注意事項 [応用流体力学 期末試験] 2023 年 12 月 26 日 (火) 12:15–15:00 実施

注 1) **問題用紙を回収する．要記名．**

注 2) **不正行為には学群学則で定める厳罰が課される**.

注 3) 表面 (本頁) に注意事項 (要精読), 裏面に問題が載っている．両面印刷を確認のこと．

注 4) 鉛筆 (シャープペンシルと替え芯), 消しゴム, 時計のみ使用, 提示可．学生証を提示のこと．電卓, 筆箱, 定規などは一切使用不可．**携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまう**．鞄のチャックをしめて床におく．

注 5) やむなくトイレなどの一時退室を希望する場合は挙手のこと．**携帯電話をポケットに入れたまま退室すると, 不正行為とみなす**．ただし, 13:45 以降は認めない．複数名が同時に一時退室することも認めない．

注 6) 13:45 より提出退席を許可する予定．

注 7) 用いた答案用紙全てに記名のこと．未使用答案用紙も提出のこと．不足時には挙手のこと．答案用紙右肩に, **1/3, 2/3, $\cdots$ のように, 計何枚中何枚目かを明記**のこと．

注 8) ある問題の解答において**導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 導出や証明を繰り返すことなく, 引用の形で用いてよい**．引用の際は, 答案の式の番号と問題の番号などを区別の上で記載し, **どの公式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと．

注 9) 考え方の筋道, 式変形の根拠, 途中計算を, 論理的かつ正確に略さず記述のこと．**答えだけが正しいことは正答とみなさない**．日本語での説明中に数式を挿入の形で解答のこと．乱雑な答案や読みにくい答案は大幅に減点する．

注 10) [**重要!!**] 以下の記号, および問題文中で与えられている記号は, 説明なしに用いてよい．その他の記号は答案内で定義せよ．記号の定義を改めても構わないが, 説明のこと．

- 時間を t, 密度を ρ, 空間座標ベクトル (の成分) を x_i, 速度ベクトル (の成分) を u_i, 単位質量あたりの体積力 (外力) ベクトル (の成分) を K_i, 応力テンソル (の成分) を p_{ij}, 熱流束ベクトル (の成分) を q_i, 発熱を Q, 圧力を p とする．
- 単位ベクトル (の成分) を $\boldsymbol{e}_i$, Kronecker デルタを δ_{ij} とする．
- 空間座標を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ の成分を $x_i\,(i = 1, 2, 3)$ とかく．他のベクトルも同様であり, たとえば, 速度 $\boldsymbol{u}$ の x_i 方向成分は u_i である．
- 無効添字 (ダミーインデックス, 死んだ添字) に対しては, Einstein の総和規約を用いる．もちろん, 総和記号を消去せずに残しても正答とする．

注 11) [**重要!!**] 問 5 以外は添字表現を用いること．ただし, 添字表現に加えて, ベクトル表現や成分表現も書くことは妨げない．

注 12) 熱力学の法則を使う際に, 問題に即して, 準静的過程や可逆過程を仮定して構わない．

注 13) Twins から授業評価アンケートへの回答をお願いいたします．

応用流体力学 (金川) 期末試験問題　　2023 年 12 月 26 日 (火) 12:15–15:00 実施

1. 任意の連続体において次式が成立する (記号の定義は表面参照).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{A}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i \tag{B}$$

$$\frac{\partial \rho (u_k^2/2 + e)}{\partial t} + \frac{\partial \rho (u_k^2/2 + e) u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho K_j u_j + Q \tag{C}$$

   1) 式 (A) を導け. (注) Gauss の発散定理は証明不要.
   2) 流体粒子の流れに沿う, 単位質量あたりの内部エネルギー e の変化を与える式を導け. (注) Lagrange 微分の Euler 的表現は導出不要.
   3) 式の本数と未知変数の個数をスカラーで答えよ (答えのみで可). さらに, 未知変数の方が多いが, (A)(B)(C) の解を求めたい場合に, どのような方策を講じなければならないかについて, 数式を可能な限り用いず, 日本語 50 から 100 文字程度で答えよ.

2. 粘性と熱流束と発熱が無視できる流れを考える. このとき, 単位質量あたりのエントロピー s が, 流体粒子の流れに沿って一定であることを示せ.

3. 等方性の Newton 流体を考える.

   1) Newton 流体の定義から出発し, 構成式を導け. (注) ひずみ速度テンソルを与える式は導出不要. 次の 2 階と 4 階の等方テンソルは既知で可 (係数 a, A, B, C はいずれも定数).

$$2\,階：\ a\delta_{ij} \qquad 4\,階：\ A\delta_{ij}\delta_{k\ell} + B\delta_{ik}\delta_{j\ell} + C\delta_{i\ell}\delta_{kj}$$

   2) Navier–Stokes 方程式を導け. ただし, 第一粘性係数 μ, 第二粘性係数 λ がいずれも “定数ではない (変数である)” ことに注意せよ.
   3) 非圧縮性流れの場合に, 2) の解答において消える項を漏れなく指摘せよ. 理由も簡単に述べよ.

4. 外力が保存力であり, 定常で非粘性の圧縮性流れを考える. このとき, Bernoulli の定理を導け. 単位質量あたりのエンタルピー h を用いること.

5. 2 次元非圧縮性の渦なし流れを考える. 座標を (x, y), 速度の x 方向成分を u, y 方向成分を v とする. (注) 数学で既習の公式は証明不要.

   1) 流れが 2 次元非圧縮性であることと流れ関数 Ψ が存在することは同値であることを示せ.
   2) 流れ関数 Ψ が一定となる曲線は流線に等しいことを説明せよ.
   3) 流れ関数 Ψ と速度ポテンシャル Φ が, ともに, 2 次元の Laplace 方程式に従うことを示せ.
   4) 複素速度ポテンシャル $F(z)$ が正則関数である理由を説明せよ (簡潔でもよい).
   5) 次式を示せ. ただし, $z \equiv x + \mathrm{i}y$, Γ_C は複素数平面上の任意の閉曲線 C に沿う循環, 記号 $[\Phi]_C$ は Φ の C について 1 周時の変化, 記号 Re は複素数の実部を意味する.

$$\mathrm{Re}\left[\oint_C \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right] = \Gamma_C = [\Phi]_C \tag{D}$$