が複素数値関数の場合であっても, (4.75) の成立を示すことができるし (証明せよ), これまでの議論を拡張することもできる. ただし, 複素数値関数 $f(x)$ を扱う場合は, 単なる括弧 [ ] ではなく, 絶対値記号 | | を用いて, 左辺を $|f(x)|^2$ と書かねばならない (理由を考えよ).

2 乗に着目すべきであって, (4.75) の成立の前提に, $f(x)$ に対して絶対可積分かつ 2 乗可積分が課される[†511]. $|F(k)|^2$ を**エネルギースペクトル**というが, その由来と Plancherel の等式の物理的意味は深入りせずに, 脚注に記すにとどめる[†512][†513].

たとえ $f(x)$ が実数値関数であっても, **一般に Fourier 変換は複素数値関数**になる (虚部がゼロの場合も含め). だからこそ, (4.75) において, $F(k)$ **の 2 乗は** $|F(k)|^2$ **と絶対値で書く**必要がある (決して $[F(k)]^2$ と書いてはならない). 具体的な関数 $F(k)$ を (4.75) に適用するときには, まず, 複素数 $F(k)$ の複素共役 $\overline{F(k)}$ を計算して, 絶対値 $|F(k)|^2 = F(k)\overline{F(k)}$ を求めてから, 右辺の積分に代入する.

問題 58. Plancherel の等式 (4.75) を証明せよ.

[証明] ポイントは 2 点である: (4.69) において, **(i)** $f(x) = g(x)$ **の場合を考えて, (ii)** $k = 0$ **とおいてみる**[†514].

---

†511 [発展だが重要] $-\infty < x < \infty$ で定義される関数 $f(x)$ が可積分 (integrable) であるとは,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty \tag{4.76}$$

の成立が要請された. すなわち, **積分値が発散せずに確定**せねばならなかった. (4.75) の成立の前提には, 絶対可積分のみならず, 以下の 2 乗可積分の成立も要請される:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\mathrm{d}x < \infty \tag{4.77}$$

†512 重要でないという意味ではなく, あくまで, 難易度と講義時間の都合上である.

†513 [発展・応用] $f(x)$ というからには, 空間 x 軸上で定義された関数を連想するだろう. たとえば, **波を対応づけて,** $f(x)$ **を波の振幅** (amplitude) と思えばよい. しかし, データを解析する際には, 必ずしも空間座標が便利とは限らず, 波数 (wavenumber: 波長 λ の逆数であって, 単位長さあたりに含まれる波の個数) $k = 2\pi/\lambda$ [rad/m] の方が便利なことが多い. **現実の空間座標** x **から, 波の空間 (Fourier 空間) の座標** k **への変換が Fourier 変換**なのである. $F(k)$ **とは, おのおのの波数成分が,** $f(x)$ **の中にどの程度含まれているか**を教えてくれる.
[エネルギー] 振幅の 2 乗 $[f(x)]^2$ はエネルギーに他ならない. それを全区間 $|x| < \infty$ で積分したものは波の全てのエネルギーである. **全エネルギーは, 空間座標** x **で記述しようが, 波数** k **で記述しようが, 不変に決まっている**. すなわち, $|F(k)|^2$ の $|k| < \infty$ での積分値と等しい. これが (4.75) の意味するところである.
[時間と空間——角周波数と波数] 独立変数 x を時間 t におきかえると, 波数 k のかわりに角周波数 (角振動数: angular frequency) ω [rad/s] が対応する. 本資料では, Fourier 変換の慣例にしたがって $f(x)$ を用いているが, 時間を引き合いに出す方が応用上はわかりやすいだろう. ついでながら, Fourier 変換の対象は波に限定されない.
[注意] 本脚注は, あくまで, ざっくりとした意味を述べたに過ぎない. 物理や工学への応用数学 (applied mathematics) という観点から, より高みを目指してほしい.

†514 **[考え方]** 題意 (4.75) を見て, つぎのように発想した: (i) **“同じ” 関数の 2 乗**を表現したかったからである. (ii) 指数関数を含まないので, **指数関数を除去するために何をすればよいか**を考えた.

(4.69) 右辺は, 単純に $f(x)$ の 2 乗となる[†515]:

$$\mathcal{F}[f(x)f(x)](0) = \mathcal{F}[[f(x)]^2](0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 e^{-0ix}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\mathrm{d}x \tag{4.78}$$

(4.69) 左辺は, たたみこみの定義より,

$$F(k) * F(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(k-\ell)F(\ell)\mathrm{d}\ell \tag{4.79}$$

であるが[†516], これに $k=0$ を代入する[†517]:

$$(4.79) = \int_{-\infty}^{\infty} F(-\ell)F(\ell)\mathrm{d}\ell \underbrace{= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\ell)}F(\ell)\mathrm{d}\ell}_{F(-\ell)=\overline{F(\ell)}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\ell)|^2\mathrm{d}\ell}_{\text{絶対値!!}} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2\mathrm{d}k \tag{4.80}$$

2 つ目の等号において, Fourier 変換の複素共役 $\overline{F(k)}$ が $F(-k)$ に等しい性質

$$\begin{aligned}\overline{F(k)} &\equiv \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{e^{-ikx}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-k)x}\mathrm{d}x \equiv F(-k)}_{F(-k)\ \text{の定義}}\end{aligned} \tag{4.81}$$

を用いた[†518]. いくつかの注意を脚注に記す[†519][†520][†521]. [証明終]

[†515] 引数 (0) は $k=0$ を意味する.

[†516] ℓ は積分変数なので定積分によって消える. もちろん, 他の記号でもよい.

[†517] 最右辺では, Fourier 変換の記号の慣例にならって $\ell=k$ と置き直したが, 定積分なので, もちろん ℓ のままでも問題ない (本質ではない).

[†518] 2 つ目の等号において, 複素共役の演算記号が e^{-ikx} のみにかかったのは, これ以外が全て実数 (実定数および実数値関数) だからである (確かめよ).

[†519] そもそも, x と k は実変数, $f(x)$ は実数値関数, $F(k)$ **は複素数値関数**であった. つまり, **Fourier 変換** $F(k)$ **を考える場合のみ, 複素数の議論の介入**に注意しておくだけでよい.

[†520] [復習] $\overline{e^{-ikx}} = e^{ikx}$ を Euler の公式に基づいて証明せよ (出題済).

[†521] [復習 (基礎)] $z\overline{z} = |z|^2$ を示せ. ここに, $z = x+iy$ は紛れもなく複素数であるが, **絶対値** $|z|^2 = x^2+y^2$ **は実数**であることを見落としてはならない.

§ 4.9.3　定積分の計算への応用

Fourier 級数に対する Parseval の等式 (3.26) は, (離散的な) 無限級数の和の値を与えてくれた (§ 3.3.2). 同様に, **Fourier 変換に対する Plancherel の等式 (4.75) は, (連続的な) 定積分の値を知る手がかり**となる.

問題 59. 次式を示せ (左辺の定積分の値を計算せよ).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{(1+k^2)^2} = \frac{\pi}{2} \tag{4.82}$$

[解] 被積分関数の $1/(1+k^2)$ を見て, **またしても $e^{-|x|}$ の変換であると予測**する[†522]. そこで, $f(x) = e^{-|x|}$ とおいて, (4.75) の左辺に $f(x)$ を代入し, 右辺にはその Fourier 変換 $F(k)$ を代入する.

変換 $F(k)$ はすでに求めている. (4.39) に $a = 1$ を代入すると, $e^{-1\times|x|}$ の変換は

$$\mathcal{F}[e^{-1\times|x|}](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\times 1}{1^2+k^2} = F(k) \tag{4.83}$$

であった. これは実数値関数であるので (虚部がゼロとなった), その複素共役も形はかわらない. したがって, (4.75) の右辺は,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 \mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\overline{F(k)} \mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+k^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+k^2} \mathrm{d}k \\ = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{(1+k^2)^2}\end{aligned} \tag{4.84}$$

と変形できる. 一方で, (4.75) 左辺の定積分は速やかに計算できる:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 \mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2x} \mathrm{d}x}_{\text{偶関数の軸対称積分}} = 1 \tag{4.85}$$

したがって, 等号で結べば, 題意の定積分の値をうる. [証明終]

[†522] $1/(1+k^2)$ が偶関数であることも, 偶関数 $e^{-|x|}$ を予想させる要因の一つである. もちろん, 実際には, $e^{-|x|}$ の変換を求めて (あるいは参照して), 予想を確信に変えればよい.

§ 4.10　Gauss 関数とその Fourier 変換

§ 4.10.1　Gauss 関数 (ガウス関数)

(4.34) で指数関数 $e^{-a|x|}$ の Fourier 変換を求めた. x が 2 乗になるとどうなるだろうか. これを Gauss 関数 (Gaussian: ガウシアン) という.

Gauss 関数

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{4.86}$$

ここに, a は正の定数である. 理工学の多様な分野で活用される一般常識に属するので, その概形も含めて**知っておくべき**である[†523].

問題 60. Gauss 関数が偶関数であることを示せ.

問題 61. Gauss 関数の概形を, フリーハンドとコンピュータで描け[†524].

§ 4.10.2　Gauss 関数の変換 (1)——変数分離形への帰着

天下りにいうと, Gauss 関数 (4.86) の Fourier 変換は次式で与えられる[†525]. これを示そう.

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}](k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) \tag{4.87}$$

問題 62. Gauss 関数 (4.86) の Fourier 変換を求めよ.
[解] まず, (4.86) の Fourier 変換 $\sqrt{2\pi}F(k)$ を定義する:

$$\sqrt{2\pi}F(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{4.88}$$

---

†523 [補足] **正規分布関数** (normal distribution function) とよばれることもある (その場合, 少々形が違うが, 係数が異なる程度であって, 本質的に等価である). たとえば, 確率統計の講義でも学んだだろう. **試験の得点は (ふつうは) 正規分布にしたがう**. データの解析において欠かせない関数といえるが, 極論, 人類は全員がデータの処理に携わっている. その意味で**人類にとって必須の関数**であって, 事実, 諸君が今後の勉強や研究の至る所で当たり前のように遭遇するだろう.

†524 [ヒント] $x = 0$ で最大値 1 をとることを確かめよ.
[注意] $e^{-a|x|}$ **と** e^{-ax^2} **が似ていると思ってはならない**. $x = 0$ 周りを見ると, 前者は鋭く尖っているが, 後者はなめらか (微分可能) である. 似ているといえるのは, $x \to \pm\infty$ においてゼロに収束するふるまいである.

†525 [記号] $e^a = \exp(a)$ である. 指数が煩雑な場合, 後者を用いることが多いが, 好みもある. 本資料および板書では, 指数部の煩雑さに応じて使い分けるが, 諸君はどちらを選んでも構わない.

この先の道筋は全員が回りくどいと感じるだろう. しかし, Gauss 関数の重要性を鑑みて, 我慢して式変形についてきてほしい.

この段階で, いきなり (4.88) の**両辺を k で (偏) 微分する**という技巧的な方法をとるのである.

(i) 左辺は, 単に, 1 変数関数 $F(k)$ の 1 階導関数となる:

$$\sqrt{2\pi}\frac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k} \tag{4.89}$$

(ii) 右辺も k で微分する[†526][†527][†528]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ikx}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\frac{\partial}{\partial k}e^{-ikx}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-ax^2}e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{4.90}$$

最右辺の xe^{-ax^2} に注目すると, 次の基本的な関係がわかる[†529]:

$$xe^{-ax^2} = \left(-\frac{1}{2a}\right)\frac{\mathrm{d}e^{-ax^2}}{\mathrm{d}x} \tag{4.92}$$

これを (4.90) に代入すれば, 部分積分できそうだという予想がつく. 実行する:

$$\begin{aligned}(4.90) &= -i\left(-\frac{1}{2a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}e^{-ax^2}}{\mathrm{d}x}e^{-ikx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{i}{2a}\left\{\underbrace{\left[e^{-ax^2}e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\text{ゼロ (後述)}} - (-ik)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-ikx}\mathrm{d}x}_{\sqrt{2\pi}F(k)\text{ の定義}}\right\} \\ &= \frac{i}{2a}ik\sqrt{2\pi}F(k) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}kF(k)\end{aligned} \tag{4.93}$$

---

†526 [厳密には] 書物によっては, 2 つ目の積分において, 常微分の記号 d ではなく偏微分の記号 ∂ を使うものもあるが (x と k の 2 変数関数の k に関する微分であるがゆえに), 今回は気にしない.

†527 k についての微分と x についての積分の順序は交換可能である.

†528 $\dfrac{\partial e^{-ikx}}{\partial k} = \dfrac{\mathrm{d}e^{-ikx}}{\mathrm{d}(-ikx)}\dfrac{\partial(-ikx)}{\partial k}$

†529 以下の点に注意を要する:

$$\frac{\mathrm{d}e^{-ax^2}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^{-ax^2}}{\mathrm{d}(-ax^2)}\frac{\mathrm{d}(-ax^2)}{\mathrm{d}x} = -2axe^{-ax^2} \tag{4.91}$$

これを高校生のように暗算で済ませたり, 当たり前と思わずに, **合成関数 (composite function) の導関数の公式 (証明を復習してみよ) に従った**ことが重要である.

ここで, 2 行目第 1 項の極限はゼロとなる:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-ax^2}e^{-ikx} = 0 \tag{4.94}$$

なぜなら, $a > 0$ であるがゆえに[†530], 実部がゼロに収束するからであった:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-ax^2} = 0 \tag{4.95}$$

さらに, 2 行目第 2 項の積分は, $F(k)$ の定義に $\sqrt{2\pi}$ を掛けたものに他ならないことを用いた (式 (4.88)).

左辺 (4.89) と右辺 (4.93) を等号で結ぶと, **変数分離形**の 1 階常微分方程式

$$\sqrt{2\pi}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}k} = -\frac{k\sqrt{2\pi}}{2a}F(k) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}k} = -\frac{k}{2a}F \tag{4.96}$$

が得られる[†531]. さっそく一般解を求めよう[†532]. 置換積分の公式にしたがって[†533],

$$\int \frac{\mathrm{d}F}{F} = -\frac{1}{2a}\int k\,\mathrm{d}k \tag{4.98}$$

となるが, 不定積分を具体的に実行する[†534]:

$$\ln F = -\frac{k^2}{4a} + C_0 \tag{4.99}$$

[†530] これまでと同様に, 虚部 e^{-ikx} は振動しているので, 考える意味もなく, 実部がゼロに収束してくれるだけで十分であった (復習せよ). さらに, $a > 0$ にも注意を要する.

[†531] [基礎] 変数分離形 (variable separable) の微分方程式の定義とその解法を復習せよ.

[†532] [解析学 III] 一般解, 特殊解 (特解), 特異解の定義を復習せよ.

[†533] $\mathrm{d}F$ や $\mathrm{d}k$ などをひとかたまりにみなして掛けたり割ったりする操作に慣れ過ぎているかもしれない. そうではなくて, 厳密にいうと,

$$\int \frac{1}{F(k)}\frac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k}\mathrm{d}k = \int \frac{\mathrm{d}F}{F} \tag{4.97}$$

と変形するのである. つまり, 積分記号と一体に変形する置換積分法 (integration by substitution) に従っている.

[†534] [記号] ln の底は Napier 数 $e = 2.718...$ と定義する. 書物や分野によって対数の表記が異なるので, 面倒ではあるが, 単に, **底が何か (e か 10 かなど) をその都度注視すればよいだけ**である.

ここに, C_0 は積分定数 (任意定数) である[†535]. F について解くと, 一般解をうる:

$$F(k) = \exp(C_0)\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) = C\exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) \tag{4.100}$$

ここに, 新しい任意定数を $C \equiv \exp(C_0)$ とおきかえた. C さえ決まれば, Gauss 関数の Fourier 変換は "完全に" 確定する.

式 (4.88)(4.100) において, $k=0$ とおけば, 次式をうる:

$$F(0) = C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x}_{\text{Gauss 積分}} \tag{4.101}$$

これは Gauss 積分 (解析学 II) であって, これさえ求まれば, 万事解決である.

問題 63. [Gauss 関数とその変換の概形の類似性]
まだ, 任意定数 C が含まれているが, それでも, $F(k)$ **がどのようにふるまうかの情報を得るためには十分な結果**なのである. $C>0$ と仮定して, $F(k)$ の概形を描き, それが Gauss 関数 $f(x) = e^{-ax^2}$ の概形と本質的に同様であることを確かめよ[†536] **元の関数ときわめてよく似た形**をしている点が重要である[†537].

§ 4.10.3　ここまでのまとめ

前節 (§ 4.10.2) で Gauss 関数の Fourier 変換を求めたが (式 (4.100)), 任意定数 C の決定にまでは至らなかった. 以下では, C を求めることが主題である. まずは, Gauss 積分 (4.101) を求める必要があるが, その処方箋は, (i) Jacobian による方法, (ii) 部分積分法による若干回りくどい方法の 2 通りに大別される. その結果, (4.100) で残されたままの任意定数 C が判明する. 講義では前者を取り上げる.

Gauss 積分 (4.101) は, Gauss 関数の変換に含まれる任意定数を決定するのみならず, **理工学のあらゆる箇所で当たり前のように現れる, 大学レベルの定積分**で

[†535] [基礎] **"1 階" 方程式だから "1 個" の任意定数**が現れたのである. そもそも, なぜ積分定数がでてくるのか. 「不定積分だから」だけで終わってはならない. 「微分方程式 "だけ" だから」と考えよう. これは一般解であって, 特殊解ではない.
[さらに] 邪魔な任意定数を消去するためにはどうすべきか. 1 階方程式ならば, 1 個の初期条件 (あるいは境界条件) が必要である. 設定して任意定数を消去してみよ.

[†536] 「係数が込み入っている」や「独立変数が違う」などの声が聞こえてきそうであるが, それらは本質ではない. **細部の差異を除けば, いずれも $e^{-\xi^2}$ なる関数ではないか**. このように, **未知の関数に遭遇した際に, そのふるまいを何となくでも掴みたいときには, 大雑把な見方も重要**なのである.

[†537] このように, 変換が元の関数と似ていることは重要な性質である.

ある. それゆえ, Fourier 解析や応用数学と切り離してもなお, 重要極まりない.

§ 4.10.4 Gauss 積分の計算—— (i) Jacobian の利用

解析学 II で既習の Jacobian (ヤコビアン, Jacobi 行列式) を利用すれば, Gauss 積分の値を, 技巧的に計算することができる. 復習も兼ねてやってみよう[†538].

問題 64. [**解析学 II の復習**] つぎの Gauss 積分を求めよ.

$$G(a) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{4.102}$$

[解] 技巧的ではあるが, $G^2(a)$ を考える:

$$G^2(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.103}$$

この 2 重積分に対して, 変数変換

$$x = r\cos\theta = x(r,\theta), \quad y = r\sin\theta = y(r,\theta) \tag{4.104}$$

を考える. ここで, 以下に注意する:

(i) この変数変換は

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y/x = \tan\theta \tag{4.105}$$

と同値である[†539]. これを, r と θ について解くと

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = r(x,y), \quad \theta = \arctan(y/x) = \theta(x,y) \tag{4.106}$$

である[†540]. すなわち, (x,y) **と** (r,θ) **が 1 対 1 に対応**することが重要である.

[†538] [処方箋] (i) Gauss 積分の 2 乗を考えて, あえて 2 重積分の問題に落とし込む. (ii) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と極座標変換する. (iii) 変数変換の Jacobian を計算し, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ により積分変数を変換する (この式は厳密ではない. 積分記号および被積分関数とセットでなければならない). (iv) 定積分は容易に実行できる. (v) 平方根をとる.

[†539] 変数変換を行う場面に対峙したならば, 問題文などで要求されているか否かによらず, これらを書き下すことが望ましい. すなわち, (4.104) を見たならば, 脊髄反射的に (4.105) を書くのである. 今回, 実は, (4.105) は必要ではないのだが, とにかく頭を使う前にこう書き下すことが重要である.

[†540] [基礎] 次式を示せ: $\mathrm{d}\arctan x/\mathrm{d}x = 1/(1+x^2)$, $\partial r/\partial x \neq 1/(\partial x/\partial r)$.

(ii) 変数変換に伴う積分区間の変更—— 積分区間 $-\infty < x < \infty$ かつ $-\infty < y < \infty$ は, $0 \leq r < \infty$ かつ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に移されることに注意する.

(iii) 変数変換の Jacobian (ヤコビアン: Jacobi 行列式) J が, 次のように求まる[†541][†542]:

$$J \equiv \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r \tag{4.109}$$

以上の準備のもとで, 計算を進める:

$$G^2(a) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} \mathrm{d}r = 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a} \tag{4.110}$$

この平方根をとれば, 題意をうる. [証明終][†543]

したがって, 任意定数 C が確定した:

$$C = \frac{G(a)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \tag{4.111}$$

Gauss 関数の Fourier 変換も確定した[†544]:

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}](k) = F(k) = Ce^{-k^2/(4a)} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/(4a)} \tag{4.112}$$

[†541] [復習] 2 変数関数 $f(x,y)$ の積分変数 (x,y) を (r,θ) に変換するとき, 2 重積分の表現は, Jacobian を用いて,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{4.107}$$

と書き換えられる. ここに, xy 平面上の積分領域 D は, $r\theta$ 平面上の積分領域 E に対応する. [注意] 以下の等式は, イメージとしては許容範囲ではあるが, 厳密には誤りである. 積分変数の変換において, はじめて, このように置き換えられるのだから, 積分記号とセットで成立する:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{4.108}$$

[†542] Jacobian の定義式において, 縦ベクトル (列) と横ベクトル (行) の配置を正確に記憶できないことを悩む必要はない. 行列式なのだから, 結果は同じである (理由を考えよ).

[†543] 任意定数を含まないという点において優れているが, 2 乗を取るという発想が必要であって, どちらが諸君に合うかはそれぞれだろう.

[†544] a に適当な正の数を代入し, 再度, $F(k)$ の概形を描いてみよ.

§ 4.10.5　Gauss 積分の計算—— (ii) 部分積分による方法 [発展]

本節では, 部分積分を利用して, Gauss 積分を求める. 新たな任意定数がうまれる点が難点といえる.

問題 65. Gauss 積分に関する次式を導け. ここに, D は任意定数とする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{D}{\sqrt{a}} \tag{4.113}$$

ただし, 次の極限に関する性質を用いてよい:

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-ax^2} = 0 \tag{4.114}$$

[証明] Gauss 積分は a だけの関数とみなせるので[†545], これを $G(a)$ とおく:

$$G(a) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x \tag{4.115}$$

部分積分によって,

$$G(a) = \underbrace{\left[xe^{-ax^2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\text{極限 (4.114)}} - \int_{-\infty}^{\infty} x(-2ax)e^{-ax^2}\mathrm{d}x = 2a\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}\mathrm{d}x \tag{4.116}$$

をうるが, $x^2e^{-ax^2}$ の積分計算は大変である. そこで, (4.115) の両辺を a で微分すると, $x^2e^{-ax^2}$ をうまく抜き出せる:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}e^{-ax^2}\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}\mathrm{d}x \tag{4.117}$$

したがって, G に対する変数分離形の微分方程式が導かれる:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}a} = \frac{G}{2a} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}G}{G} = -\frac{\mathrm{d}a}{2a} \tag{4.118}$$

不定積分によって, 一般解は速やかに求めることができる (D_0 は任意定数):

$$\ln G = -\frac{1}{2}\ln a + D_0 = \ln a^{-1/2}\ln D = \ln\frac{D}{\sqrt{a}} \tag{4.119}$$

[†545] x に関する定積分の後に残るのは, a 依存性のみである.

したがって, 題意をうる:

$$G(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{D}{\sqrt{a}} \tag{4.120}$$

まだ, **任意定数 D を含む点に不満**が残る. [証明終][†546]

問題 66. Gauss 積分の値を確定せよ.

[解] § 4.10.2 における Fourier 変換の定義 (4.88) および変換の結果 (4.100) において, $k = 0$ とおくと, 次式をうる:

$$\begin{aligned} F(0) = C = \frac{1}{\sqrt{2a}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-0ix} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x}_{\text{Gauss 積分 } G(a)} = \frac{G(a)}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \tag{4.121}$$

ここで, **先述の $C > 0$ が明らかとなった**[†547].

以上より, Gauss 積分の値が確定する [証明終][†548]:

$$G(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{4.122}$$

問題 67. Gauss 関数 $f(x) = e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 $F(k) = Ce^{-k^2/(4a)}$ に含まれる任意定数 C を定め[†549], 変換を確定させよ.

[証明] ここで Plancherel の等式 (4.75) が活躍する. Gauss 関数 $f(x)$ とその Fourier 変換 $F(k)$ を, それぞれ, (4.75) の左辺と右辺に代入すると, 先ほど定義した関数 $G(a)$ を用いて整理される. 左辺は,

$$(\mathrm{LHS}) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-ax^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} \mathrm{d}x \underbrace{= G(2a)}_{\text{関数 } G \text{ を利用}} \tag{4.123}$$

[†546] 実は, 任意定数は $D = \sqrt{\pi}$ である. しかし, ここで述べている方法は, D を定める作業を抜きにして, Gauss 積分の値を確定させるものである.

[†547] **全ての x に対して $e^{-ax^2} > 0$ であるがゆえに, Gauss 積分 $G(a)$ は正値**である (Gauss 関数の概形を描いてみよ). したがって, これと等号で結ばれる C も正値に他ならない.

[†548] つまり, 任意定数は $D = \sqrt{\pi}$ であった. しかし, 直接は用いなかった.

[†549] C は D とは異なる任意定数であった.

であって[†550], 右辺は次のように変形できる[†551]:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{RHS}) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 \mathrm{d}k &= \int_{-\infty}^{\infty} C^2 \left[e^{-k^2/(4a)} \right]^2 \mathrm{d}k \\
&= \underbrace{C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(2a)} \mathrm{d}x}_{\text{積分変数おきかえ}} \underbrace{= C^2 G(1/2a)}_{G\,\text{を利用}}
\end{aligned}
\tag{4.124}
$$

左辺と右辺を等号で結び, 求めたばかりの関数形 $G(a) = \sqrt{\pi/a}$ を使うと[†552],

$$
G(2a) = C^2 G(1/2a) \implies \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}} = C^2 \sqrt{\pi} \sqrt{2a} \implies C = \frac{1}{\sqrt{2a}} \tag{4.125}
$$

となるが, ここで $C > 0$ であることを仮定した[†553]. あとは前節と同様である.

§ 4.11　Dirac のデルタ関数とその変換

§ 4.11.1　デルタ関数の定義

Dirac (ディラック) のデルタ関数とは, Fourier 変換と切り離してもなお重要な関数である[†554][†555]. 超関数 (distribution) であって, 普通の意味の関数ではないので, $\delta(x) = \cdots$ なる形では定義されない[†556][†557].

[†550] $(e^a)^b = e^{ab}$ に注意.

[†551] 2 行目において, 積分変数を k から x に置き換えたが, 定積分であるので, もちろん置き換えなくともよい.

[†552] § 4.10.5 の方法で, $G(a) = D/\sqrt{a}$ のように, 任意定数 D が残されていても, 以下の計算に支障はきたさない. これを実際に確かめよ.

[†553] この仮定の正当性はすぐ後に示される.

[†554] [用語] (i) 以後, 単にデルタ関数とよぶ. (ii) 単位インパルス関数とよぶこともある. (iii) Kronecker (クロネッカー) のデルタ記号 δ_{nm} とは全く異なることに注意せよ.

[†555] **[発展だが基礎—— ベクトル解析] ベクトル解析の代数的表現に習熟したい者は, Kronecker のデルタ記号 δ_{ij} と Eddington のイプシロン記号 ϵ_{ijk} を用いることを推奨**する. 流体力学などに現れるベクトル解析の公式のみならず, 流体力学の基礎方程式を, 極めて簡潔かつ簡便に書き下すことができて, 式変形も著しく容易になる. 興味があれば金川に尋ねてください.

[†556] ギリシャ文字のデルタ (delta) 記号の小文字 δ をつかう.

[†557] それにもかかわらず, 工学応用上, 避けて通ることの出来ない関数であり, 今後の道具でもある.

Diracのデルタ関数の定義

任意の実数値関数 $f(x)$ に対して, 任意の実数 a を用いて,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)\mathrm{d}x = f(a) \tag{4.126}$$

を満たす関数 $\delta(x)$ をデルタ関数と定義する.

しかしながら, この定義 (4.126) をすんなりとは受け入れ難いに決まっている. そこで, デルタ関数の意味するところに, 易しく迫ることとしよう. 特殊な場合を考える. 易しい数値として, $a=0$ を代入すれば, 定義より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)\mathrm{d}x = f(0) \tag{4.127}$$

をうる. これでもなお, 被積分関数が積の形をしているがゆえに, 受け入れ難い.

だからこそ, $\delta(x)$ 単独の意味を明瞭にしたいが, $f(x)$ が邪魔である. そこで, 全ての x に対して $f(x)=1$ なる定数関数の場合を考える[†558]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{4.128}$$

ここまでくれば, ある程度は受け入れやすくなった. 実数 x を指定しても, $\delta(x)$ の値は決して定まらない. 他の関数との積を積分した結果のみ, 意味のある値をもつ, 特殊な関数なのである[†559].

$x \to 0$ **の極限において,** $\delta(x) \to \infty$ **をとり, 幅が** $1/\infty$ **というイメージ**を持つとよい[†560][†561].

---

†558 うっかり, $f(x)=0$ とおきそうになる. このようにおいてしまったならば, 左辺も右辺もゼロとなり, 元も子もない.

†559 [発展] この意味でも, $\delta(x)$ は普通の関数ではありえない. ゆえに, $\delta(x)$ を含む積分 (4.126)(4.127)(4.128) も, 普通の積分ではない. 関数の意味が拡張されているのみならず, 積分の意味も拡張されている.

†560 [イメージ] あえて, イメージを重視した表現ならば,

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases} \tag{4.129}$$

とかける. 普通の関数ではないので, もちろん, この書き方は厳密ではないし, $\delta(x) = \cdots$ などという表現自体が誤りではあるが.

†561 [直感的にいえば] 原点 $x=0$ における自動車と歩行者の衝突時に受ける力積が対応する. 無限大の衝撃が伝わるパルスとみなせる.

問題 68. デルタ関数が偶関数であること, すなわち, 次式を示せ.

$$\delta(x-a)=\delta(a-x) \tag{4.130}$$

[ヒント] $f(x)$ を $f(-x)$ におきかえ, $-a$ を a におきかえよ. あとは, 積分変数の変換で片付く. たとえば, $y=-x$ とおけばよい[†562].

§ 4.11.2　デルタ関数の変換

極めて容易い:

$$\mathcal{F}[\delta(x)](k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-0)e^{-ikx}\mathrm{d}x\underbrace{=}_{\text{定義}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.131}$$

問題 69 (難)**.** $1/\sqrt{2\pi}$ の逆 Fourier 変換がデルタ関数となることを示せ.

[ヒント] まず, 逆変換 $f(x)$ に変換 $F(k)$ を代入し, 検討してみよ.

§ 4.11.3　デルタ関数の導関数とその変換

デルタ関数の導関数 $\mathrm{d}\delta(x)/\mathrm{d}x=\delta'(x)$ は次式で表わされる. やはり, 普通の定義とは異なる.

問題 70. 部分積分法を用いて, 次式を示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x-a)f(x)\mathrm{d}x=-f'(a) \tag{4.132}$$

問題 71. デルタ関数の導関数の Fourier 変換を求めよ. ダッシュは x に関する微分演算を意味する. [解]

$$\mathcal{F}[\delta'(x-a)](k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x-a)f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}e^{-ikx}}{\mathrm{d}x}|_{x=a}=\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}e^{-iak} \tag{4.133}$$

[†562] あらかじめ $a=0$ とおいてから証明を行ってもよいだろう.

§ 4.12　おわりに

以上で, Fourier 変換の章を終えるが,

- Dirac のデルタ関数に関するより深い性質
- 可積分性に対する検討
- エネルギースペクトル, スペクトル解析
- 離散 Fourier 変換, 高速 Fourier 変換 (FFT: Fast Fourier Transform)
- 物理と工学への応用例†563

などを代表として, 未講述事項も多いことが心残りである†564. 偏微分方程式 (後半の講義) を解くための道具として活用する際に, 適宜, 復習してほしい.

最後に, 一般的な表記を示し†565, 1 題を与えておこう:

問題 72. [**演習**] 次式を示せ.

$$\mathcal{F}\left[x^2 e^{-|x|}\right](k) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{1-3k^2}{(1+k^2)^3} \tag{4.136}$$

ただし, 次の極限の性質が成立する:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0 \tag{4.137}$$

---

†563 健康診断のレントゲン撮影は, Fourier 変換に他ならない.
[注] 厳密には, 2 次元の逆 Fourier 変換である.

†564 逆にいえば, 最も容易かつ最も重要な事項だけを講述したので, その先は諸君が独学されたい.

†565 [発展] 3 次元空間座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ および時間 t を独立変数とする 4 変数関数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ の Fourier 変換は, 角振動数 ω および波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ を用いた 4 重積分として

$$F(\boldsymbol{k}, \omega) \equiv \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, f(\boldsymbol{x}, t) \exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)] \tag{4.134}$$

とかける. また, 画像処理などの応用上よく使われる 2 次元 Fourier 変換

$$F(k_x, k_y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(k_x x - k_y y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.135}$$

を挙げておく (いずれも積分記号外の定数を省略した).

§ 5　Laplace 変換

Fourier 級数 (§ 1–§ 3) の延長線上に Fourier 変換 (§ 4) が定義されたが, **そのストーリー性は Laplace 変換 (§ 5) の場合も変わらない**. Fourier 変換を修正したものが, Laplace 変換に相当するのである. そこで, やはり, Fourier 変換から出発して, Laplace 変換を定義しよう[†566].

§ 5.1　Fourier 変換による Laplace 変換の定義

独立変数 t に依存する関数 $f(t)$ を考える[†567]. Laplace 変換の慣例にならって, 独立変数には, 空間を連想させる x のかわりに, 時間を思わせる t を用いる[†568]. **関数 $f(t)$ の定義域は** $0 \leq t < \infty$ である[†569].

指数関数 e^{-ct} のグラフを描けば, 例えば**実数** c が正ならば, $t \to \infty$ の極限において**速やかにゼロに収束**することがわかる[†570]. 指数関数のこの性質を利用した Fourier 変換こそが, Laplace 変換なのである.

天下りにいうと, $\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}$ の Fourier 変換が Laplace 変換に相当する[†571]:

$$\mathcal{F}[\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}e^{-ikt}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{0}^{\infty}}_{\text{注意}} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{5.3}$$

[†566] Laplace 変換と Fourier 変換を関係づけずに別々の変換として定義する書物もあるが, われわれの目的は, そのような無機質な知識をバラバラに得ることにはない. そのような知識ならば, Google にでも聞けばよいだろう.

[†567] [基礎] 独立変数と従属変数の定義を述べよ. これが答えられないならば, 高校生以下である.

[†568] [補足] これに即して, Fourier 変換も, 次式のように書き改める:

$$\mathcal{F}[f(t)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t = F(k) \tag{5.1}$$

ここに, k は角周波数 (角振動数: angular frequency) である (次元は rad/s もしくは 1/s). これまでと同記号 k を用いたが, たとえば Ω のように周波数を思わせる記号を用いてもよかろう.

[†569] いいかえれば, いま考えている $f(t)$ は, 負の t に対して次式を満たす:

$$f(t) = 0 \quad (t < 0) \tag{5.2}$$

[†570] 次節で具体的に Laplace 変換を計算する中で, この指数関数の意義が明らかとなる.

[†571] $\sqrt{2\pi}$ を掛けたのは, 単に, 規格化のためである. 少し先読みすれば, この意図に気づくだろう.

t の定義域ゆえに, **積分範囲の下限がゼロに修正された点に注意**せよ[†572]. ここに,

$$s \equiv c + ik \tag{5.4}$$

は**複素変数**であって, c と k という実変数を用いて定義される[†573][†574].

つまり, **Laplace 変換とは Fourier 変換のある種の修正版**である:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) \equiv \int_0^\infty f(t) e^{-st} \mathrm{d}t \equiv F(s) \tag{5.6}$$

$f(t)$ の Laplace 変換の表現には次の 2 通りがある:
(i) 演算子 $\mathcal{L}$ を用いて $\mathcal{L}[f(t)](s)$ と書く[†575]. (ii) $F(s)$ と書く[†576].

Laplace 変換とは, 実数値関数 $f(t)$ から**複素関数** $F(s)$ への対応関係に他ならない[†577][†578][†579].

一口にいって, **Laplace 変換の方が, Fourier 変換よりも収束しやすい**. なぜか. ミソは e^{-ct} なる指数関数にある (ただし $c > 0$). $t \to \infty$ の極限にともなって, 被積分関数 $f(t)$ が発散してはならない[†580]. Fourier 変換では, $t \to \pm\infty$ において, 被積分関数が収束することが要求されたが, Laplace 変換の場合には, $t \to \infty$ にお

[†572] Fourier 変換の場合のように $-\infty$ からではない. そして, **このゼロこそが Laplace 変換を特徴づける**といっても過言ではない.

[†573] [基礎] c と k が実数でないならば, 実部と虚部にわける操作が意味をなさない. なぜか.

[†574] しかし, 以後は, c と k よりも, s という複素数 1 つに集約し, $\mathrm{Re}(s)$ と $\mathrm{Im}(s)$ という表現として

$$s = c + ik = \mathrm{Re}(s) + i\,\mathrm{Im}(s), \quad \text{ここに, } \mathrm{Re}(s) = c,\ \mathrm{Im}(s) = k \tag{5.5}$$

を用いることが多い. 多数の記号が現れる煩雑さを防ぐためである.

[†575] [記号 1] $\mathcal{L}[\ ]$ と書いても, $\mathcal{L}(\ )$ と書いてもよい (書物による). $[\ ]$ を用いた理由の 1 つは, $\mathcal{L}[f(t)](s)$ を見ればわかるように, Laplace 変換の引数 (s) および f の引数 (t) の括弧 $(\ )$ との差別化のためである. [記号 2] 演算子 $\mathcal{L}$ には斜体よりもさらに傾けた, 筆記体の L を用いることが慣例だが, 大文字斜体の L と区別されておれば問題はない.

[†576] 現時点では, どのように使い分ければよいかが不明であろうが, 心配の必要はない. とくに, 微分方程式の解法を学ぶ中で, 使い分けを明確化できるだろう.

[†577] [複素関数] 複素関数 (complex function) を数式表現するならば, $w = f(z)$ とかける (従属変数 $w = u + iv$ は, 独立変数 $z = x + iy$ の関数. ここに, z と w はともに複素変数で, x, y, u, v は全て実変数). すなわち, **複素変数と複素変数の対応を定める写像が複素関数**である.
[基礎] 複素関数と複素変数は異なる.

[†578] [実数値関数, 複素数値関数, 複素関数 (§ 2.1.1)] Fourier 変換 $F(k)$ は, 実変数 k に依存する複素数値関数であった. **Laplace 変換** $F(s)$ **は, 複素変数** s **に依存する複素関数**である. 複素関数と複素数値関数は異なるが, その差異が理解できているだろうか.

[†579] 複雑に聞こえるだろうが, 演算だけならば, 「複素関数」という言葉に恐れる必要はない.

[†580] たとえば, $f(t) = t$, $f(t) = t^2$, $f(t) = e^t$, $f(t) = \ln t$ などはいずれも $t \to \infty$ で発散する.

いてゼロに収束する e^{-ct} のおかげで, 多くの場合は収束するのである. この意味で, **Fourier 変換の収束性を強化したものが Laplace 変換**であるといえる. その役割を演ずるのが, 実変数の指数関数 e^{-ct} そしてその先にある複素数値関数 e^{-st} である[†581].

問題 73. Laplace 変換が線形演算であること[†582], すなわち, 次式を示せ:

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)](s) = a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s) \tag{5.7}$$

ここに, a と b はともに実定数, $f(t)$ と $g(t)$ はともに実数値関数である.

§ 5.2 逆 Laplace 変換と Bromwich 積分

$\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}$ の Fourier 変換は, 次式で与えられた[†583]:

$$\mathcal{F}[\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}](c+ik) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ct}e^{-ikt}\mathrm{d}t = F(c+ik) = F(s) \tag{5.8}$$

ここで, **“逆”Fourier 変換の定義** (§ 4.4) を思い返すと, 次式をうる:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(s)](t) = \sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ikt}\mathrm{d}k \tag{5.9}$$

両辺に e^{ct} を掛けて, 上式を $f(t)$ について解く:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ikt}\mathrm{d}k\, e^{ct} \tag{5.10}$$

このままだと, **積分変数が k である一方で, F の引数が s であるがゆえに, 統一感がない**. とはいえ, s と k の間には, $s=c+ik$ の関係があるので, これに従って整理すればよいだけであって, 積分変数を k から s に変換しよう. このとき, 以下に注意すべきである:

(i) k についての積分であるがゆえに, **被積分関数においては c が “形式的に” 定数とみなされ**[†584], $\mathrm{d}s/\mathrm{d}k = i$ とかける.

---

†581 ここでは, 実変数 t を独立変数とみなしたので, e^{-st} を複素数値関数と述べたが, 複素変数 s を独立変数とみなすならば, これは複素関数に属する.

†582 [用語] いいかえれば, $\mathcal{L}$ は線形演算子 (linear operator) といえる.

†583 ここでは, s が現れないため, 引数を, (s) ではなく, わざと $(c+ik)$ と書いた. もちろん, $(s=c+ik)$ のように書いてもよい.

†584 [例年減点箇所] 決して完全な定数ではない. 積分には関与しないという意味に過ぎない.

(ii) k の積分区間 $(-\infty < k < \infty)$ に即した s の積分区間は $(c-i\infty < s < c+i\infty)$ である (確かめよ)[†585].

以上より,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{ikt}\frac{\mathrm{d}s}{i}e^{ct} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{5.11}$$

となる．これを逆 Laplace 変換といい[†586], 演算子 $\mathcal{L}^{-1}$ で表現することもできる[†587]:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{5.12}$$

積分変数が複素数 s であることからわかるように, これは, **複素積分**に他ならない[†588][†589]．積分区間, すなわち, **積分経路は複素数平面 (Gauss 平面) 上の虚軸に平行な直線**であって,

$$\mathrm{Re}(s) = c, \quad (\text{ただし}, -\infty < \mathrm{Im}(s) = k < \infty) \tag{5.13}$$

である (図示せよ)．本講義では, (5.12) にはこれ以上は踏み込まず, 複素積分としての逆 Laplace 変換を具体的に計算することはしない[†590].

[†585] $i\infty$ なる表現に違和感を感じているかもしれない．金川も同感である．致し方ない.

[†586] [用語] Laplace 逆変換といってもよい.

[†587] [用語] 最右辺を Bromwich (ブロムウィッチ) 積分という．さほど強調されないことも多い.

[†588] 積分変数が複素数であるものを, 複素積分 (complex integral) といった．複素積分では, 複素変数に, ほぼ確実にアルファベットの z を用いるため, s と書かれると, うっかり気づきにくい.

[†589] [しかし] 逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}[F(k)](x)$ は実積分であった．$F(k)$ が複素数であっても, 積分変数 k が実数であったからである．これを確かめよ.

[†590] 逆 Laplace 変換の計算は, Bromwich 積分としての複素積分の計算を避けて求められる場合も多いからでもある (前半で既習).