注意事項 [応用流体力学 小テスト] 2023 年 11 月 14 日 (金) 12:15–14:55 実施

注 1) 監督者の指示に従うこと. **不正行為には学群学則で定める厳罰を課す**.

注 2) 表面 (本頁) に注意事項 (要精読), 裏面に問題が載っている. 両面印刷を確認のこと.

注 3) 鉛筆 (シャープペンシルと替え芯), 消しゴム, 時計のみ使用, 提示可. 電卓, 筆箱, 定規などは一切使用不可. **携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまう**. 鞄のチャックをしめて床におく.

注 4) やむなくトイレなどの一時退室を希望する場合は挙手のこと. **携帯電話をポケットに入れたまま退室すると, 不正行為とみなす**. ただし, 13:45 以降は認めない. 複数名が同時に一時退室することも認めない.

注 5) 13:45 より提出退席を許可する.

注 6) 答案用紙全てに記名のこと. 不足時には挙手のこと. 答案用紙右肩に, **1/3, 2/3, ⋯ のように, 計何枚中何枚目かを明記**のこと.

注 7) ある問題の解答において**導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 導出や証明を繰り返すことなく, 引用の形で用いてよい**. 引用の際は, 答案の式の番号と問題の番号などを区別の上で記載し, **どの公式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと.

注 8) 考え方の筋道, 式変形の根拠, 途中計算を, 論理的かつ正確に略さず記述のこと. **答えだけが正しいことは正答とみなさない**. 日本語での説明中に数式を挿入の形で解答のこと.

注 9) [**重要!!**] 以下の記号, および問題文中で与えられている記号は, 説明なしに用いてよい. その他の記号は答案内で定義せよ. 記号の定義を改めても構わないが, 説明のこと.

- 時間を t, 密度を ρ, 空間座標ベクトル (の成分) を x_i, 速度ベクトル (の成分) を u_i, 単位質量あたりの体積力 (外力) ベクトル (の成分) を K_i, 応力テンソル (の成分) を p_{ij} とする.
- 単位ベクトル (の成分) を $\boldsymbol{e}_i$, Kronecker デルタを δ_{ij} とする.
- 空間座標を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ の成分を $x_i\,(i = 1, 2, 3)$ とかく. 他のベクトルも同様であり, たとえば, 速度 $\boldsymbol{u}$ の x_i 方向成分は u_i である.
- 無効添字 (ダミーインデックス, 死んだ添字) に対しては, Einstein の総和規約を用いる. もちろん, 総和記号を消去せずに残しても正答とする.

注 10) [**重要!!**] 問 9 以外は添字表現を用いること. ただし, 添字表現に加えて, ベクトル表現や成分表現も書くことは妨げない.

応用流体力学　小テスト問題　2023 年 11 月 14 日 (火) 12:15–14:55 実施

(注意) 表面の注意事項を隅々まで読んでから解答のこと.

1. 単位ベクトルと単位ベクトルの内積が Kronecker デルタに等しいことを説明せよ.

2. 以下の各式について, 左辺から出発し, 右辺の成立を示せ.

   $$(1)\ \boldsymbol{u} = u_j \boldsymbol{e}_j \qquad (2)\ \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (3)\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \qquad (4)\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} = u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

   ただし, $\boldsymbol{e}$ は単位ベクトル, j は無効添字であり, Einstein の総和規約を用いている.

3. 多変数関数の Taylor 展開を用いて, Lagrange 微分 D/Dt の Euler 的な表現を導け.

4. 流体中に固定された体積 V を考え, その表面積を S とする[1]. 表面にとられた外向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする. 固定体積内の質量の増減を考察し, 質量保存則を意味する偏微分方程式 (連続の式) を導け. Gauss の発散定理を証明せずに既知として用いてよい.

5. ある時刻において, 流体中の 2 点の速度を Euler 的に表現し, 速度差に着目する. このとき, 速度勾配テンソル $\partial u_i/\partial x_j$ を誘導せよ (2 次以上の項を無視してよい). さらに, 速度勾配テンソルを対称成分 (ひずみ速度テンソル e_{ij}) と反対称成分 (渦度テンソル ω_{ij}) に分割せよ. 対称性と反対称性の確認は不要である. 問 3 との違いに注意のこと.

6. 保存則を閉じるための構成則について考える.

   (1) 一般に構成則 (構成式) とは何か, 等方性とは何か, それぞれ, 日本語で簡潔に述べよ.

   (2) Newton 流体と Hooke 弾性体の定義を, 両者の類似と相違に触れながら, 日本語で精確に述べよ.

   (3) Taylor 展開を用いて, 等方性の Newton 流体の構成式を導け. 最終的に, 圧力 (静水圧) p, 第一粘性係数 μ, 第二粘性係数 λ を導入のこと. ただし, 以下の 2 階と 4 階の等方テンソルを既知として用いてよい (係数 a, A, B, C はいずれも定数).

   $$2\text{階：}\ a\delta_{ij} \qquad 4\text{階：}\ A\delta_{ij}\delta_{k\ell} + B\delta_{ik}\delta_{j\ell} + C\delta_{i\ell}\delta_{kj}$$

7. 以下の運動量保存則 (既知としてよい) の左辺の変形に着目して, 任意の連続体の運動方程式を導き, 各項の物理的意味を日本語で簡潔に述べよ. ただし, Lagrange 微分を用いて表現のこと.

   $$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i \ (i = 1, 2, 3)$$

8. 応力の発散を計算し, Navier–Stokes 方程式を導け. ただし, μ と λ が定数である場合に限定する.

9. 以上の結果をふまえ, 非圧縮性流れを考える.

   (1) 非圧縮性流れの定義式を書き, その物理的な意味を日本語で述べよ.

   (2) 2 次元の非圧縮性流れにおいて, 連続の式と Navier–Stokes 方程式をそれぞれ書き下せ. ただし, ここでは Lagrange 微分を使わないこと. また, 添字には, 記号 (i や j) ではなく数字 (1 や 2) を用いること.

---

[1] 名称 V と体積 V を区別せず用いる. 面積も同様.