混相流工学講義資料 (2018/12/5 & 12/12)[†1]

担当教員: 金川哲也 (3F305 教員室, 内線 5254)
Email: kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

本資料に沿って板書で進める[†2]. イントロダクションとして, はじめに, 一定量を板書するので, ノートに書き込むことをすすめる. 本題 (2 節) に入ってからは, 板書事項を, 適宜, 資料内に書き込む程度で, 事足りるかもしれない.

混相流の中でも, **「気泡 (bubble dynamics)」**と**「音響 (acoustics)」**に着目する. 扱うトピックは以下のとおりである:

- 気泡力学と気泡流
- 音源としての気泡振動——音響学の概論[†3]
- 単一球形気泡の力学と Rayleigh–Plesset の方程式
- 界面における Laplace の応力つりあい式 (これまでの講義で既習)
- Rayleigh–Plesset 方程式の線形化と単一気泡の固有振動数

1. はじめに

これまでの講義の大きなトピックは, 分散相混相流 (dispersed multiplase flow)[†4], すなわち, 連続相と多数の分散相の相互作用にあった. ここでは, **分散相混相流をよりミクロに眺めること**に主眼をおき, **「1 つ」の気泡**の膨張・収縮運動, すなわち気泡振動の問題を考える[†5].

このような, 1 個, 2 個, ⋯, さらには n 個といった**有限個の気泡の運動を扱う分野を気泡力学** (bubble dynamics) という. これに対し, 無限個の気泡を含む場合を, 気泡流 (bubbly flow)[†6] とよぶことが多く, ふつう, 気泡力学とは差別化が図られる.

[†1] 次回 (12 月 12 日: 金川担当) も必ず本資料を持参してください.

[†2] 板書量が膨大になることを避けるべく, 本資料と板書を併用する. 図表や式変形の詳細を板書する. 板書の画像は, 履修者限定で, manaba にアップロードするので, 必ずしも全てを丸写しする必要はない.

[†3] 本講義のイントロとして, 可能な限り数式を扱うことなく述べる予定である. 本資料には記載せず板書するが, キーワードのみ列挙しておく—— 気体 (gas)・液体 (liquid)・固体 (solid) 中での音速 (speed of sound), 慣性と弾性が音を伝える, **気泡流の場合, 連続相たる液体が慣性を, 分散相たる気泡が弾性を担い, 音速の劇的な低下を招く**.

[†4] [復習] 気泡流 (bubbly flow) の場合, 気泡 (gas bubble) を分散相 (dispersed phase), 液体を連続相 (continuous phase) といった. [問] 液滴流 (droplet flow) の分散相と連続相は何か.

[†5] このような分野は気泡力学 (bubble dynamics) とよばれる. 運動としては, 膨張・収縮 (expansion and contraction) といった振動 (oscillation) 以外にも, 並進運動 (translation) や回転 (rotation) なども重要であるが, 本講義では扱わない. 2 個や n 個の気泡の相互作用も重要であるが, 本講義では扱わない.

[†6] このように, 気泡流の場合は, 形容詞 "bubbly" を用いるが, 古典では, 稀に, 名詞で "bubble flow" と書くものも見受けられる. しかしながら, 気泡力学を, "bubbly dynamics" とよぶものは金川の知る限りは存在しない——ここまで書いて, 自信がなくなり, 念のため, Google Scholor で調べてみたが, "bubble dynamics" が約 18000 件, "bubbly dynamics" が 66 件であった.

2. 問題[†7]

十分に広い領域を満たす液体[†8]中の空洞 (cavity) として, 単一の球形気泡 (single spherical gas bubble)[†9†10]を考える. 液体の無限遠方から伝わる駆動圧力 (driving pressure) によって, 気泡の振動[†11]が誘起される[†12]. このとき, 気泡は振動子すなわち音源 (sound source) となり, 周囲の液体へと音を放射する (acoustic radiation).

音は, 媒質 (medium) の弾性と慣性によって伝わる[†13]. この場合, 気泡の内部の気体が弾性を, 気泡周囲の液体が慣性を, それぞれ担うとイメージするとよいだろう.

空間座標として, 気泡の中心に動径 r の原点 (origin) O をとる. **気泡の周囲を満たす液体がしたがう運動方程式**の導出が主題である[†14]. さて, 主要な仮定と解析の処方箋を以下に列挙しよう:

(i) 初期時刻 $t = 0$ において, 液体と気泡は静止しており (初期条件は静止平衡状態), 無限遠からの圧力駆動 $p_\infty(t)$ によって振動をはじめる.

(ii) 気泡の運動は球対称 (原点対称) とする[†15]. したがって, 形式的に[†16], 空間 1 次元問題[†17]として取り扱うことができる. 連続体 (流体) 力学の Euler 的立場では[†18], 時間と空間座標

[†7] Load Rayleigh (1917) によって解かれた, ちょうど 100 年の歴史を有する問題である. 正確には, Plesset が表面張力の効果を, Poritsky が粘性の効果を考慮し, Rayleigh–Plesset の方程式として確立された (1949). その後も, 現在に至るまで, 液体の圧縮性の考慮 (e.g., Keller & Miksis, 1956), 気液界面をとおしての熱・物質輸送の考慮 (Fujikawa & Akamatsu, 1980) など, 今なお研究が盛んである.

[†8] この時点では, 液体でなくともよい. 連続体でありさえすれば, 気体でも固体でもよい. 後にわかるだろう.

[†9] この段階では, やはり, 気泡でなくともよい. 液滴でも固体粒子でも真空でもよい. 後にわかるだろう.

[†10] 気泡は “gas bubble” と直訳するよりも, gas を略して, 単に “bubble” ということが多い.

[†11] 気泡は, Hooke の法則にしたがう線形バネとは異なり, 非線形振動子 (nonlinear oscillator) である (後述). 振動の非線形性は, 気泡周囲液体 (流体) の速度の 2 次の非線形性に起因する.
[基礎] 非線形性の次数とは何か. 具体的な方程式を例示して説明せよ.

[†12] すなわち, 気泡の振動は, 自由振動 (free oscillation) ではなく, 強制振動 (forced oscillation) である.
[問] 強制振動ならば, それを記述する運動方程式は, 非斉次 (非同次: inhomogeneous) の微分方程式となる. どのような非斉次項となるのかを述べよ (先取り). Hooke の法則にしたがう線形ばねを例示して, 自由振動および強制振動の運動方程式を比較せよ.

[†13] [問] 音は真空中でも伝わるか. 光はどうか.

[†14] **[重要]** 気泡力学が対象とするのは, **気泡の内部ではなく “気泡の外側”** である. つまり, 気泡力学とは, ある意味で言葉騙しといえる. 極めて重要な点だが, ここを注意喚起する書物は多くはないがゆえに, **相当数の初学者が誤りに陥る**.

[†15] 球座標系 (r, θ, φ) において, 動径 r のみに依存する場合を, 本資料では, 球対称座標系とよぶ. 脈動球 (pulsing sphere) の運動を思い浮かべるとよい.

[†16] 「形式的な」と防御したのは, 空間座標がたとえ 1 つであっても, 運動そのものは 3 次元的であるからである. 直交座標系 (orthogonal (Cartesian) coordinate) における空間 1 次元問題と同一視してはならない.

[†17] したがって, 気泡周りの液体は, 渦度 (vorticity) がゼロの渦なし流れ (irrotational flow) である.

[†18] これも, 連続体力学 (continuum mechanics) でありさえすれば, 流体力学 (fluid mechanics) に限らず, 弾性力学や塑性力学であっても共通の概念である.
[基礎] 連続体力学における Euler 的な立場と Lagrange 的な立場の定義と差異を述べよ. それぞれの独立変数が何かに注視し, どの立場がどのようなときに有用かを検討せよ.

(temporal and spatial coordinates) を独立変数とするのだから, 時間 t と動径 (radius) r

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

の 2 つが独立変数である[†19]. ここに, $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ は Cartesian 座標である. したがって, 全ての従属変数は, t と r の 2 変数関数であって, その記述は偏微分法に支配される.

(iii) 従属変数は, 速度 (flow velocity) の r 方向成分 u と, 圧力 (pressure) p の 2 変数である[†20].

(iv) 気泡周囲の**液体は非圧縮性**[†21†22]であって, その密度は定数 ρ_{L0} とする[†23]. もちろん, 気泡内気体は圧縮性流れに他ならない (なぜか).

(v) 気泡周囲の液体の粘性の効果は無視できるほどに小さく, **粘性は気液界面のみに作用**する.

(vi) 気泡内気体は, 不凝縮性気体 (non-condensable gas) と, 凝縮性気体 (すなわち蒸気) から構成される. ここに, 気泡内気体の圧力 p_B は, 前者に対する圧力 p_G と後者に対する対する蒸気圧 (vapor pressure) p_V の線形和 (linear combination) で与えられるとみなす:

$$p_B = p_G + p_V \tag{3}$$

ここに, p_B および p_G は流体力学の従属変数であるが, **蒸気圧 p_V は物性値 (定数)** とみなすことに注意を要する[†24†25].

(vii) 気泡内の不凝縮性気体は, 熱力学のポリトロープ変化の状態方程式に従い, その質量は一定である.

(viii) 気液界面をとおしての熱および物質の輸送は無視する.

[†19] 独立変数 (independent variable) とは何か. 従属変数 (未知変数: dependent/unknown variable) とは何か.

[†20] 速度は運動学的変数, 圧力は熱力学的変数である.
[基礎] 運動学 (kinematics) とは何か. 力学 (mechanics) との差異は何か.

[†21] 非圧縮性の媒質 (incompressible medium) とは, 音が無限大の速度で伝わる媒質に相当する (音速 $\to \infty$ の極限). すなわち, 膨張収縮運動から瞬時に回復する (情報が一瞬で伝わる) というイメージが対応する.

[†22] 液体は, 渦なしの非圧縮流れであるがゆえに (なぜ渦なしといえるのか), Laplace 方程式

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) = 0 \tag{2}$$

にしたがう (Φ は速度ポテンシャル). これを示せ.
すなわち, 非線形の基礎方程式系を解くことなしに, Laplace 方程式 (線形方程式) から速度を, 圧力方程式 (Euler の運動方程式の第一積分) から圧力場を, それぞれ求めることができるが, 本資料ではこれを解くことは避ける.

[†23] 気泡振動が放射する音の有限速度での伝播を観察したいならば, 液体の圧縮性が果たす役割こそが本質となる. 非圧縮性液体の仮定は, 音が無限大の速度で伝わることを課す. しかしながら, それでも, 気泡運動の本質は抽出できるし, 圧縮性を考慮する拡張に大きな困難はない. 圧縮性液体中の気泡の運動方程式としては, Keller–Miksis の方程式 (1956) などが有名であるが, その導出のための計算量はいささか多く, 本講義の後で学ぶべきである.

[†24] 気泡壁 (気液界面: bubble–liquid interface) をとおしての気体の凝縮 (condensation) および液体の蒸発 (evaporation) は考えないことも多い.

[†25] たとえば, 不凝縮性気体として空気を, 凝縮性気体として水蒸気 (water vapor) を, それぞれ例示することが多い.

3. 質量保存則——気泡壁を速度で表現する

気泡の周囲の液体は連続体 (continuum) であって, その運動は, 既習の流体力学 (あるいは連続体力学) の基礎方程式系にしたがう.

基礎方程式系 (basic set of equations) とは[†26], 質量, 運動量[†27], エネルギーの保存の法則 (conservation laws of mass, momentum, and energy) の偏微分方程式[†28]による表現である[†29]. これらを一気に列挙することは控えて, 一つ一つを眺めてゆこう.

3.1. 非圧縮性流れの連続の式

まず, 質量保存則を表現する偏微分方程式として, 連続の式 (equation of continuity) は,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{4}$$

とかけた[†30].

ところで, 非圧縮性流れとは, Lagrange 微分 D/Dt[†31]を用いると, 次式で定義された[†32][†33]:

$$\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{grad})\rho = 0 \tag{6}$$

[†26] 方程式系 (set of equations) とは, 連立方程式 (coupled equation) と同義である.

[†27] 厳密には, 角運動量 (angular momentum) も保存量 (conserved quantity) である.

[†28] 積分形の保存則でも, 物理的意味は変わらない. 偏微分方程式 (PDE: partial differential equation) を用いる理由は, 単に, 解析のしやすさ, 数値計算の容易さを見越してのことである.

[†29] すなわち, 古典力学 (classical mechanics) としての Newton 力学 (Newton の運動の法則) に他ならない. どこからともなく質量がわき出ることはありえないし, 連続体の微小要素に作用する力がなす力積は, その要素に流入出する運動量に等しい.

[†30] ベクトルの成分を用いて書き下しておこう. **Cartesian (直交, カーテシアン, デカルト) 座標系ならば,**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \tag{5}$$

とかける (**確かめよ**). ここに, $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ および $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ である. 球座標系や円筒座標系ならば, **たとえ球対称問題であっても**, 発散の表現は, 上式とは全く異なることに注意を要する. その一方で, 球対称問題の**勾配**の表現は, Cartesian 座標系のそれと同一である (確かめよ).

[†31] 実質微分あるいは物質微分 (substantial/material derivative) ということもある.
[基礎] これが非線形の演算子であることを確かめよ. $\partial/\partial t$ と D/Dt の差異を数学的および物理的側面から述べよ. 演算子の各項の物理的意味を述べよ.

[†32] 密度が定数であることを, 非圧縮性流れの定義とする書物も多いので注意を要する. 重要なことは, 書物内で首尾一貫しているか否かであって, どちらの定義が正しいかは問題ではない. 極論, 自身で定義すればよい.

[†33] [基礎] つぎの基礎的な物理量について, (A) 連続体力学における物理的意味を述べよ ($\boldsymbol{u}$ が速度である場合, 変位である場合にわけて考えよ). (B) テンソルの階数を述べよ (スカラー (0 階テンソル) か, ベクトル (1 階テンソル) か, などを含め). (C) ベクトルおよびベクトル解析の記号を用いることなく, ベクトルの成分 (スカラー) だけを用いて書き下せ: (i) div$\boldsymbol{u}$, (ii) rot$\boldsymbol{u}$, (iii) $\nabla \otimes \boldsymbol{u}$, (iv) $\boldsymbol{u} \cdot$ grad. ここに, $\otimes$ はテンソル積 (dyadic: ダイアド積) の演算子である (単に, $\nabla \boldsymbol{u}$ と書くことも多い).

非圧縮性流れの仮定 (6) のもとで, 連続の式 (4) は, 次のように簡単化される[†34]:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \tag{9}$$

3.2. 球対称座標系の導入

気泡周囲の非圧縮性液体の球対称振動 (spherical symmetric oscillation) に, 非圧縮性流れの連続の式 (9) を適用する. ベクトルではなく, 成分 (component) を用いて書き下す[†35]:

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0 \tag{11}$$

ここに, 速度 $\boldsymbol{u} = (u, 0, 0)$ および空間座標 $\boldsymbol{r} = (r, 0, 0)$ を用いた (u は速度の r 方向成分)[†36].

これを, 形式的に 1 階の常微分方程式とみなして解こう[†37][†38]. ただちに, 変数分離形への帰着に気づく:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} + 2\frac{\mathrm{d}r}{r} = 0 \tag{12}$$

不定積分[†39]すると, つぎの一般解をうる (過程を省略したが, 確かめよ):

$$u(r,t) = \frac{C(t)}{r^2} \tag{13}$$

[†34] ベクトルばかりであるので, 物理的意味が見えづらいかもしれない. ベクトル解析 (vector analysis) を補足しておこう. つぎのように書いてもよい (全ての等号 (equal sign) の成立を確かめよ):

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{u} \equiv \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\cdot(u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{7}$$

ここに, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{z}$ はそれぞれ, x_1, x_2, x_3 方向の単位ベクトル (unit vector) である. 総和記号を省略することを Einstein の総和規約 (summation law) という. 上式の意味で, 無効添え字 (dummy index) は, j でなくとも, i でも ℓ でも, なんでもよい. 久々と思うかもしれないが, ベクトルの内積 (inner/scalar product) の定義にしたがって, 単位ベクトルの性質も確認しておこう:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} \equiv |\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\cos 0 = 1\times 1\times 1 = 1, \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1, \cdots \tag{8}$$

このような計算を, 基礎的で当たり前と軽視せずに, 紙に 1 行 1 行地道に書き下して確かめる作業が重要である.

[†35] [基礎] 球座標系 (r, θ, φ) に対するベクトルの発散の表現を書き下せ. その上で, 球対称運動の仮定のもとで, 発散が以下のように書けることを示せ:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \tag{10}$$

[†36] 太字のベクトル $\boldsymbol{u}$ と, その成分のスカラー u を, 決して混同してはならない. $\boldsymbol{r}$ と r についても同様である.

[†37] [重要] なぜ, 2 変数関数 $u = u(r,t)$ でありながら, 形式的に常微分方程式 (ODE: ordinary differential equation) とみなす操作が許されるのか. **微分方程式の中に時間 t が含まれないから**である. t を一旦パラメータとみなすのだが, **一般解に含む任意性の中に t 依存性をとりこむ**ことを忘れてはならない.

[†38] [別解] 速度に $u(r,t) = C(t)D(r)$ と変数分離解を仮定してもよい. この場合の解を求め, (13) との一致を示せ.

[†39] [基礎] 不定積分 (indefinite integral) ではなく, 定積分 (definite integral) したとしても, 矛盾なく, 一般解が得られる. これを確かめよ.

ここに, C はパラメータ t に依存する任意変数 (任意関数) である. **"1 階"**の微分方程式の一般解なのだから, **"1 個"**の任意性を含むことは, 基礎でありながら重要である[†40][†41][†42].

3.3. 境界値問題の解

境界条件 (boundary condition)[†43]としては, 気泡壁 (bubble wall) の速度[†44][†45]

$$\dot{R} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

が気泡周りの液体の速度と等しいこと, すなわち, 気泡半径 $R(t)$ について次式を課す[†46][†47]:

$$u = \dot{R} \quad \text{at} \quad r = R(t) \tag{15}$$

境界値問題 (boundary value problem)[すなわち (13)(15)] の解として, 次式をうる (確かめよ):

$$u(r,t) = \frac{\overbrace{R^2\dot{R}}^{t\text{ 依存}}}{\underbrace{r^2}_{r\text{ 依存}}} \tag{16}$$

分子 (numerator) は, 気泡半径 $R(t)$ およびその導関数 (derivative) から構成されていることからわかるように, 時間依存関数である一方で, 分母 (denominator) は空間すなわち動径 r に依存する関数であることに注意しよう.

---

†40 なぜならば, このような地道な検算をとおして, 自身の計算に含まれる大きな誤りを, 自身で正すことができる力へとつながるからである.

†41 [基礎] 微分方程式の一般解 (general solution), 特殊解 (特解: particular solution), 特異解 (singular solution) の定義と差異を述べよ. さらに, 基礎的な常微分方程式を例示して, これらを例示せよ.
[ついでながら] 特異解は (分野によるが) めったに現れない.

†42 [基礎]1 階線形偏微分方程式の一般解には, 1 個の任意変数 (任意関数: arbitrary variable) を含む. これを, 理由を含めて理解すると同時に, 常微分方程式の場合の差異を明確にせよ.

†43 いうまでもないが, 任意関数 $C(t)$ の決定のためには, 境界条件を課す必要がある.

†44 ドット記号 $\dot{f}$ は時間微分を意味する記号であって, 表記の簡潔さを狙う以上の意図はない. 時間 (1 変数) と空間 (3 変数) の合計 4 変数関数を扱う流体力学では用いないことが多いが, 気泡力学においては, 質点の力学のように, 時間 1 変数の問題に帰着することが多いがゆえに, ドット記号は多用される.

†45 **[基礎だが重要]** 気泡径が, $R(t)$ と時間に依存するのは, なぜなのか. いうまでもなく, 気泡が振動しているから, 時間依存の現象を眺めているからである. それでは, なぜ, 空間には依存しないのか. すでに, 気泡壁という, 自身の位置を固定しているからである. **気泡壁に乗って界面の運動を観測している**のである. ここで, Lagrange 的立場を思い返して, 対応付けるとよいだろう. この意味で, 「Euler 的立場ばかりが使われるのに, Lagrange 的立場を学ぶ意味がどこにあるのか」という消極的な学習姿勢を非難することも可能である.

†46 **[極めて重要]** これを課さないならば, 何が生じうるだろうか. 液体が気泡の内部にしみこんだり, 気泡と液体の間に真空が生ずる (たとえば, 気泡壁が 10 m/s で膨張しているとき, 液体の速度が 11 m/s であるならば, どうなるか). これらは, **質量保存則 (4) が許さない.** なお, 本講義では, 界面をとおしての相変化や物質移動は無視している.

†47 [問 1] 境界条件が "1 つ" でよいのはなぜか. [答 1] 任意 (未知) 変数が "1 つ" だからである.
[問 2] 境界条件の個数と未知変数の個数に過不足が生じたならば, どうなるか. 具体例を例示して説明せよ.

4. 運動量保存則——Rayleigh–Plesset の方程式の左辺を得る

4.1. Euler の運動方程式

任意の連続体に対して[†48], Newton の運動の第二法則, すなわち運動量の保存法則を立てる. 連続の式をも援用し, いくらかの計算を行う[†49]. すると, 運動方程式は,

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{P} + \rho \boldsymbol{K}, \quad \rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i \tag{17}$$

と偏微分方程式の形で導かれる[†50][†51]. ここに, ρ は密度 (質量密度), $\boldsymbol{P}$ は応力テンソル (stress tensor)[†52][†53], $\boldsymbol{K}$ は連続体の単位質量あたりに働く体積力ベクトル (body force) である[†54].

気液界面を除いて, 液体の粘性の影響は無視できると述べた. そこで, 気泡周囲液体には, 流体力学で学んだ, 等方性[†55]の非粘性流体 (istropic inviscid fluid) に対する応力の表式にしたがうとする[†56][†57]:

$$\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I}, \quad p_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{18}$$

これを代入すると, 見慣れた Euler の運動方程式をうる:

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\mathrm{grad} p + \rho \boldsymbol{K}, \quad \rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho K_i \tag{19}$$

[†48] もちろん, 流体でなくともよい. 弾性体や塑性体や粘弾性体などでも成立する. 連続体であること以上の制約はない.

[†49] 連続体力学や流体力学の基本中の基本であるがゆえに, 既習事項とみなして省略した. しかし, 当たり前と思わずに, 途中計算を補完せよ.

[†50] ここから, ベクトル表記と, Cartesian 座標系における添え字表記を並記する. 理解しやすい方, 使いやすい方を用いればよい. 表記は好みにすぎないが, **相互に書き換えができることは必須**である. さもなくば, 文献すら解読できないからである.

[†51] [問] Newton の運動の第二法則に従って, これを導け. ただし, 連続体中に**任意の形の閉曲面**を考えて, 運動量の流入出, および, 力 (体積力と面積力) による力積 (impluse) の寄与を議論せよ. ここでは, 任意の形を仮定することに価値がある. 直方体や準 1 次元流れなどのバランスに頼ることなく, ベクトル解析および Gauss の発散定理に基礎をおいて導け. 流体力学あるいは連続体力学の成書を参考にするとよい.

[†52] [基礎]$\boldsymbol{P}$ は 2 階テンソルであって, 9 つの成分を持つことを確かめよ.

[†53] [基礎] 応力テンソルと応力ベクトルの差異を述べよ. 応力ベクトルではなく, 応力テンソルが積極的に用いられることの意義を述べよ.

[†54] [例] 重力や電磁気力などが相当する. 内力としての応力が束縛力であることに対して, 体積力は非束縛力といえる (今井, 古典物理の数理, 2003).

[†55] [問] 等方性とは何か. 等方性と等方テンソルの関係を述べよ.

[†56] $\boldsymbol{I}$ は単位テンソル (unit tensor), δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号であって, $\boldsymbol{I}$ の成分が δ_{ij} であって, $\boldsymbol{I} = \{\delta_{ij}\}$ と書ける. 自明なものとして, 定義を与えないことも多い. その意味で, あえて脚注に記す.

[†57] 応力を与える構成方程式 (constitutive equation) の代表例を挙げよ. たとえば, 等方性の線形弾性体 (Hooke 弾性体) に対する応力をひずみで与える表式や, 等方性の線形粘性流体 (Newton 流体) に対する応力とひずみ速度 (rate of strain) の関係を述べよ. いずれも, 決して, **運動が線形なのではなく, 応力とひずみ (速度) の関係が線形であることに注意せよ**.

以後, 簡単のため, 外力 $\boldsymbol{K}$ を無視する. 結局, 球対称座標系においては, 1 本のスカラー方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{20}$$

に帰着する. 運動が (形式的に) 空間**「1 次元」**なのだから, 運動方程式も**「1 本」**である[†58].

4.2. 気泡壁の非線形発展方程式

前節で得た速度の解 (16) を u に代入して, 一直線の計算 (straightforward cauculation) を行うと, 左辺は[†59][†60]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2R\dot{R}^2+R^2\ddot{R}}{r^2}-\frac{2R^4\dot{R}^2}{r^5} \tag{21}$$

両辺を, 液体の無限遠 $r\to\infty$ から気泡壁 $r=R(t)$ の領域, すなわち, $[R(t),\infty)$ で定積分する[†61]. 右辺の積分計算を進めよう:

$$\int_{R(t)}^{\infty}\frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{d}r\underbrace{=\int_{R(t)}^{\infty}\mathrm{d}p}_{\text{置換積分}}=[p(r,t)]_{r=R(t)}^{r\to\infty}=\lim_{r\to\infty}p(r,t)-\underbrace{p(R(t),t)}_{\text{実質 }p(R(t))}=p_\infty(t)-p(R(t)) \tag{22}$$

ここに, 第 2 項 $p(R(t))$ は気泡壁に作用する液体の圧力[†62], 第 1 項 $p_\infty(t)$ は液体の無限遠方から気泡に課される圧力であって, 既知の駆動力 (driving force) に相当する[†63].

左辺も同様に積分し (補完せよ), 整理すれば, 次式が導かれる:

$$\rho_{L0}\left[R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]=p(R(t))-p_\infty(t) \tag{23}$$

これは, **非同次 (非斉次) の 2 階定数係数常微分方程式**であって[†64], R **に対して 2 次の非線形性を有する**. すなわち, 左辺第 1 項は加速度 $\ddot{R}$ と気泡壁 R の積, 第 2 項は速度 $\dot{R}$ の 2 乗であり, ともに非線形項[†65]である. “非線形の”微分方程式ゆえに, 手計算で厳密解を求めることはでき

[†58] もっといえば, 速度も運動量も力積も, 1 個のスカラーとなる (確かめよ).

[†59] [注意 (案外馬鹿にできない)] $\dot{R}^2$ とは, $\dot{R}^2=\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2$ であって, $\dot{R}^2=\dfrac{\mathrm{d}R^2}{\mathrm{d}t}$ ではない.

[†60] 煩雑な結果と思うかもしれないが, 次元に注視すれば, 間違うことはありえない. つまり, 各項の次元を確かめよ.

[†61] $[a,b]$ とは, $a\le x\le b$ を意味する (等号付き不等式).

[†62] 厳密には, $p(R(t),t)\equiv p(R(t))$ とみなしている (独立変数 t 依存性の全てを $R(t)$ の中に集約した).

[†63] $\displaystyle\lim_{r\to\infty}p(r,t)=p_\infty(t)$ を仮定した. $p_\infty(t)$ の関数形は, 自身で指定する必要がある.

[†64] [基礎] 微分方程式の適切な分類ができるかを復習せよ.

[†65] 非線形性は, 一体, 基礎方程式系のどこから持ち込まれたのか (導出過程を注意深く眺めよ). それは, **周囲液体の非線形性**である. 決して気泡振動ではない (気泡の中からではなく**「外から攻める」**といったばかりである). 対流項 $(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{u}$ に他ならない.

ない[†66][†67]. 多くの場合, 有限差分法に頼り, 近似解を求める[†68].

(23) の左辺は慣性 (加速度) 項, 右辺第 2 項は駆動力であるが, では, **弾性や粘性の効果はどこにあるのか. 実は, 右辺第 1 項に隠れている**のである[†69]. だからこそ, この, 界面における圧力というわかりにくい項を, わかりやすい形に変形する必要がある. それが次節の主題である.

5. Rayleigh–Plesset の式の圧力項の変形

(23) 右辺は, 気液界面での液体の圧力 $p(R(t))$ および液体の無限遠からの駆動圧 $p_\infty(t)$ から構成される. むろん, 後者は既知の関数として与えるが, 前者はどのように与えるのだろうか.

そもそも, 気液界面における圧力は, これほどに単純極まりない問題設定であっても, なお, 時々刻々と複雑に変化する. それゆえ, $p(R(t))$ の項を変形することが望まれる. そのためには, 気液界面における応力のバランスを与える Laplace の式をはじめとして, いくらかの知識を要する.

雰囲気をつかむべく, 先に, 結果だけ示しておこう:

$$p(R(t)) = \left[\left(p_{\infty 0} - p_V + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + p_V - \frac{2\sigma}{R(t)} - \frac{4\mu}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right] \tag{26}$$

ここに, μ は液体の粘性係数[†70], σ は表面張力係数[†71], p_V は蒸気圧, R_0 は初期気泡径 (initial bubble radius), γ は気泡内の不凝縮性気体[†72] のポリトロープ指数 (polytropic index) である. いかにも複雑そうであるが, **実は, この形こそが応用上有用極まりない**.

---

†66 [発展] 非線形微分方程式であっても, 厳密解が存在する場合もある. 振動や波動の分野における著名な例を挙げておこう: (i) Burgers 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + f\frac{\partial f}{\partial \xi} = C\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \tag{24}$$

の Cole–Hopf 変換による解 [衝撃波 (shock wave) を記述]. (ii) KdV (Korteweg–de Vries) 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + f\frac{\partial f}{\partial \xi} = C\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} \tag{25}$$

の孤立波 (solitary wave) あるいはソリトン (soliton) 解は, 水面波 (surface water wave) のモデル方程式として著名な 1 つである (τ は時間, ξ は空間座標, f は未知変数, C は定数). 両方程式ともに, 気泡流中の音の非線形伝播とも関連深い (時間があれば扱う予定). van Wijngaarden (1968, 1972) の先駆的研究が挙げられる.

†67 [基礎] 式 (24) の非線形項を無視すると, 周知の拡散 (熱伝導) 方程式に帰着する (確かめよ). 同様の意味で, (25) の非線形項を無視した方程式は, 線形分散方程式とよばれる. [演習] これを有限差分法で解いてみよ.

†68 線形化して, 線形振動 (振幅が無限小の振動) の問題を解くことも多い.

†69 現時点では, 粘性減衰強制振動系の方程式 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \sin\omega t$ の左辺第 1 項しか表には現れていない.

†70 簡単のため, 気泡周りの液体の粘性の効果を無視したが, それでもなお, **気液界面 (気泡壁) の粘性は考慮**することが多い.

†71 単に表面張力 (surface/interfacial tension) ということもあれば, 界面張力などとよぶこともある. 物性値 (physical property) である.

†72 気泡内気体の全てを不凝縮性気体とみなすこともある. この場合, p_V はゼロとなる.

5.1. 気液界面に働く粘性力

流体力学 (あるいは連続体力学) で学んだように, 応力 $\boldsymbol{P}$ が, ひずみ速度テンソル[†73][†74][†75][†76]

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\left[\nabla\otimes\boldsymbol{u}+(\nabla\otimes\boldsymbol{u})^T\right],\quad E_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \tag{29}$$

に**比例する流体をNewton流体 (線形粘性流体)** [†77][†78]とよぶ. ここに, T は転置行列 (transposed) を意味する. 応力もひずみ速度も, **2 階のテンソル量であって, 9 つの成分**を持つ[†79][†80].

ここで, **等方性を課す**[†81][†82]. すると, 天下りではあるが, Newton 流体の構成方程式をう

---

†73 [テンソル (tensor)] 応力 (stress), ひずみ速度 (rate of strain), ひずみ, これらは全てテンソル量である.
[問] テンソルとは何か. テンソルは, スカラー, ベクトル, 行列と何が異なるのか.

†74 速度勾配テンソル $\nabla\otimes\boldsymbol{u}=\{\partial u_i/\partial x_j\}$ が, ひずみ速度テンソル $\boldsymbol{E}=\{e_{ij}\}$ と渦度テンソル (渦度ベクトルではない!!) $\boldsymbol{\Omega}=\{\omega_{ij}\}$ の和で表されること, すなわち, 次式を示せ:

$$\nabla\otimes\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}[\nabla\otimes\boldsymbol{u}+(\nabla\otimes\boldsymbol{u})^T]+\frac{1}{2}[\nabla\otimes\boldsymbol{u}-(\nabla\otimes\boldsymbol{u})^T]=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Omega} \tag{27}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]=e_{ij}+\omega_{ij} \tag{28}$$

性質「任意のテンソルは対称テンソルと反対称テンソル (antisymmetric tensor) の和で表現される」を用いる.

†75 [渦度のスカラー, ベクトル, テンソル] 渦度テンソル ($\boldsymbol{\Omega}$ あるいは ω_{ij}) と渦度ベクトル ($\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}$ あるいは $\omega_i=\varepsilon_{ijk}\partial u_k/\partial x_j$) の関係を述べよ. ここに, ε_{ijk} は Eddington のイプシロン (交代行列: alternating tensor) である.
[ついでながら] 渦度の大きさとは, 渦度ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{\omega}|$ に他ならない (速度成分を用いて書き下せ).
[用語] 渦度テンソルという名称は, そこまで一般的ではなく, 用いない書物も多い.

†76 [連続体力学] このあたりの議論の本質は, 弾性力学と全く同じであるがゆえに, 流体力学として独立に学ぶことは推奨しない. 大学院学生ならば, **連続体力学として統一的に学び, その後に, 流体 (気体と液体) と固体へと分類する**ことを強くすすめる. ひずみテンソルの変位ベクトルによる表現, および, ひずみ速度テンソルの速度ベクトルによる表現を比較せよ.
[注意] 変位 (displacement) と空間座標 (spatial coordinate) を混同してはならない. Euler の立場によれば, 変位は従属変数, 空間座標は独立変数である.

†77 **[重要注意] 運動が線形なのではない!! (ここを勘違いする者が相当数).** そうではなくて, 応力とひずみ, あるいは, 応力とひずみ速度の関数関係が, 線形 (比例関係) というだけである.

†78 ベクトルやテンソル積 $\otimes$ の記号を使う場合 (前者), 添え字の表現を使う場合 (後者), 半々であるように見受けられる. ただし, **後者の表現は, Cartesian(直交) 座標系に限定**されることに注意を要する (円筒座標系や球座標系に変換してみよ).

†79 [練習] 添え字 i と j のそれぞれに対して, 1, 2, 3 を考え, 書き下せ. [参考書] 田代, テンソル解析, 裳華房.

†80 [応力のスカラー, ベクトル, テンソル] ひずみはともかく,「力」というと, ベクトルと勘違いする者が多い. 事実, 応力には, 応力ベクトルと応力テンソルの 2 種類があるので注意を要する (成分はスカラーゆえに, 3 種類ともいえる). [基礎] 応力ベクトルと応力テンソルの差異と関連性を述べよ. 多くの場合, 応力を, ベクトルではなくテンソル量として扱うことの意義や利点を考察せよ.

†81 液体や気体の局所的な変形を等方的とみなすことは, 大胆な仮定とは思わない. 固体の変形ならば, 異方性が目まぐるしく現れるだろうが.

†82 言い換えれば, テンソルが等方テンソルとみなせることを課す.
[基礎] 等方性と異方性の差異を, 等方テンソルと関連付けて述べよ.

る[†83][†84][†85][†86]:

$$\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)(\mathrm{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{I} \tag{32}$$

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{33}$$

ここに, μ は粘性係数, ζ は体積粘性係数[†87], $\boldsymbol{I}$ は単位テンソルである[†88].

簡単のため, **体積粘性の効果を無視**する ($\zeta = 0$)[†89]:

$$\boldsymbol{P} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} - \frac{2}{3}\mu(\mathrm{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{I} \tag{34}$$

---

†83 [構成方程式 (constitutive equation)] ひずみ, ひずみ速度, ひずみ加速度などと, 応力の関係を, 陽に (explicitly) 表現する方程式である. この用語を用いないことも多い.

†84 [重要] 数式表現を見ると, 一見複雑に見えるだろう. しかし, 物理的意味は全く複雑ではなく, 高校物理の知識で理解可能である. 応力 σ を与える経験則 (構成式) は, 1 次元ならば, 噛み砕くと,

$$\sigma \propto \epsilon \quad (\text{線形弾性体}) \tag{30}$$

$$\sigma \propto \dot{\epsilon} \quad (\text{線形粘性流体}) \tag{31}$$

である. Hooke の法則, すなわち, 応力がひずみに比例すること以上を主張しない (線形ばねがしたがう Hooke の法則とも同様). **線形弾性体 (Hooke 弾性体) ならば応力はひずみ ϵ に比例するが, 線形粘性流体 (Newton 流体) ならば応力がひずみ "速度" $\dot{\epsilon}$ に比例**する. 本質はこれだけと言って過言ではない.

†85 ベクトル解析の記号を用いた表現は, 単に, 数学表現の問題にすぎない. 物理的意味は先述以上を主張しない. Hooke の法則を, 3 次元のいかなる座標系にも適用できるように, 一般表現しただけである.
[厳密には] 線形弾性体の応力は圧力を含まない. これに対して, 線形粘性流体の応力は圧力を含む点への注意を要する. ここに, 弾性体と流体の運動方程式すなわち運動量保存則の決定的な差異がある.
[とはいえ] この点への注意は, 金川は, 二の次でもよいと考える (重要でないという意味ではない). この種の難解な数学表現の全てを一度に完全に理解しようとすると, ドツボに陥るからである.

†86 繰り返すが, 2 行目の添え字による表現は, Cartesian 座標系に限定される.

†87 [補足] こう述べても, 流体力学の専攻者以外は, 忘れている, あるいは, わからないだろう. 弾性力学 (もしくは材料力学) における横弾性係数 (剛性率 (rigidity)) が粘性係数に相当し, 体積弾性率 (bulk modulus) が体積粘性 (bulk viscosity) に相当する.
[ついでながら] 流体力学だけに, あるいは, 弾性力学だけに精通しても, (大学院生レベルならば) 無力なのではないかと個人的には感じる. **連続体力学として統一的に理解することを強くすすめる**. 事実, 応力の表現の本質は, 流体と弾性体で, 全く同じといっても過言ではない. 流体を専攻した者が, 材料関連の部署に配属されることはごく当たり前と想像するが, その者が, 果たして, 一から固体力学を勉強し直すことは (時間的にも) 可能なのだろうか.

†88 [単位テンソル] 対角成分 (diagonal component) の全てが 1 で, それ以外の成分がゼロであるテンソルを指す. Kronecker のデルタ記号と同義といってよい.

†89 これは大胆な仮定ではない. 多くの場合, 体積粘性の値の情報がないがゆえにでもある.

球対称座標系における成分 p_{rr} は[†90],

$$p_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} \underbrace{+\frac{2u}{r}}_{\text{球座標特有}}\right) = -p + \frac{4\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) \tag{35}$$

である. **発散の項の $2u/r$ は球座標変換が生み出すもの**であって, 注意を要する[†91]. 最右辺括弧内の速度の動径方向勾配に, 解 (16) を代入すると,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{R^2\dot{R}}{r^2}\right) = R^2\dot{R}\frac{\mathrm{d}r^{-2}}{\mathrm{d}r} = -2\frac{R^2\dot{R}}{r^3} \tag{36}$$

と計算されるがゆえに, 気泡周囲液体がしたがう応力成分 (スカラー) p_{rr} は

$$p_{rr}(r,t) = -p(r,t) - 4\mu\frac{R^2\dot{R}}{r^3} \tag{37}$$

となる. 気泡壁 $r = R(t)$ における[†92] 応力成分を圧力と粘性力で与える表式をうる:

$$\underbrace{p_{rr}(R(t))}_{\text{応力成分 (次節で消去)}} = \underbrace{-p(R(t))}_{\text{圧力}}\underbrace{-\frac{4\mu}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}}_{\text{粘性力}} \tag{38}$$

ここで, 応力成分 p_{rr} と圧力 (静水圧) p を同一視したり混同してはならない. 圧力と粘性力の総和が応力である. 何より, **応力 p_{rr} の向きと圧力 p の向きが異なる**ことに注意を要する (板書).

[†90] p_{rr} とは, 応力テンソルの 1 つの成分であるがゆえに, もちろん, スカラー量である. **応力ベクトルを応力テンソルと混同してはならない**. つまりは, 「応力」を述べる際には, スカラー, ベクトル, テンソルの 3 種類の表現が存在する点に注意を要する. p_{rr} とは, r **軸方向に働く応力の** r **方向成分**を意味する.

[†91] [注意] 添え字表記ばかりに頼る者は, 座標変換の必要性に迫られた際に, この項の存在に頭が行き届かないことが多い. だからこそ, **たとえ, 直交座標系だけで議論する場合であっても, さまざまな表記に慣れ親しんでおくことが重要**といえる. もちろん, ベクトルと添え字による両表現は, 好みに応じてどちらかを使えばよいものではあるが, 自由自在に書き換えられなければ, 誤りに陥るし, そもそも, 数式が表現する物理的意味の解釈などできないだろう.

[†92] **[重要]** こうおいた時点で, 空間 r 依存性が消えることを注意しておきたい. **位置を気泡壁に固定 (すなわち, $r = R(t)$) したのだから, すでに動径 r 依存性は落とされて, 全ての項が時間 t の 1 変数関数**となる.

5.2. Laplace の力のつりあい式と表面張力

気泡や液滴に対して, 内部の圧力と外部の圧力の差 Δp を, 表面張力 (surface tension) で結びつける, 力の釣り合い式を, つぎの **Laplace の式**という[†93]:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \tag{39}$$

ここに, R は気泡や液滴の半径[†94], σ は表面張力係数という物性値である[†95].

気泡力学の問題に対応づけよう. (38) を眺めながら, **気泡内気体の圧力 p_B と周囲液体の応力 p_{rr} の向きが同じであることに注意**して, Laplace の式を立てる:

$$p_B + p_{rr} = \frac{2\sigma}{R} \tag{40}$$

Rayleigh–Plesset の式 (23) の右辺を眺めると, **わかりにくい $p(R(t))$ を含んでしまうではないか**. だからこそ, 上式から, p_{rr} **は消去して, そのかわりに,** $p(R(t))$ **で表現しておく方が都合がよい**. そこで, (40) に (38) を代入して整理する[†96]:

$$p(R(t)) = p_B - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{41}$$

5.3. 気泡内気体の圧力の分解

得られた (41) の右辺を眺めて, すべきことを整理しよう. 右辺第 2 項および第 3 項において, $R(t)$ は求めるべき未知関数であって, 粘性 μ および表面張力 σ は物性値である.

残された p_B とは何を意味するか. それは, 気泡内の気体の圧力である. これを知ることは容易といえるか. 気泡の内部を観ることは, 果たして可能か[†97]. **気泡の周囲の液体を測る方が, 明らかに, 簡単極まりない**. 気泡力学では, ふつう, **周囲液体の情報から, 間接的に (コソコソと), 気泡内部の情報を得る戦略をとる (中からではなく外から攻める)** ことを再強調したい[†98].

気泡内気体は, 空気のような非凝縮性気体と, 水蒸気のような凝縮性気体 (蒸気) からなる混合気体であるとする[†99]. Dalton の分圧の法則より, 混合気体の圧力 p_B は, 非凝縮性気体の圧力 p_G と蒸気圧 p_V [†100]の線形和で与えられる:

$$p_B = p_G + p_V \tag{42}$$

[†93] これまでの講義で既習ゆえに, 導出は省くが, 復習のこと.

[†94] 実験的研究では気泡や液滴の直径を用いるが, 理論的研究では半径を用いることが多いがゆえに, 略語「径」の初出時には注意を要する.

[†95] σ を表面張力とよぶことも多い.

[†96] (41) は, 単一気泡力学にとどまらず, 多数の気泡を含む気泡流においても拡張可能であって, 事実, **多用される**.

[†97] もちろん, 不可能とはいえないが, 困難なのは間違いない.

[†98] [これまでと同様] 気泡の内部に直接迫るよりも, 外側から攻める方が現実的と判断される.

[†99] 簡単のため, 凝縮性気体の影響を無視することは多い. 本資料でも, 本質的な差異はないといってよい.

[†100] 蒸気圧は, 初期条件として設定される気液界面での温度に対する飽和蒸気圧に常に等しい物性値 (定数) であるとみなす. 本資料ではこれに深入りしない.

5.4. 非凝縮性気体の質量保存則

気泡内の非凝縮性気体, すなわち, p_G の効果に迫ろう. 気体は空間的に一様であるとする[†101]. それゆえ, 気体の圧力や密度は, 全て, 時間の 1 変数関数であって, その数理的取扱いは, 気泡壁 $R(t)$ と同様である.

(i) 気泡内の非凝縮性気体の質量は不変である[†102]. これより, 初期時刻 $t=0$, および, 任意の時刻 t のそれぞれにおける気体の質量が不変であること, すなわち, つぎの質量保存則が成立する:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_G = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_{G0} \tag{43}$$

これは, ただちに変形可能である:

$$\frac{\rho_G}{\rho_{G0}} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \tag{44}$$

ここに, 下添え字の 0 は, 初期状態すなわち $t=0$ における値 (初期条件) を明示するものである[†103].

(ii) 気泡内気体は, 熱力学のポリトロープ変化[†104]の状態方程式にしたがう:

$$\frac{p_G}{p_{G0}} = \left(\frac{\rho_G}{\rho_{G0}}\right)^\gamma \tag{46}$$

(44) と (46) を組み合わせると, 次式をうる[†105]:

$$p_G = p_{G0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \tag{47}$$

[†101] 実際には, 非線形振動を行う気泡内の気体は極限状態にある. 一様の仮定なしに全てを知ることは極めて困難である.

[†102] 相変化 (phase change) を無視しているのだから当然である. ただし, 質量は一定だけれども, 膨張・収縮運動によって体積と形は変化することに注意を要する.

[†103] たとえば, 初期気泡径は $R_0 = R(0)$ である. これ以外にも, 添え字 0 を付与された記号は, 初期状態における変数の値とする.

[†104] 熱力学では, 密度 $\rho\,[\mathrm{kg/m^3}]$ の代わりに, 比容積 $v\,[\mathrm{m^3/kg}]$ を用いて, つぎのように書くことが多い:

$$pv^\gamma = p_0 v_0^\gamma = \text{const.} \tag{45}$$

[研究動向] 気泡内気体の体積変化は, 極限状態であって, 等温的なのか, 断熱的なのかは, 古くより今もなお議論が活発である. その議論には, 未だ決着がついて居ないように見受けられる (私見含). この意味で, 熱力学に仮定をおかないポリトロープ変化の状態方程式を課し, 等温と断熱のいずれも取り扱えるようにしておく. すなわち, ポリトロープ指数を $\gamma = 1$ とおけば等温で, $\gamma = \kappa$ とおけば断熱である (κ は定圧比熱を定積比熱で除したもの (比熱比: ratio of specific heat“s”)).

[†105] いま, 右辺の分母が $R(t)$ と時間に依存するのだから, 左辺の分子 $p_G(t)$ が時間依存関数である. 繰り返すが, $p_G(t)$ も $\rho_G(t)$ も, 周囲液体の変数とは異なり, 時間 t の 1 変数関数であることに注意せよ.

5.5. 圧力項の変形

ここまでを, (41) に代入して, 整理しておこう:

$$p(R(t)) = p_{G0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + p_V - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{48}$$

気泡径が定数 R_0 を保つ初期状態においては, 気泡壁速度はゼロ ($\dot{R}=0$) であるがゆえに, 右辺第 4 項 (粘性項) はゼロとなる. ゆえに, (41) は

$$p(R_0) \equiv p_{\infty 0} = p_{G0} + p_V - \frac{2\sigma}{R_0} \iff p_{G0} = p_{\infty 0} - p_V + \frac{2\sigma}{R_0} \tag{49}$$

とかける. ここで, 初期状態において, 気泡周囲液体が気液界面に課す圧力 $p(R_0)$ は, 無限遠からの液相圧力の初期値 $p_{\infty 0} \equiv p_\infty(0)$ に等しいと仮定した. すなわち, $p(R_0) = p_{\infty 0}$ とおいた. これで, (49) を (48) に代入すると, p_{G0} を消去することができる[†106]:

$$p(R(t)) = \left(p_{\infty 0} - p_V + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + p_V - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{50}$$

やっと, Rayleigh–Plesset 式 (23) の**右辺を既知の量だけで表現**することができた[†107][†108]:

$$\rho_{L0}\left[R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = \left(p_{\infty 0} - p_V + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + p_V - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} - p_\infty(t) \tag{51}$$

これは, **非斉次 (非同次) の定数係数 2 階 "非線形" 常微分方程式**である. ふつう, 非線形微分方程式の厳密解を求めることはできない. そのため, 数値的に近似解を求めることが有効である.

初期値問題の数値解を求めるための処方箋を述べる. 初見では, 多数の記号に目を奪われているかもしれないが, 以下のように整理すれば, 困難はない:

(i) 気泡半径 $R(t)$ は求めるべき従属変数であって, その独立変数は時間 t である[†109].

(ii) 非斉次項として, 液体の無限遠から作用する駆動圧 $p_\infty(t)$ の関数形を指定する[†110].

(iii) 初期条件として, 初期気泡径 $R_0 = R(0)$ および初期駆動圧 $p_{\infty 0} = p_\infty(0)$ を与える[†111].

[†106] なぜ消去するのか. やはり, 気泡の内部状態を直接観るのではなく, 外側から間接的に攻める戦略ゆえにである.

[†107] 左辺括弧外の液体密度 ρ_{L0} は, 右辺の分母におくことも多い. しかし, ここでは, 運動方程式における $m\ddot{x}$ との対比, すなわち, 質量と加速度の積という物理的意味を強調する意図で, 左辺においた.

[†108] [発展] 気泡流中の波動とくに音響波の問題を解く際には, 原理上は, 無限個の気泡の膨張・収縮運動を解かねばならないが, それは, 計算機資源の制約上, 不可能である. そこで, 連続相の運動は保存則にしたがうが, 分散相の気泡の径を $R(\boldsymbol{x}, t)$ のように場の平均量に拡張する. 微分演算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ を, 偏微分 $\partial/\partial t$ あるいは Lagrange 微分 D/Dt に置き換える. このように拡張された Rayleigh 方程式を, 均質流 (混合体) モデルや二流体モデルなどの保存方程式系と連立して解くことが多い. 詳細は成書にゆずる—— 日本流体力学会 (編), 混相流体の力学 (朝倉書店) や, 手前味噌ながら, Kanagawa et al., *J. Fluid Sci. Technol.* (2011) など.

[†109] この意味で, たとえば, 横軸に t を, 縦軸に解 $R(t)$ をそれぞれ描くとよい.

[†110] いうまでもなく, 正弦波 (sinusoidal wave) を仮定するのが常套的である.

[†111] 次節で示すように, 無次元化してから解く方が, 一般性を保てるだろう.

(iv) 液体の密度 ρ_{L0} と粘性 μ, 表面張力 σ, 蒸気圧 p_V[†112]は, 物性値ゆえに容易に参照できる[†113].

(v) 気体のポリトロープ指数 γ は, 等温過程, 断熱過程のそれぞれに応じて, 1, κ (比熱比) とおく.

6. 気泡振動の固有振動数——Rayleigh–Plesset の線形化

6.1. 質点力学と気泡力学の対比

質量 m の質点 (おもり) に力 F が働くとき, Newton の運動の第二法則[†114][†115]を立てると,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F \tag{52}$$

なる運動方程式をうる (x は原点からの変位)[†116]. Hooke の法則にしたがう線形バネの粘性減衰振動, すなわち, 変位 x に比例する復元力と速度 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ に比例する抵抗力を伴う強制振動問題を考えるならば, 力 F は

$$F = -kx - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_0 \sin \omega t \tag{53}$$

と与えられるがゆえに[†117], 運動方程式は次式となる:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = f_0 \sin \omega t \tag{54}$$

これは, 非斉次の 2 階線形定数係数常微分方程式[†118] であり, 容易に一般解を求めることができる[†119]. ここに, m は質点 (おもり) の質量, c はダンパの粘性減衰係数[†120], k は Hooke の法則にしたがう線形ばねのバネ定数 (spring constant), f_0 は強制振動の振幅また ω はその角振動数で

---

†112 繰り返すが, 蒸気圧すなわち凝縮性気体の影響は考慮しないことも多い.

†113 物質として, 不凝縮性気体は空気, 液体は水を考えるとよい.

†114 [基礎] 力学の問題においては, 必ずこれを立てる. **質点 (系) 力学でも, 剛体 (系) 力学でも, 連続体 (流体や弾性体) 力学であっても, 運動量の変化が力積に等しいという物理に差異はない**. 数式表現の表面的な差異に惑わされてはならない.

†115 [補足] 弾性力学や材料力学に現れる, いわゆる力の釣り合い式 $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ は, Newton の第二法則と無関係に思うかもしれない. しかしながら, これは, 加速度 (acceleration) がゼロの場合の運動方程式に他ならない. その意味で, 動力学 (dynamics) と静力学 (statics) を区別することなく, **Newton の第二法則は力学の全てを包含する**といっても過言ではない.

†116 これが運動量保存則を意味することを示せ. 流体力学の運動方程式と対応づけよ.

†117 [板書する]3 つの力の向きに注意せよ. なぜ, 復元力と粘性減衰力の向きが駆動力と逆向きか.

†118 [基礎] 微分方程式を眺めたときに, 適切な分類ができるか. 用語の形式的な理解ではなく, 以下の事項に解答できるか (学類 1 年生レベル): 微分方程式の階数と解に含まれる任意性の個数の関係を述べよ. 定数係数と変数係数で, また, 斉次方程式と非斉次方程式で, 解法はどのように異なるか. 非斉次方程式の一般解はどのように構成することができるか. 非線形方程式が (多くの場合) 解けない理由はどこにあるか.

†119 実際に, 定数変化法, 未定係数法, Laplace 変換による解法の全てで解いて, 計算量を比較したり, それぞれの解法の有用性などを検討せよ.

†120 粘性減衰係数 c は, 抵抗力が質点の速度に比例することを定義とする.

ある. 力学で学んだように, 固有 (角) 振動数は $\sqrt{k/m}$ で与えられた[†121][†122].

非線形項も含むオリジナルの Rayleigh–Plesset の式 (51) を眺めると, 一見, 複雑に見えるだろう. しかし, **振動現象の運動方程式という観点**に立てば, ばねマス系と本質的に何ら差異はない[†123]. 事実, 線形化された Rayleigh–Plesset の式 (64) の数学構造は, 質点の運動方程式 (54) と同一である: (i) 質量 (慣性) m は液体の密度 ρ_{L0}; (ii) ダンパ (粘性) c は気液界面に作用する液体粘性 μ; (iii) バネ定数 (弾性) k は気泡内気体の圧力 p_{G0}[†124]; (iv) 駆動力 $f_0 \sin \omega t$ が無限遠からの液圧 p_∞ に相当する.

6.2. 線形化

Rayleigh–Plesset の式 (51) の線形化を行い, その数式表現をバネマス系のそれ (54) と比較することをとおして, 線形解と固有振動数をも求めよう.

従属変数である気泡径の振動の振幅が無限小, すなわち, 次式で表現される場合を考える[†125][†126].

$$\frac{R}{R_0} - 1 \equiv \epsilon \ll 1 \quad \Longleftrightarrow \quad R = R_0(1+\epsilon) \tag{55}$$

このとき, **気泡の無次元振幅 ϵ は 1 に比べて極めて小さく, 線形振動の仮定が妥当**となる[†127][†128][†129]. では, Rayleigh–Plesset の式 (51) に, 初期平衡状態からの変動 (55) を代入し, 各項を線形化してゆこう:

(i) 慣性項 (左辺):

$$\rho_{L0}\left[R\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = \rho_{L0}R_0^2\left[(1+\epsilon)\ddot{\epsilon} + \frac{3}{2}\dot{\epsilon}^2\right] \tag{56}$$

これを線形化, すなわち, ϵ の 1 次の項で打ち切る. すると, 第 2 項と第 3 項は消える[†130]:

---

†121 固有振動数を求めるためには, たとえば, $x = \exp(st)$ のように, 特殊解として振動解を仮定する必要があった (s は複素数). [基礎] なぜ (指数関数解も含め) 正弦波解を仮定するのか.

†122 固有振動数は, 自由振動であっても, 強制振動であっても同一である. また, 減衰の有無にも依存しない (が, 書物によって定義が異なる場合もある).

†123 **質点の力学も, 連続体 (流体) 力学も, 同じ Newton 力学だから**である. ただし, 流体力学は非線形力学であるがゆえに, 非線形振動を招く点に注意を要する. 周囲液体の非線形性が非線形項を招く. これを確かめよ.

†124 正確には, 表面張力もこれに含まれる (後述).

†125 無限小とは, 有限振幅 $\epsilon \ll 1$ ではなく, 無限小 (微小: infinitesimal) 振幅の極限 $\epsilon \to 0$ を指すことも多いが, 本資料ではこの厳密性は追求しない. 非線形問題 (非線形振動) を議論する際には, この差異は本質的問題となるが, 線形近似すなわち線形問題を解く際には, 大雑把にいって, 気にしなくとも問題はない.

†126 流体中の微小擾乱の伝播速度としての音波がしたがう波動方程式の導出過程を振り返るとよい (圧縮性流体力学). 本質は同じである. 初期平衡状態からの 2 次の変動 (2 次の非線形効果) が無視できるほどに小さいのである. [基礎] 流体力学の基礎方程式の非線形項とは何か. そもそも, 流れの非線形性とは何か.

†127 なぜ線形化 (linearization) するのか. 固有振動数とは何か.

†128 気泡力学に限らず, 力学の変数を無次元化することの意義を述べよ.

†129 初期時刻 $t = 0$ における気泡径が満たす初期条件とは, 気泡が振動しないことである. (55) で, $R = R_0$ とおくと, たしかに, $\epsilon = 0$ となり, 初期条件を表現できている.

†130 なぜ消えるのか. $\epsilon \ll 1$ ゆえに, この導関数 (derivative with respect to time) も, 1 に比べて十分に小さい. 仮

$$\rho_{L0} R_0^2 \ddot{\epsilon} \tag{57}$$

(ii) 粘性項: [†131]

$$4\mu \frac{\dot{R}}{R} = 4\mu \frac{\dot{\epsilon}}{1+\epsilon} = 4\mu\dot{\epsilon}(1-\epsilon+\epsilon^2-\cdots) \approx 4\mu\dot{\epsilon} \tag{58}$$

(iii) 表面張力項:

$$\frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{R_0}\frac{1}{1+\epsilon} = \frac{2\sigma}{R_0}(1-\epsilon+\epsilon^2-\cdots) \approx \frac{2\sigma}{R_0}(1-\epsilon) \tag{59}$$

(iv) 気泡内気体の圧力項:[†132]

$$p_{G0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} = p_{G0}(1+\epsilon)^{-3\gamma} = p_{G0}\left[1-3\gamma\epsilon+\frac{(-3\gamma)(-3\gamma-1)}{2!}\epsilon^2+\cdots\right] \approx p_{G0}(1-3\gamma p_{G0}\epsilon) \tag{61}$$

(v) 定数 p_V および**既知**の駆動圧 $p_\infty(t)$ には, **未知**変数 R を含まないがゆえに, このままでよい[†133].

(i)–(v) を, Rayleigh–Plesset の式 (51) に代入して整理する[†134]:

$$\underbrace{\rho_{L0} R_0^2 \ddot{\epsilon}}_{\text{慣性 } m\ddot{x}} + \underbrace{4\mu\dot{\epsilon}}_{\text{粘性減衰 } c\dot{x}} + \underbrace{(3\gamma p_{G0} - 2\sigma/R_0)\epsilon}_{\text{弾性 } kx} = \underbrace{p_V - p_\infty(t) + p_{G0} - 2\sigma/R_0}_{\text{強制振動 (駆動力) } C\sin\omega t} \tag{62}$$

右辺が駆動力であり, 左辺は第 1 項, 第 2 項, 第 3 項はそれぞれ, 慣性, 粘性, 弾性の効果を確かに与えていることが理解できるだろう [式 (54)]. これを少し整理しておく. すなわち, p_{G0} に式 (49) を代入して整理し, 駆動圧 $p_\infty(t)$ を書き改める:

$$p_V - p_\infty(t) + p_{G0} - 2\sigma/R_0 = p_{\infty 0} - p_\infty(t) \equiv \hat{p}_\infty(t) \tag{63}$$

すると, 線形化 Rayleigh–Plesset の式 (62) は, 質点の運動方程式 (54) に類似する形に帰着する:

$$\frac{\mathrm{d}^2\epsilon}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4\mu}{\rho_{L0}R_0^2}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} + \frac{3\gamma p_{G0} - 2\sigma/R_0}{\rho_{L0}R_0^2}\epsilon = \frac{\hat{p}_\infty(t)}{\rho_{L0}R_0^2} \tag{64}$$

に $\epsilon = 10^{-3}$ とおこう. このとき, 第 1 項は $O(10^{-3})$ だが, 第 2 項と第 3 項は $O(10^{-6})$ である. 後者の方が速やかにゼロに近づくことを根拠に, 無視するのである.

[†131] 非線形項 $\dot{\epsilon}\epsilon$ は 2 次の微小量であって, $\epsilon \ll 1$ を思い返すと, $\dot{\epsilon} \gg \dot{\epsilon}\epsilon$ であるがゆえに, 相対的にみると, 無視できるほどに小さいことに注意を要する. ϵ の 1 次の項 (線形項) を取り出す操作が, 線形化に他ならない. 各項の大きさを特徴づけるために, $O(\epsilon^n)$ なる表現がとくに摂動解析では多用される (n は非線形性の次数). いまは, $O(\epsilon)$ の近似を行っているが, これは, $O(\epsilon^2)$ の誤差を無視する近似に相当する.

[†132] 二項定理 (binomial theorem) を用いる:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + {}_nC_r x^r + \cdots {}_nC_n x^n \tag{60}$$

[†133] 何度も繰り返すが, **求めるべき未知変数が** $R(t)$ **であって, 既知の変数が** $p_\infty(t)$ **である**.

[†134] 左辺 (left-hand side) に未知変数すなわち ϵ を含む項をまとめる.

6.3. 単一気泡の固有振動数

固有 (角) 振動数[†135] ω_B の形は, すでに, (64) 左辺の ϵ の係数に現れていることに気づく[†136]:

$$\omega_B = \sqrt{\frac{(3\gamma p_{G0} - 2\sigma/R_0)}{\rho_{L0} R_0^2}} = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{[3\gamma(p_{\infty 0} - p_V + 2\sigma/R_0) - 2\sigma/R_0]}{\rho_{L0}}} \tag{65}$$

明らかに, 初期気泡径 R_0 と固有振動数 ω_B は反比例の関係にある[†137]. したがって, **気泡が小さくなるにつれて, 固有振動数は高くなる**[†138].

具体的数値を実感するために, 液圧 (静水圧) $p_{\infty 0} = 1\,\mathrm{atm} = 101325\,\mathrm{Pa} \approx 0.1\,\mathrm{MPa}$, 水の密度 $\rho_{L0} = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, 水–空気系の表面張力 $\sigma = 0.0728\,\mathrm{N/m}$ を代入して, 単一球形気泡の固有振動数 ω_B の初期気泡半径 R_0 依存性を描いてみよ. そして, 大きな気泡であれば, 表面張力項 $2\sigma/R$ の寄与が極めて小さいことを理解せよ[†139].

しかし, **大きな気泡であれば**[†140], 表面張力の効果の寄与は小さい (理由を述べよ). さらに, 蒸気圧も無視するならば, 固有振動数を次式から概算できる[†141]:

$$\underbrace{\omega_B = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3\gamma p_{\infty 0}}{\rho_{L0}}}}_{\text{[重要!!] 研究でも使える}} \tag{67}$$

これは, 気泡に関連する研究に携わっている者ならば, **記憶の価値がある式**に属する[†142].

[†135] 本資料では, 振動数 [Hz] と角振動数 [rad/s] を区別しない. 単位の変換に困難はない.

[†136] 実際は, 蒸気圧および表面張力の影響を無視することが多い (問題).

[†137] 厳密には, 分子の表面張力項にも気泡径を含むがゆえに, 完全な反比例ではない. しかし, **表面張力の影響は, おおよそ 1 μm 以上の気泡を考えるのならば, 無視できるほどに小さい** (水–空気系を例示して確かめよ).

[†138] 表面張力が無視できるほどの大きな気泡ならば, つぎの近似が有効となる:

$$\omega_B = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{3\gamma(p_{\infty 0} - p_V)}{\rho_{L0}}} \tag{66}$$

[†139] 気泡径が, マイクロスケール (10^{-6}) さらにはナノスケール (10^{-9}) となれば, 表面張力項の寄与に支配される.

[†140] 水–空気系ならば, 気泡径が $R_0 \geq 10^{-5}\,\mathrm{mm} = 0.1\,\mu\mathrm{m}$ の条件下において, これで概算してよいだろう. もちろん, 気相と液相が何かなど, 想定する実験や物性値にもよるが.

[†141] 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9} m などのミリバブル, マイクロバブル, ナノバブルについて, 固有振動数の具体的な数値のオーダを把握しておくことをすすめる. たとえば, **ミリバブルならば 10 kHz, マイクロバブルならば 10 MHz** である.

[†142] [応用例] 気泡の共振は, 悪者にも良い子にもなりうる. 流体機械内のキャビテーションによる損傷を防ぐべく, 気泡の共振を防ぐことは重要であるし, 腫瘍焼灼や洗浄において, 気泡の共振を積極的に利活用することへとつながるからである.

7. 問題

問 1. 気泡周囲液体は渦なしの非圧縮流れであるがゆえに, その運動は, Laplace 方程式に支配される[†143][†144]. この観点から, 質量と運動量の保存則という非線形の基礎方程式系を解く困難を避けて, Laplace 方程式を利用して, Rayleigh–Plesset の式 (51) を上手く導け. さらに, (64) の形に線形化せよ[†145].

問 2. いかなる場合に, 非圧縮性流れの仮定は妥当とみなせるだろうか. 非圧縮性流れの定義式ではなく, 流れを特徴づけるスケール, すなわち, 代表的な時間, 長さ, 速さ (流速や音速) の観点から議論せよ.

問 3. 線形化 Rayleigh–Plesset の式 (64) の一般解 (general solution) を求めよ.

(i) 解のふるまいを (ϵ, t) 線図上に描け.

(ii) 粘性 μ が無視できる場合を考える. 駆動圧の振動数 ω が気泡の固有振動数 ω_B と一致する場合 $[\omega = \omega_B]$ の解 (共鳴解) と, 一致しない場合 $[\omega \neq \omega_B]$ の解 (非共鳴解) を求め, 図示せよ. 共鳴解では, $t \to \infty$ の極限において, 解が $\epsilon \to \infty$ に至ることを示せ. 非共鳴解では, $\omega \to \omega_B$ の極限において, 解が $\epsilon \to \infty$ に至ることを示せ.

問 4. Rayleigh–Plesset の式 (51) の初期値問題の解[†146]を考える. 初期条件は以下とする:

$$\epsilon = 1 \quad \text{at } t = 0 \tag{68}$$

(i) 数値解を求めよ[†147]. 物性値は, 各自で設定せよ[†148].

(ii) 数値解を問 2 で得た一般解 (線形理論解) と比較せよ[†149].

問 5. 単一球形気泡の固有振動数 ω_B (65) の初期気泡径 R_0 依存性を描け. 半径が 1 mm, 1 μm, 1 nm のそれぞれの気泡について, 表面張力の寄与はどの程度の大きさか. 重要な特徴を論ぜよ.

問 6. Rayleigh–Plesset の方程式に, 以下の効果を取り込むとどうなるか. 研究動向を調べるとともに, 導いてみよ: (i) 気泡周囲液体の圧縮性, (ii) 気液界面における相変化.

[†143] これを示せ. すなわち, 渦なし条件 rot$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満足するポテンシャル Φ を見出し, div$\boldsymbol{u} = 0$ と組み合わせることで, Φ がしたがう楕円型の 2 階線形偏微分方程式 (Laplace 方程式) $\nabla^2 \Phi = 0$ を導け.

[†144] [重要・発展] 液体の圧縮性を考慮すると, 液体の運動は, Laplace 方程式ではなくて線形波動方程式に支配されて, 気泡が放射する液中音波の有限の音速での伝播過程を解くことができる. 逆にいえば, Laplace 方程式では, 無限大の音速で伝わる波しか記述できない (時間微分項を含まないがゆえに). 本資料において, **気泡を音源と主張しながら, 液体を非圧縮性とみなした仮定の矛盾がここに現れた**. 圧縮性の効果を, 補正として時間微分の形で取り込んだ線形波動方程式を導き, そこに係数として含む音速を無限大に近づけて, 線形波動方程式が Laplace 方程式を包含していることを確かめよ. また, これを用いて, Rayleigh–Plesset の方程式 (51) に液体の圧縮性の効果 (音速の影響) を取り込め.

[†145] Rayleigh–Plesset の線形化を行う理由はつぎの 2 点にある: (i) 線形化された Rayleigh–Plesset 方程式の解を求め, 数値解との比較の手がかりとする; (ii) 気泡の線形振動の固有振動数 (eigenfrequency) を求める.

[†146] 一般解ではない.

[†147] 解法は指定しないが, Runge–Kutta 法による有限差分解をすすめる.

[†148] 水–空気系で行うことが好ましい.

[†149] 理論解において無視された非線形効果の大きさを議論せよ.