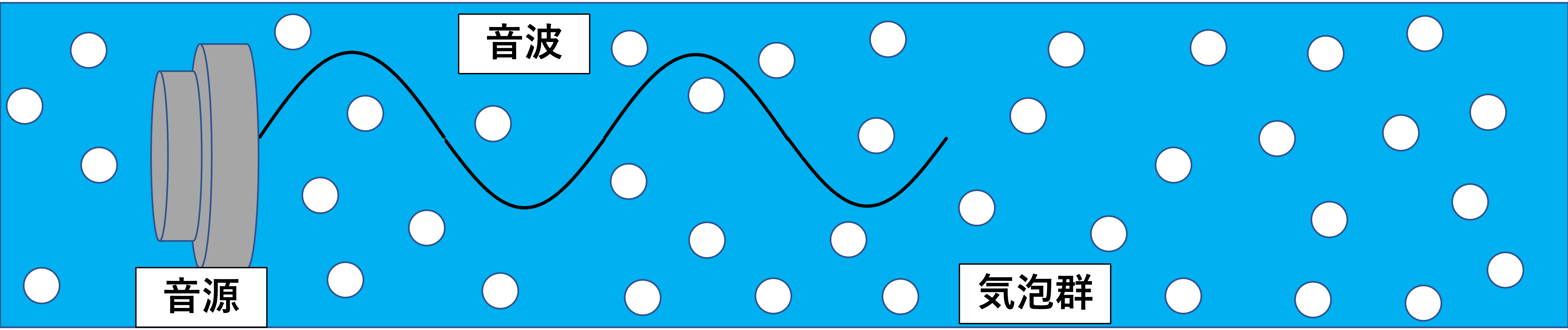
2018年10月18日 9時30分～10時
京都大学数理解析研究所

気泡流中の波動伝播に初期流速が与える影響

〇前田泰希（筑波大・工学システム）
金川哲也（筑波大・システム情報）

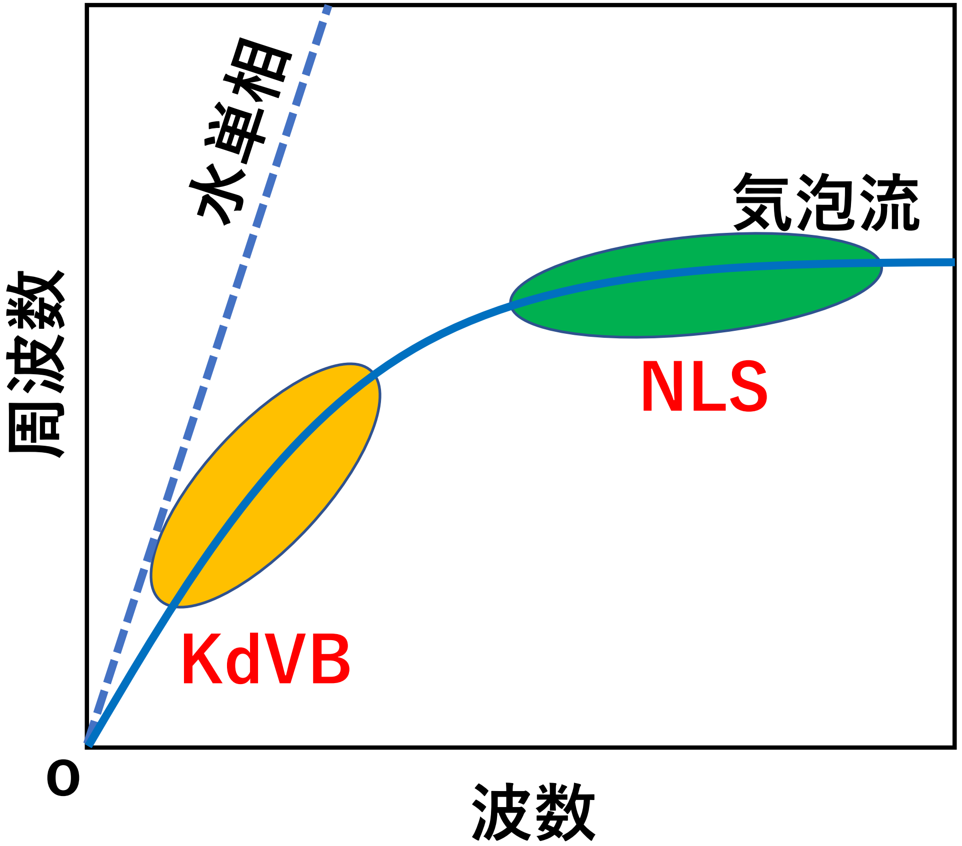
目次

気泡を含む水中を伝播する音波



多数の気泡を含む水中の一次元音波における，
弱非線形理論解析
気泡の振動 ⇨ 波の分散性

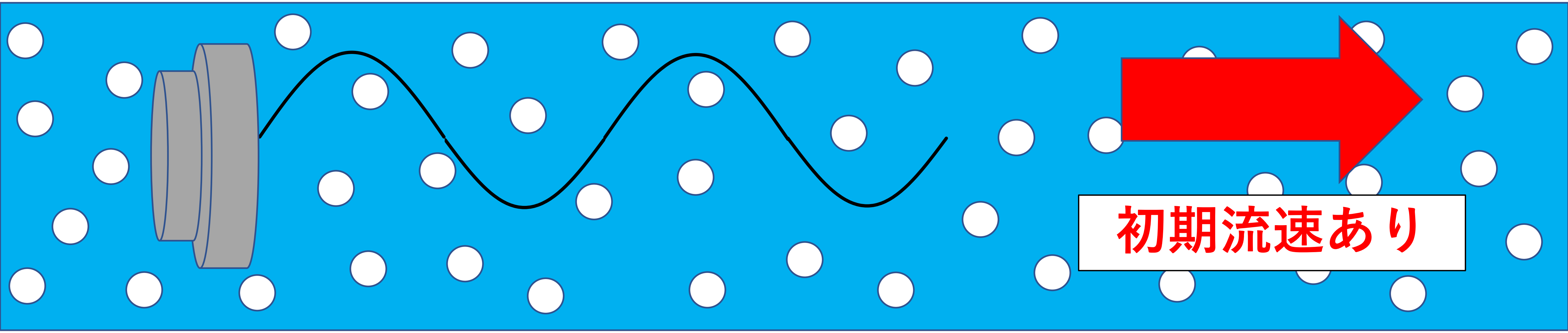
先行研究（金川・矢野・渡部・藤川・J.Fluid Sci.Technol.，2010）



- 低周波数の長波の領域
  ➡ KdV-Burgers(KdVB)方程式
- 高周波数の短波の領域
  ➡ 非線形Schrödinger(NLS)方程式

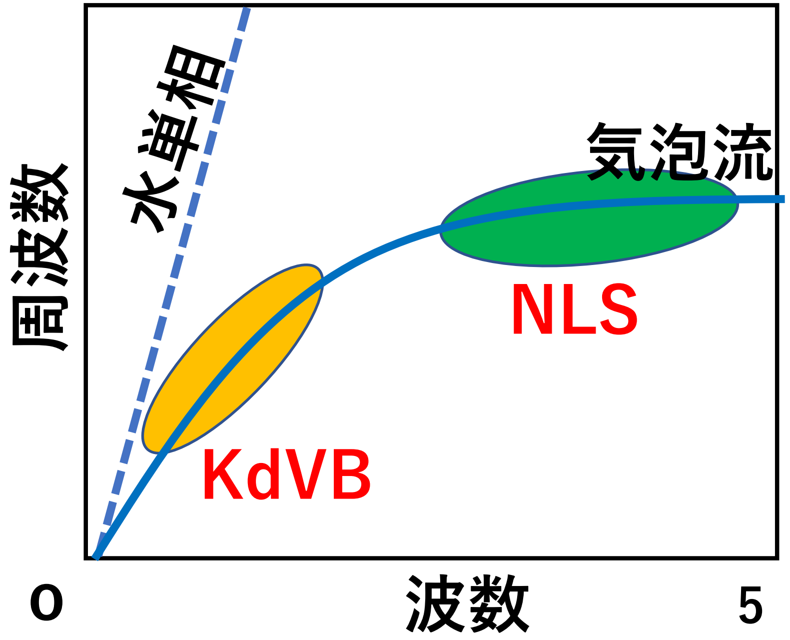
しかし，これらは気泡流が初期静止状態を仮定している

本研究の目的



気泡流の**初期流速**を考慮

➡ **KdVB方程式**を導出



目次

二流体モデル（江頭ら，2004）

1. 気相の質量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^*)+\frac{\partial}{\partial x^*}(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^* u_{\mathrm{G}}^*)=0$$

2. 液相の質量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^*]+\frac{\partial}{\partial x^*}[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^* u_{\mathrm{L}}^*]=0$$

3. 気相の運動量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^* u_{\mathrm{G}}^*)+\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^* {u_{\mathrm{G}}^*}^2\right)+\alpha\frac{\partial p_{\mathrm{G}}^*}{\partial x^*}=F^*$$

4. 液相の運動量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^* u_{\mathrm{L}}^*]+\frac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^* {u_{\mathrm{L}}^*}^2\right]+(1-\alpha)\frac{\partial p_{\mathrm{L}}^*}{\partial x^*}+P^*\frac{\partial \alpha}{\partial x^*}=-F^*$$

＊は有次元を表す

t：時間　x：空間座標

ρ：密度　u：流速

p：圧力

G：気相　L：液相

二流体モデル（江頭ら，2004）

1. 気相の質量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^* u_{\mathrm{G}}^*) = 0$$

2. 液相の質量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^*] + \frac{\partial}{\partial x^*}[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^* u_{\mathrm{L}}^*] = 0$$

3. 気相の運動量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^* u_{\mathrm{G}}^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}\left(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^* {u_{\mathrm{G}}^*}^2\right) + \alpha\frac{\partial p_{\mathrm{G}}^*}{\partial x^*} = F^*$$

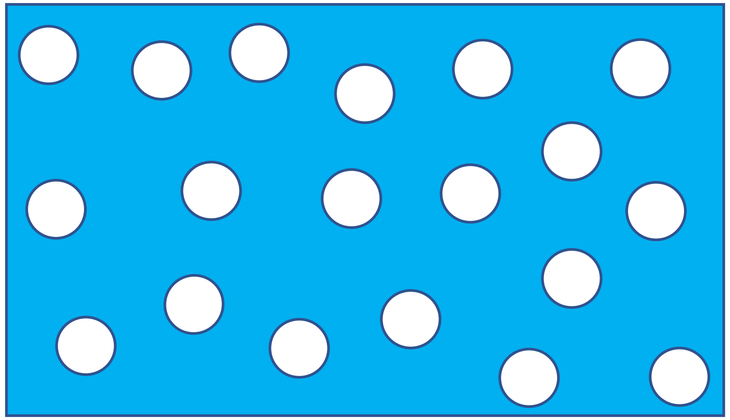
4. 液相の運動量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^* u_{\mathrm{L}}^*] + \frac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^* {u_{\mathrm{L}}^*}^2\right] + (1-\alpha)\frac{\partial p_{\mathrm{L}}^*}{\partial x^*} + P^*\frac{\partial \alpha}{\partial x^*} = -F^*$$

α：気相の体積分率

（ボイド率）

$0 < \alpha < 1$



付加質量力（矢野ら，2006）

3. 気相の運動量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^*u_{\mathrm{G}}^*\right)+\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\alpha\rho_{\mathrm{G}}^*{u_{\mathrm{G}}^*}^2\right)+\alpha\frac{\partial p_{\mathrm{G}}^*}{\partial x^*}=\boxed{F^*}$$

4. 液相の運動量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\left[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^*u_{\mathrm{L}}^*\right]+\frac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_{\mathrm{L}}^*{u_{\mathrm{L}}^*}^2\right]+(1-\alpha)\frac{\partial p_{\mathrm{L}}^*}{\partial x^*}+P^*\frac{\partial\alpha}{\partial x^*}=\boxed{-F^*}$$

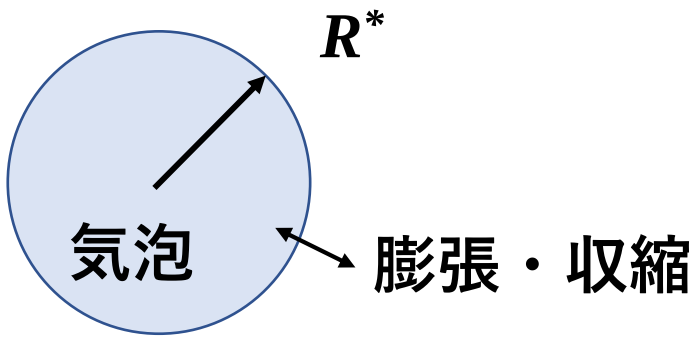
F^*：気相と液相間の付加質量力

$$F^*=-\beta_1\alpha\rho_{\mathrm{L}}^*\left(\frac{D_{\mathrm{G}}u_{\mathrm{G}}^*}{Dt^*}-\frac{D_{\mathrm{L}}u_{\mathrm{L}}^*}{Dt^*}\right)-\beta_2\rho_{\mathrm{L}}^*\left(u_{\mathrm{G}}^*-u_{\mathrm{L}}^*\right)\frac{D_{\mathrm{G}}\alpha}{Dt^*}-\beta_3\alpha\left(u_{\mathrm{G}}^*-u_{\mathrm{L}}^*\right)\frac{D_{\mathrm{G}}\rho_{\mathrm{L}}^*}{Dt^*}$$

気泡の運動方程式

5. Keller式

$$
\underbrace{\left(1-\frac{1}{c_{\mathrm{L0}}^{*}}\frac{D_{\mathrm{G}}R^{*}}{Dt^{*}}\right)R^{*}\frac{D_{\mathrm{G}}^{2}R^{*}}{Dt^{*2}}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3c_{\mathrm{L0}}^{*}}\frac{D_{\mathrm{G}}R^{*}}{Dt^{*}}\right)\left(\frac{D_{\mathrm{G}}R^{*}}{Dt^{*}}\right)^{2}}_{\text{慣性項}}
=\left(1-\frac{1}{c_{\mathrm{L0}}^{*}}\frac{D_{\mathrm{G}}R^{*}}{Dt^{*}}\right)\frac{P^{*}}{\rho_{\mathrm{L0}}^{*}}+\underbrace{\frac{R^{*}}{\rho_{\mathrm{L0}}^{*}c_{\mathrm{L0}}^{*}}\frac{D_{\mathrm{G}}}{Dt^{*}}\left(p_{\mathrm{L}}^{*}+P^{*}\right)}_{\text{減衰項}}
$$



圧縮性の水

R：気泡半径

c_{L0}：液単相での水中音速

構成式

6. 液相の状態方程式（Tait式）

$$p_{\mathrm{L}}^* = p_{\mathrm{L0}}^* + \frac{\rho_{\mathrm{L0}}^* {c_{\mathrm{L0}}^*}^2}{n}\left[\left(\frac{\rho_{\mathrm{L}}^*}{\rho_{\mathrm{L0}}^*}\right)^n - 1\right]$$

7. 気相のポリトロープ状態方程式

$$\frac{p_{\mathrm{G}}^*}{p_{\mathrm{G0}}^*} = \left(\frac{\rho_{\mathrm{G}}^*}{\rho_{\mathrm{G0}}^*}\right)^\gamma$$

8. 気泡内気体の質量保存式

$$\frac{\rho_{\mathrm{G}}^*}{\rho_{\mathrm{G0}}^*} = \left(\frac{R_0^*}{R^*}\right)^3$$

9. 気液界面における応力のつりあい式

$$p_{\mathrm{G}}^* + (p_{\mathrm{L}}^* + P^*) = \frac{2\sigma^*}{R^*} + \frac{4\mu^*}{R^*}\frac{D_{\mathrm{G}}R^*}{Dt^*}$$

n：物質定数

γ：ポリトロープ指数

σ：表面張力

μ：液体の粘性係数

基礎方程式系

9 本の強非線形方程式

気相の質量保存式，液相の質量保存式
気相の運動量保存式，液相の運動量保存式
Kellerの式
液相の状態方程式，気相の状態方程式
気泡内気体の質量保存式
気液界面における圧力のつりあい式

↓

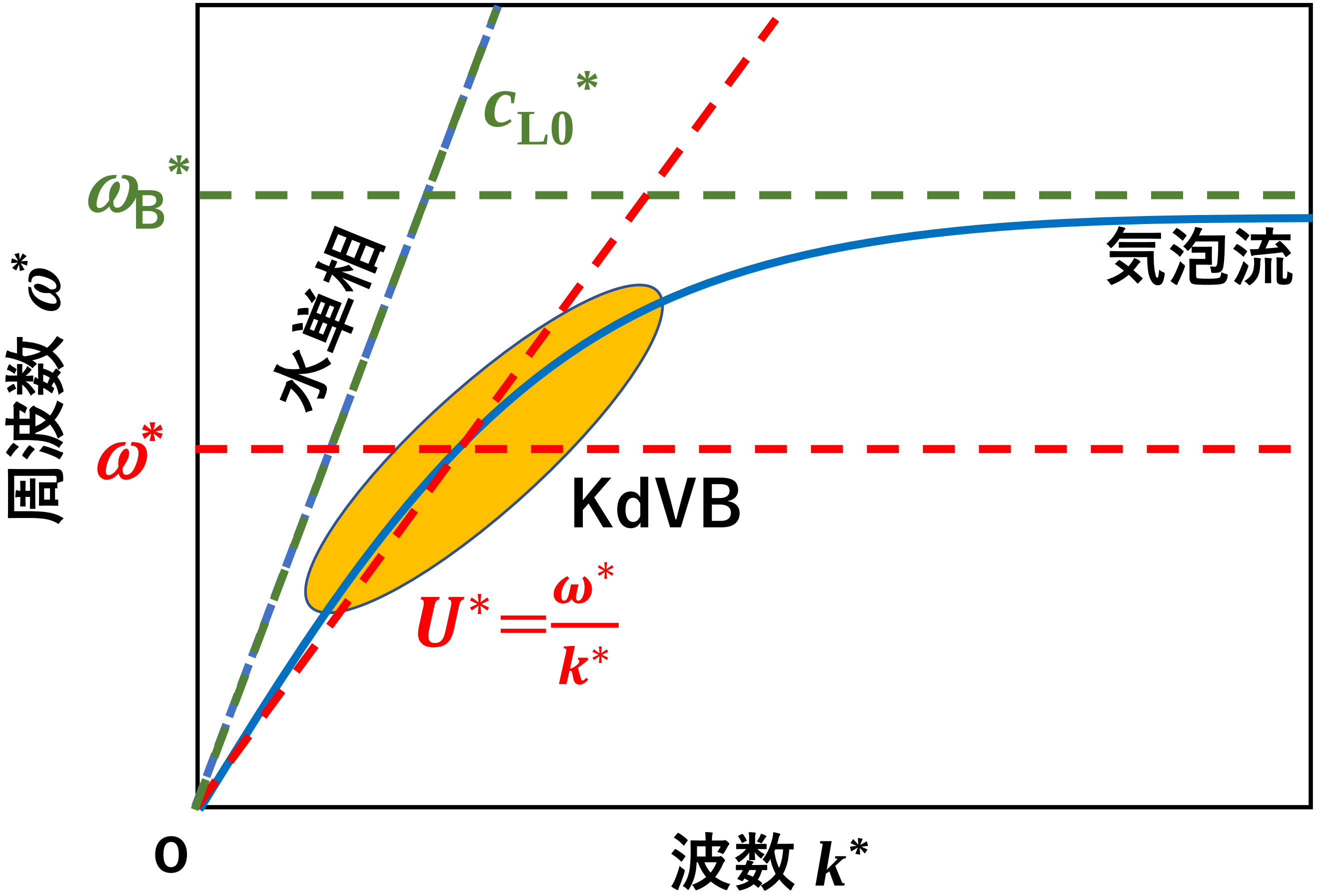
1本の弱非線形方程式

KdVB方程式

目次

周波数と速度の大きさを決定（金川ら，2010）

波の**入射周波数**$\boldsymbol{\omega^*}$，**位相速度**$\boldsymbol{U^*}$に対して，大きさを定める



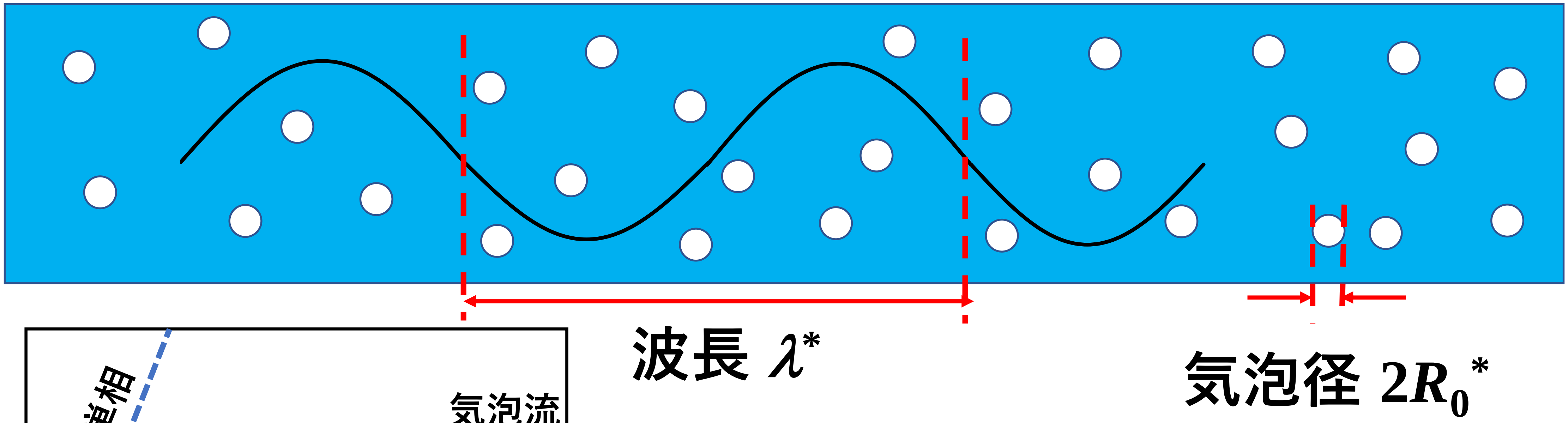
周波数：$\omega^* \ll \omega_\mathrm{B}^*$

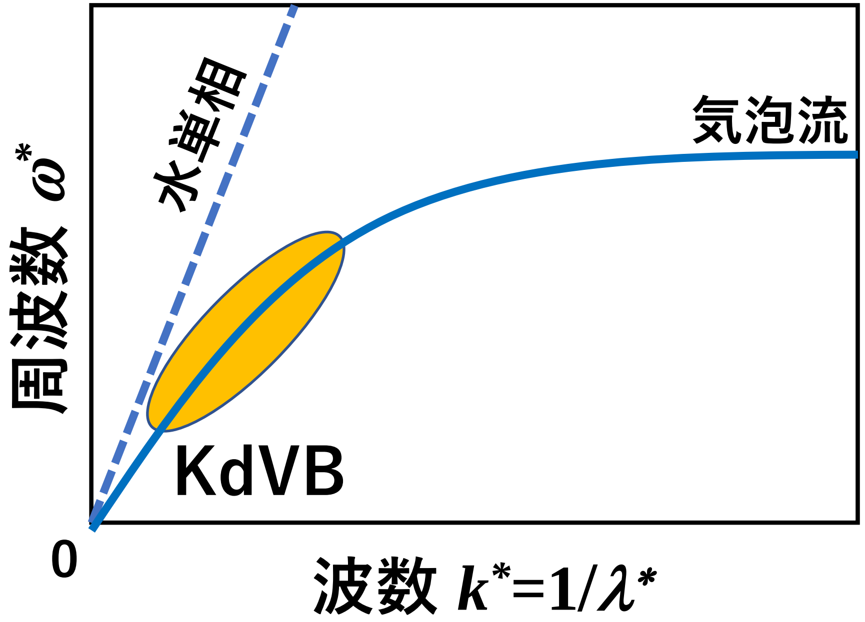
速度：$U^* \ll c_\mathrm{L0}^*$

ω_B：気泡の固有周波数

長さの大きさの決定（金川ら，2010）

波の波長λ^*に対して，大きさを定める



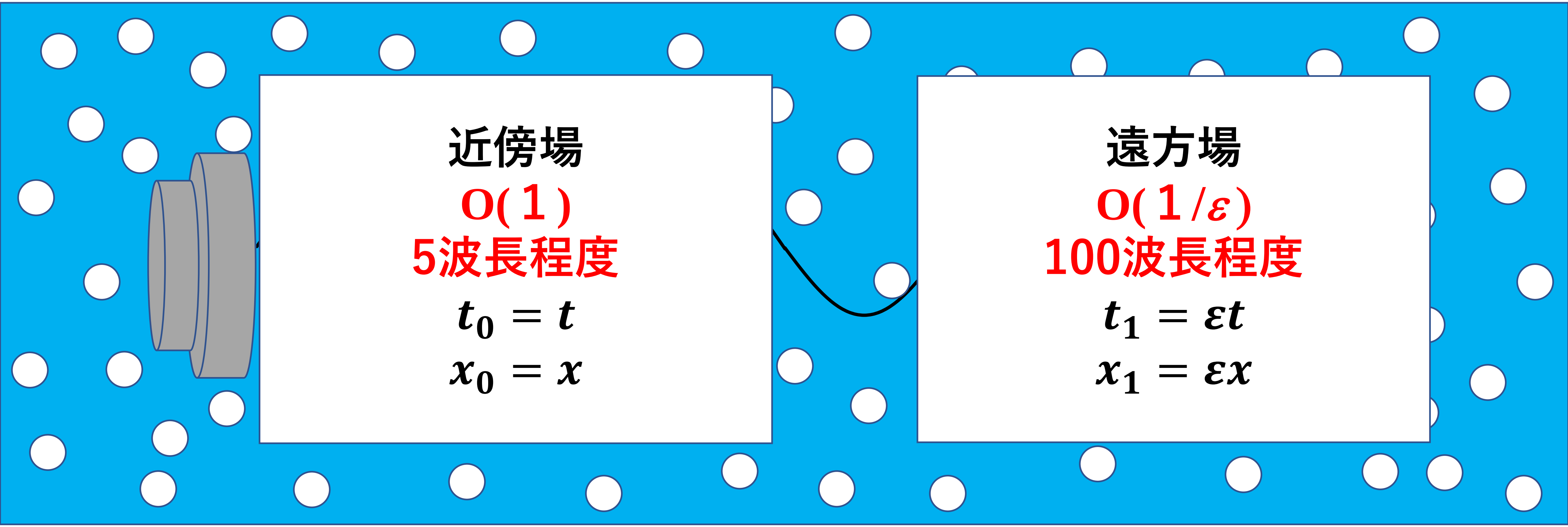


長さ： $R_0^* \ll \lambda^*$

目次

多重尺度法（e.g., Jeffrey&Kawahara, 1982）

波の無次元振幅ε（$\varepsilon \ll 1$）を導入し，
近傍場と遠方場を表す



摂動展開

気相と液相の速度は，初期流速から展開する

$$\frac{u_G^*}{U^*} = \boxed{u_{G0}} + \varepsilon u_{G1} + \varepsilon^2 u_{G2} + \cdots$$

$$\frac{u_L^*}{U^*} = \boxed{u_{L0}} + \varepsilon u_{L1} + \varepsilon^2 u_{L2} + \cdots$$

初期静止状態を仮定した，先行研究との違いであり，本解析最大の特徴

従属変数の展開（一部）

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \cdots$$

$$\frac{R^*}{R_0^*} = 1 + \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \cdots$$

目次

近傍場：気相の質量保存式

- 先行研究

$$\boxed{\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0}} - 3\boxed{\frac{\partial R_1}{\partial t_0}} + \frac{\partial u_{\mathrm{G}1}}{\partial x_0} = 0$$

- 本研究

$$\boxed{\frac{D_{\mathrm{G}} \alpha_1}{D t_0}} - 3\boxed{\frac{D_{\mathrm{G}} R_1}{D t_0}} + \frac{\partial u_{\mathrm{G}1}}{\partial x_0} = 0$$

$$\boxed{\frac{D_{\mathrm{G}}}{D t_0} \equiv \frac{\partial}{\partial t_0} + u_{\mathrm{G}0} \frac{\partial}{\partial x_0}}$$

Lagrange微分に変化

近傍場：気相の運動量保存式

- 先行研究

$$\beta_1\left(\boxed{\frac{\partial u_{\mathrm{G}1}}{\partial t_0}}-\boxed{\frac{\partial u_{\mathrm{L}1}}{\partial t_0}}\right)-3\gamma p_{\mathrm{G}0}\frac{\partial R_1}{\partial x_0}=0$$

- 本研究

$$\beta_1\left(\boxed{\frac{D_{\mathrm{G}} u_{\mathrm{G}1}}{D t_0}}-\boxed{\frac{D_{\mathrm{L}} u_{\mathrm{L}1}}{D t_0}}\right)+\boxed{\beta_2(u_{\mathrm{G}0}-u_{\mathrm{L}0})\frac{D_{\mathrm{G}}\alpha_1}{D t_0}}-3\gamma p_{\mathrm{G}0}\frac{\partial R_1}{\partial x_0}=0$$

Lagrange微分に変化新たな項の出現

近傍場：気泡の運動方程式

$$R_1 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2} p_{\mathrm{L1}} = 0$$

初期流速u_{G0}やu_{L0}を含まない

近傍場では気泡壁の運動が初期流速の影響を受けない

近傍場：線形波動方程式

初期一様流（$u_{\mathrm{G0}}=u_{\mathrm{L0}}=u_0$）を仮定

線形波動方程式を導出

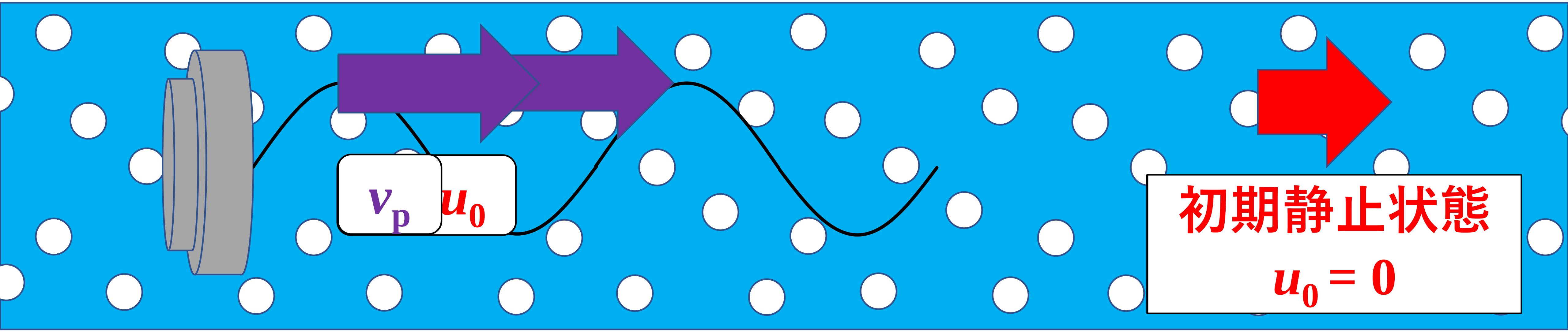
$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} + \boxed{2u_0^2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0 \partial x_0}} + \left(u_0^2 - v_{\mathrm{p}}^2\right)\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} = 0$$

t_0とx_0の2階偏導関数の項の出現

近傍場：右向き進行波の波動方程式

$$\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \boxed{(u_0 + v_\mathrm{p})} \frac{\partial R_1}{\partial x_0} = 0$$

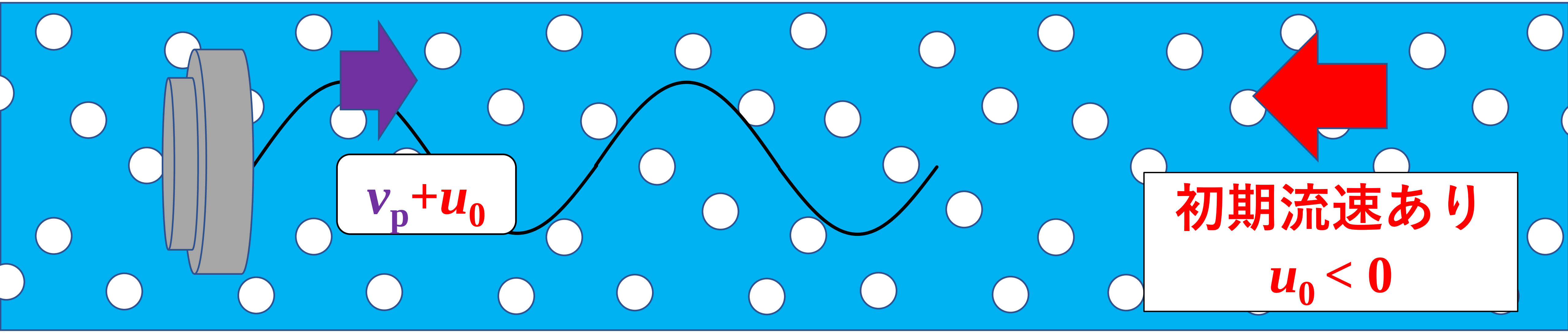
初期流速u_0だけ音速v_pが増減



近傍場：右向き進行波の波動方程式

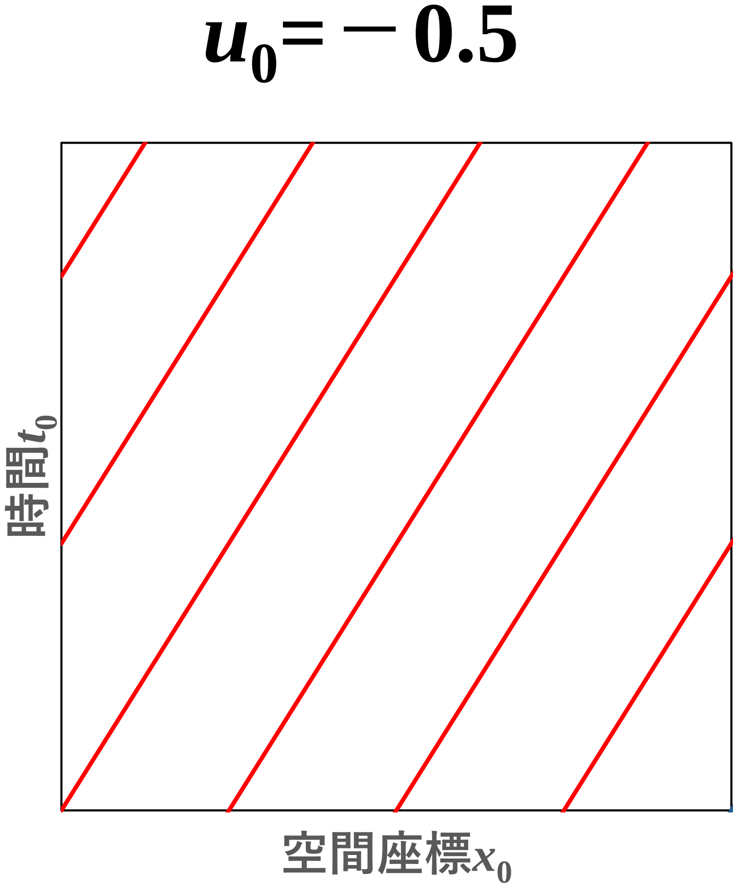
$$\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \boxed{\left(u_0 + v_\mathrm{p}\right)} \frac{\partial R_1}{\partial x_0} = 0$$

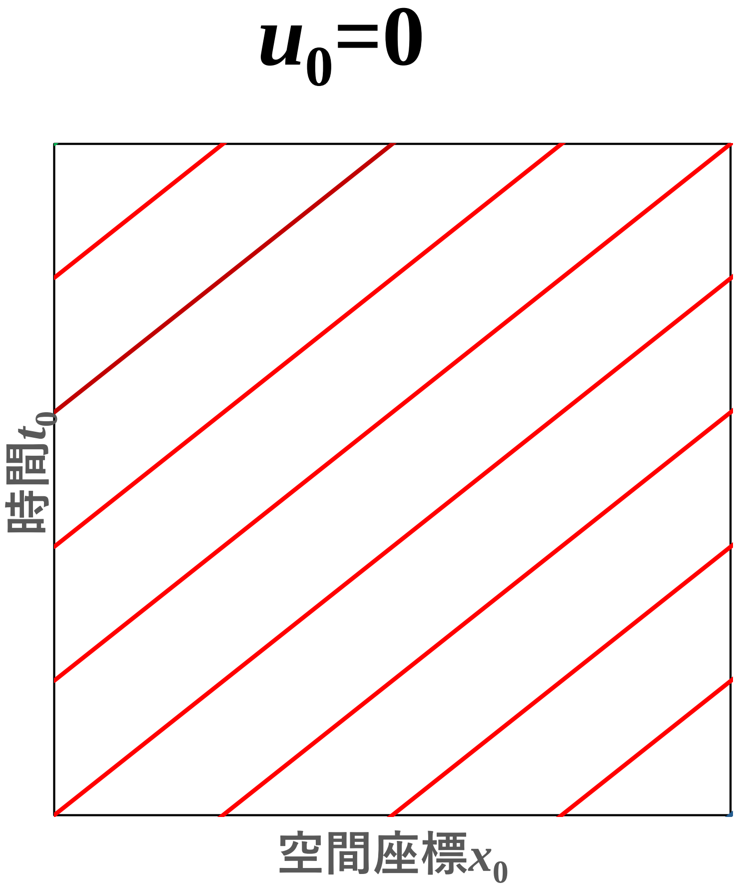
初期流速u_0だけ音速v_pが増減

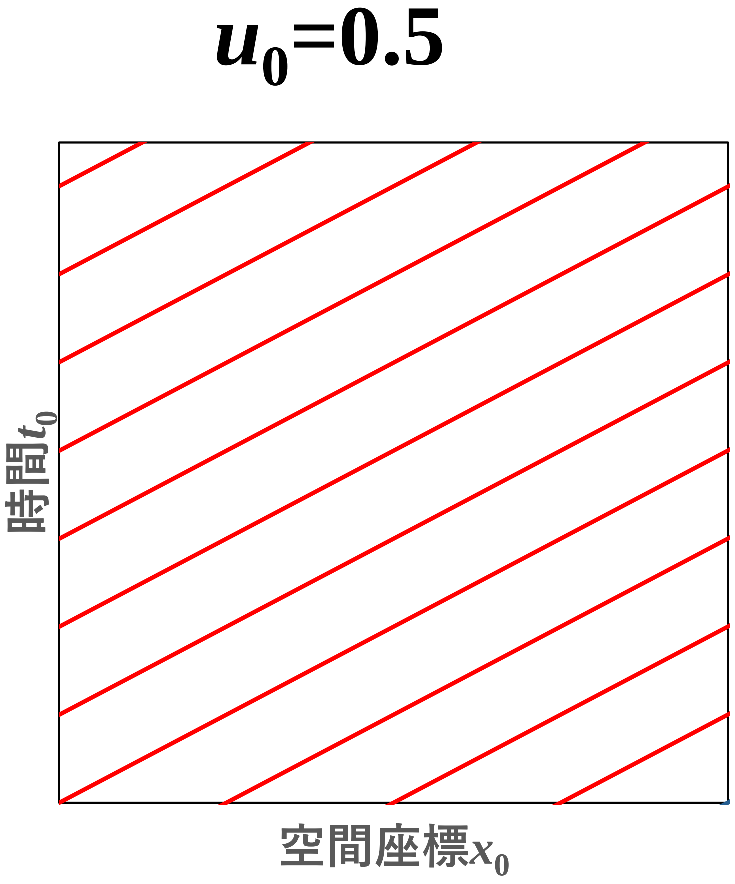


近傍場：特性曲線

$$\varphi_0 = x_0 - (u_0 + v_\mathrm{p})t_0$$







目次

遠方場：質量保存式と運動量保存式

1. 気相の質量保存式

$$\boxed{\frac{D_{\mathrm{G}}\alpha_2}{Dt_0}} - 3\boxed{\frac{D_{\mathrm{G}}R_2}{Dt_0}} + \frac{\partial u_{\mathrm{G}2}}{\partial x_0} = \boxed{K_1}$$

2. 液相の質量保存式

$$\alpha_0 \boxed{\frac{D_{\mathrm{L}}\alpha_2}{Dt_0}} - (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L}2}}{\partial x_0} = \boxed{K_2}$$

3. 気相の運動量保存式

$$\beta_1\left(\boxed{\frac{D_{\mathrm{G}}u_{\mathrm{G}2}}{Dt_0}} - \boxed{\frac{D_{\mathrm{L}}u_{\mathrm{L}2}}{Dt_0}}\right) + \boxed{\beta_2(u_{\mathrm{G}0}-u_{\mathrm{L}0})\frac{D_{\mathrm{G}}\alpha_2}{Dt_0}} - 3\gamma p_{\mathrm{G}0}\frac{\partial R_2}{\partial x_0} = \boxed{K_3}$$

4. 液相の運動量保存式

$$(1-\alpha_0)\boxed{\frac{D_{\mathrm{L}}u_{\mathrm{L}2}}{Dt_0}} - \alpha_0\beta_1\left(\boxed{\frac{D_{\mathrm{G}}u_{\mathrm{G}2}}{Dt_0}} - \boxed{\frac{D_{\mathrm{L}}u_{\mathrm{L}2}}{Dt_0}}\right) - \boxed{\alpha_0\beta_2(u_{\mathrm{G}0}-u_{\mathrm{L}0})\frac{D_{\mathrm{G}}\alpha_2}{Dt_0}}$$
$$- \boxed{\alpha_0 u_{\mathrm{L}0}\frac{D_{\mathrm{L}}\alpha_2}{Dt_0}} + \boxed{u_{\mathrm{L}0}(1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L}2}}{\partial x_0}} + (1-\alpha_0)\frac{\partial p_{\mathrm{L}2}}{\partial x_0} = \boxed{K_4}$$

非同次項の出現

Lagrange微分に変化

新たな項の出現

遠方場：気泡の運動方程式

$$R_2 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2} p_{\mathrm{L2}} = \boxed{K_5}$$

非同次項K_5は初期流速u_{G0}を含む

⇩

遠方場では気泡壁の運動が気相の初期流速の影響を受ける

遠方場：弱非線形波動方程式

初期一様流（$u_{\mathrm{G0}}=u_{\mathrm{L0}}=u_0$）を仮定

弱非線形波動方程式を導出

$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2}+2u_0^2\frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0 \partial x_0}+\left(u_0^2-v_{\mathrm{p}}^2\right)\frac{\partial^2 R_2}{\partial x_0^2}=\boxed{K(R_1;t_1,x_1,\varphi_0)}$$

非同次項Kには非線形項を含む

目次

1. 背景と目的
2. 基礎方程式系
3. 周波数，速度，長さの大きさ
4. 多重尺度法
5. 結果　ー近傍場における解析結果ー
6. 結果　ー遠方場における解析結果ー
7. **結果　ーKdVB方程式の導出ー**
8. まとめと展望

近傍場と遠方場を結合

KdVB方程式

$$\frac{\partial R_1}{\partial \tau} + \Pi_1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial \xi} + \Pi_2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 R_1}{\partial \xi^3} = 0$$

新たな独立変数

$$\tau \equiv \varepsilon t$$

$$\xi \equiv x - \left(\boxed{u_0 + v_\mathrm{p}} + \varepsilon \Pi_0\right) t$$

初期流速u_0分だけ音速v_pが補正されている

KdVB方程式

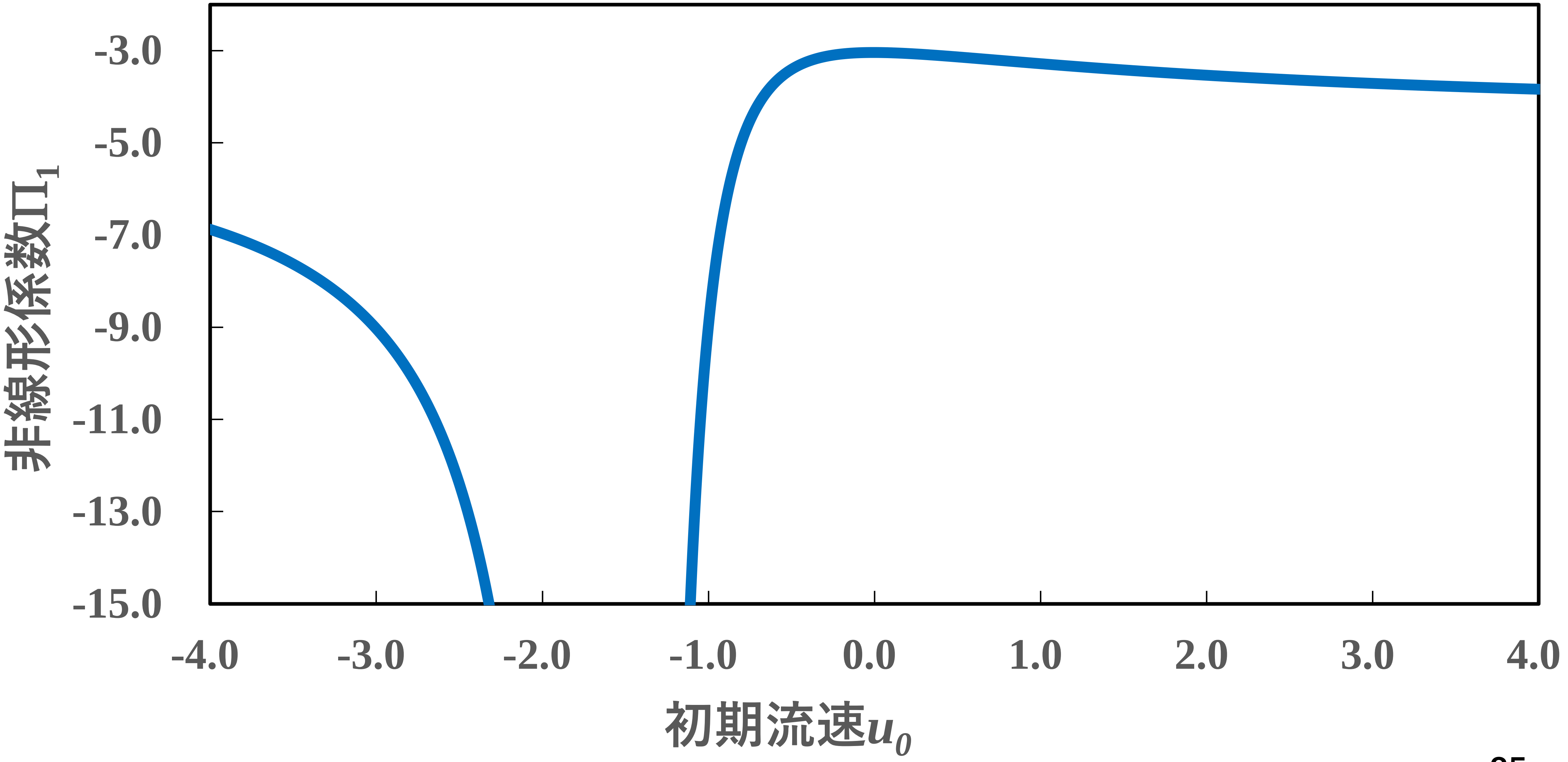
$$\frac{\partial R_1}{\partial \tau} + \underbrace{\boxed{\Pi_1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial \xi}}}_{\text{非線形}} + \underbrace{\boxed{\Pi_2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi^2}}}_{\text{散逸}} + \underbrace{\boxed{\Pi_3 \frac{\partial^3 R_1}{\partial \xi^3}}}_{\text{分散}} = 0$$

初期流速の影響を含む

初期流速の影響を含まない

非線形係数Π_1と初期流速u_0には
どのような関係があるのか？

非線形係数Π_1とu_0の関係



初期流速u_0はマッハ数Mと等価

流速の摂動展開：

$$\frac{u^*}{U^*} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots$$

⇒ $$u_0 \approx \frac{u^*}{U^*}$$

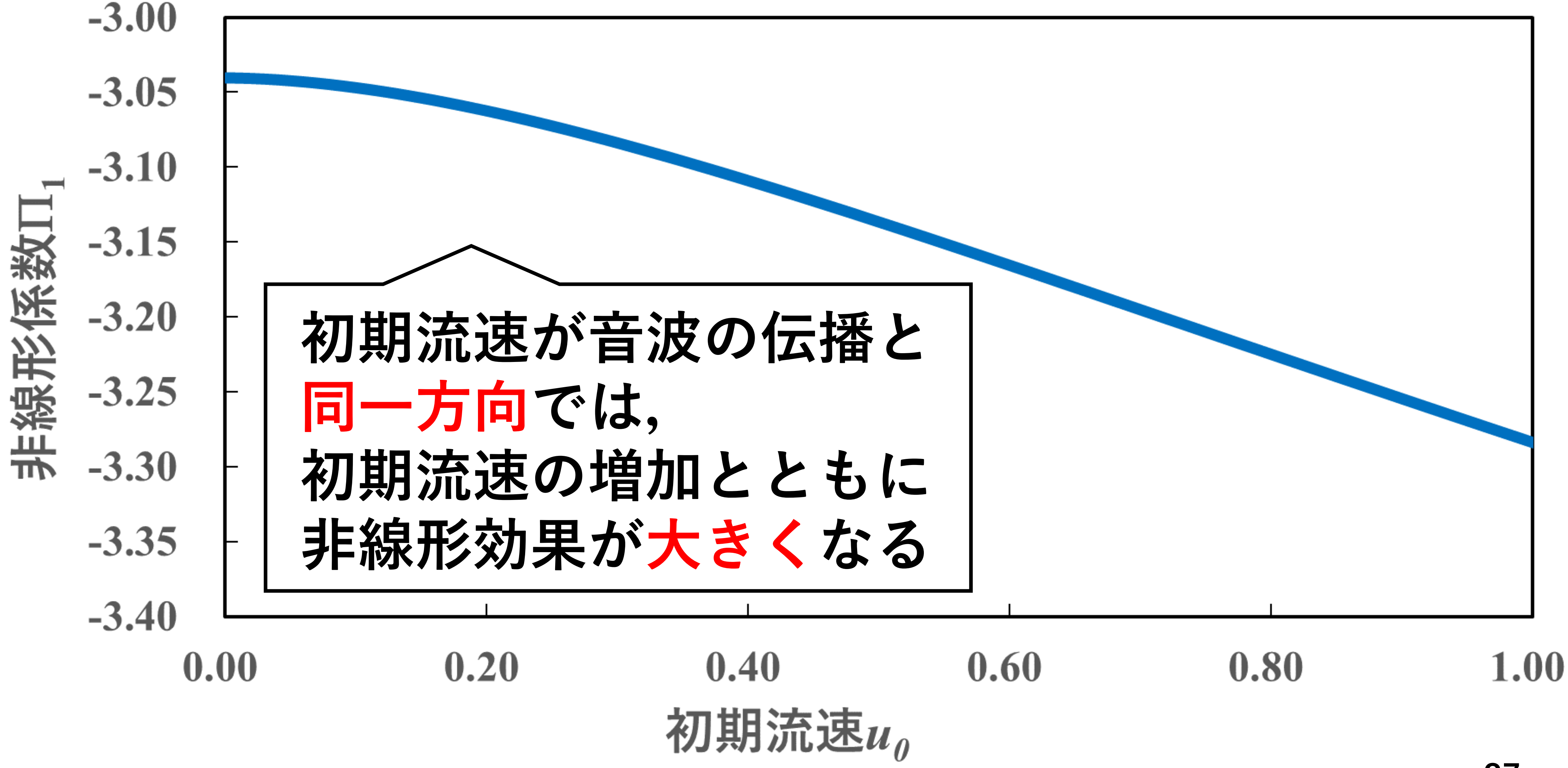
$u_0 = 0.1$のとき$u^* = 10$ m/s
$u_0 = 1.0$のとき$u^* = 100$ m/s

マッハ数：

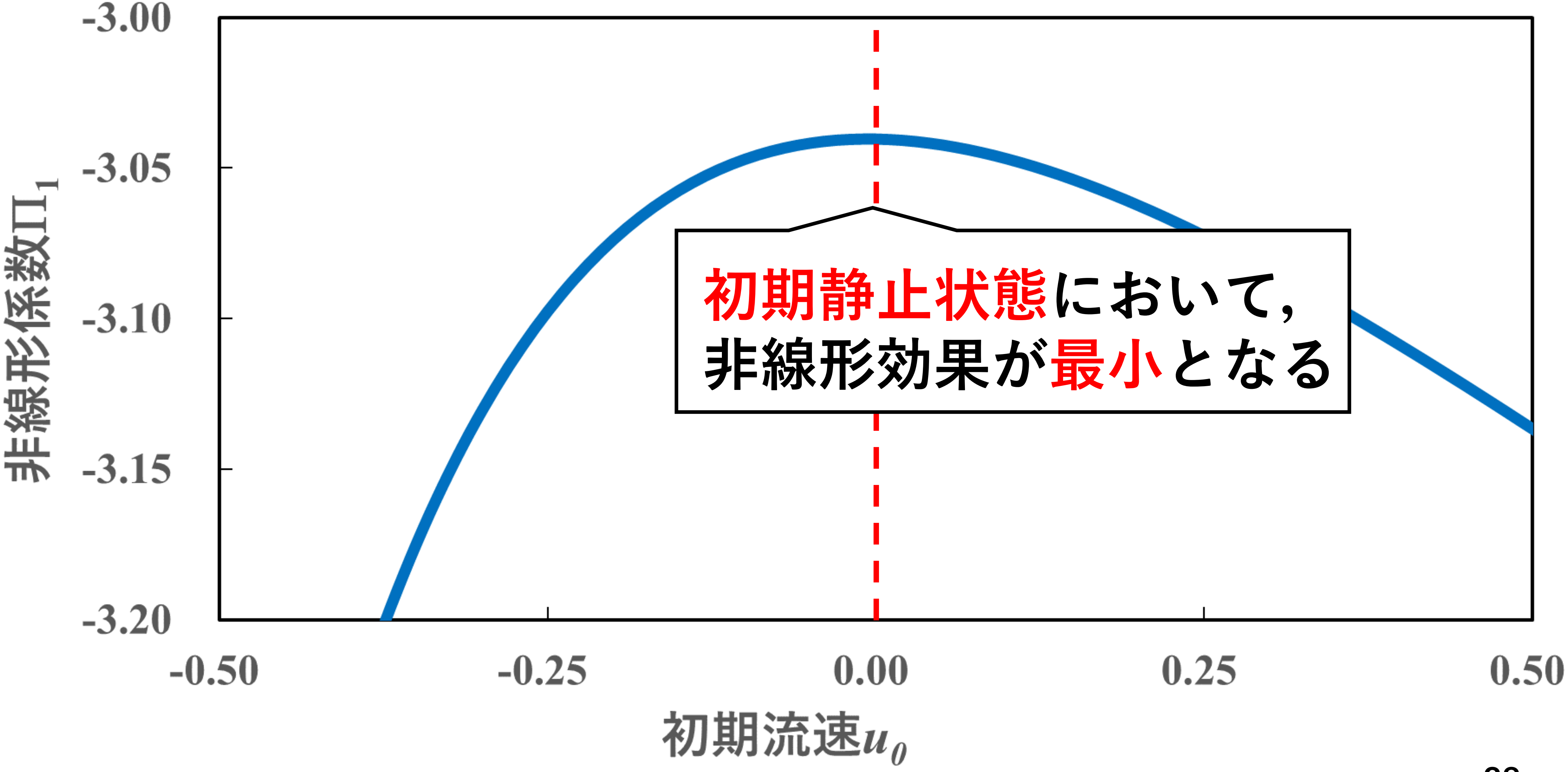
$$M \equiv \frac{u^*}{U^*}$$

⇒ $$\boxed{u_0 \approx M}$$

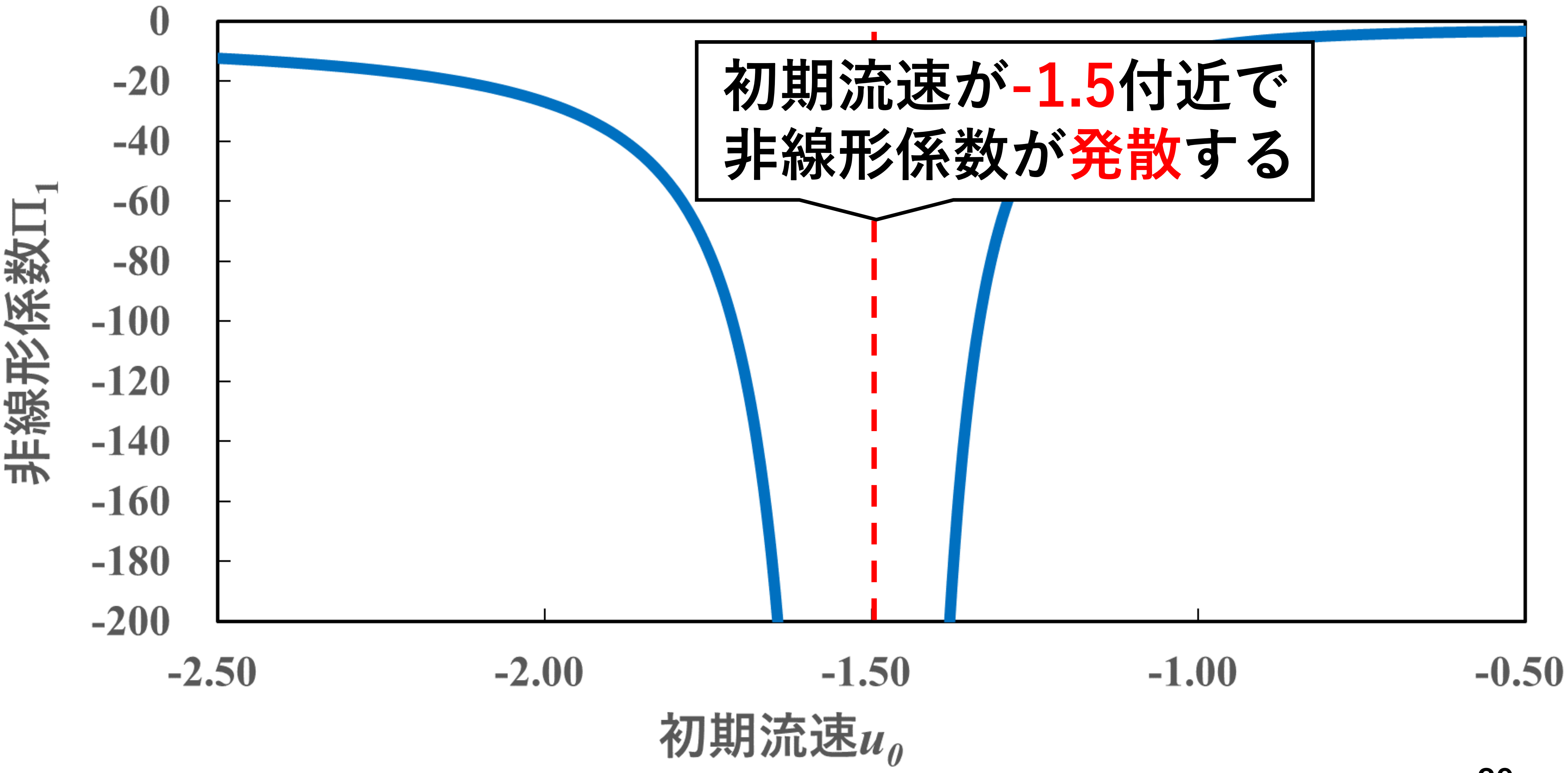
非線形係数Π_1とu_0の関係　$-u_0 > 0-$



非線形係数Π_1とu_0の関係　$-u_0 \approx 0-$



非線形係数Π_1とu_0の関係 $-u_0 < 0-$



目次

まとめ

- 初期流速が存在する場合におけるKdVB方程式を導出した

$$\frac{\partial R_1}{\partial \tau} + \boxed{\Pi_1 R_1 \frac{\partial R_1}{\boxed{\partial \xi}}} + \Pi_2 \frac{\partial^2 R_1}{\boxed{\partial \xi^2}} + \Pi_3 \frac{\partial^3 R_1}{\boxed{\partial \xi^3}} = 0$$

- 非線形効果は初期流速の影響を受け，
初期流速が存在すると，非線形効果が大きくなる

- 移動座標系ξは初期流速u_0分だけ音速v_{p}が補正される

$$\xi \equiv x - \left(\boxed{u_0 + v_{\mathrm{p}}} + \varepsilon \Pi_0\right) t$$

まとめ

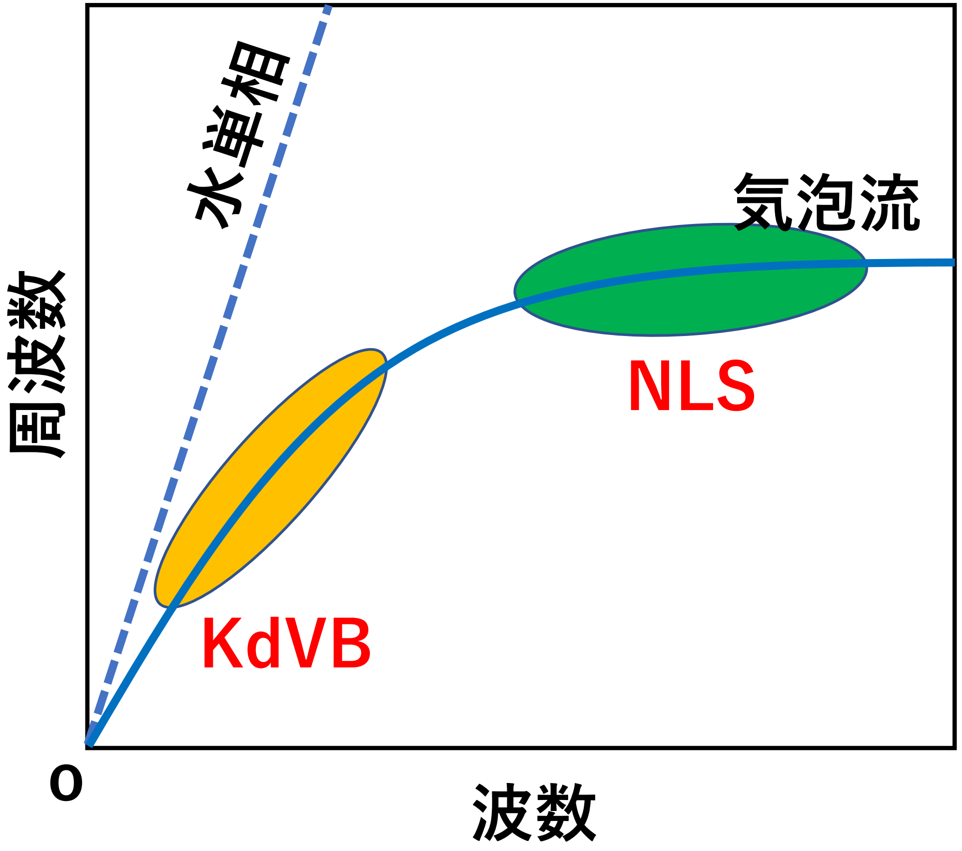
$$\frac{\partial R_1}{\partial \tau} + \Pi_1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial \xi} + \Pi_2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 R_1}{\partial \xi^3} = 0$$

初期流速をゼロの極限をとることにより,
先行研究に一致ことから,
上記のKdVB方程式は**より一般的な**KdVB方程式である

展望

- 本解析で導出されたKdVB方程式の解を数値的に求め,
  音波の波形を調べる

- 初期流速が存在する場合において,
  高周波数の短波の領域における,
  非線形Schrödinger方程式を導出



ご清聴ありがとうございました

従属変数の摂動展開とスケーリング

- 従属変数の摂動展開

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 + \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \cdots$$

$$\frac{u_G^*}{U^*} = u_{G0} + \epsilon u_{G1} + \epsilon^2 u_{G2} + \cdots$$

$$\frac{u_L^*}{U^*} = u_{L0} + \epsilon u_{L1} + \epsilon^2 u_{L2} + \cdots$$

$$\frac{R^*}{R_0^*} = 1 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \cdots$$

$$\frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} = 1 + \epsilon\rho_{G1} + \epsilon^2\rho_{G2} + \cdots$$

$$\frac{p_G^*}{p_{G0}^*} = 1 + \epsilon p_{G1} + \epsilon^2 p_{G2} + \cdots$$

$$\frac{p_L^*}{\rho_{L0}^* {U^*}^2} = p_{L0} + \epsilon p_{L1} + \epsilon^2 p_{L2} + \cdots$$

$$\frac{P^*}{\rho_{L0}^* {U^*}^2} = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \cdots$$

- 初期圧力・密度比・液体の粘性係数のスケーリング

$$\frac{p_{G0}^*}{\rho_{L0}^* {U^*}^2} \equiv O(1) \qquad \frac{p_{L0}^*}{\rho_{L0}^* {U^*}^2} \equiv O(1) \qquad \frac{\rho_{G0}^*}{\rho_{L0}^*} \equiv O(\epsilon^3) \qquad \frac{\mu^*}{\rho_{L0}^* U^* L^*} \equiv O(\epsilon)$$

近郊場：質量保存式

- 気相の質量保存式

$$\frac{\mathrm{D_G}\alpha_1}{\mathrm{D}t_0} - 3\frac{\mathrm{D_G}R_1}{\mathrm{D}t_0} + \frac{\partial u_{\mathrm{G}1}}{\partial x_0} = 0$$

- 液相の質量保存式

$$\alpha_0\frac{\mathrm{D_L}\alpha_1}{\mathrm{D}t_0} - (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L}1}}{\partial x_0} = 0$$

近郊場：運動量保存式

- 気相の運動量保存式

$$\beta_1\left(\frac{\mathrm{D_G}u_{\mathrm{G1}}}{\mathrm{D}t_0}-\frac{\mathrm{D_L}u_{\mathrm{L1}}}{\mathrm{D}t_0}\right)+\beta_2(u_{\mathrm{G0}}-u_{\mathrm{L0}})\frac{\mathrm{D_G}\alpha_1}{\mathrm{D}t_0}-3\gamma p_{\mathrm{G0}}\frac{\partial R_1}{\partial x_0}=0$$

- 液相の運動量保存式

$$(1-\alpha_0)\frac{\mathrm{D_L}u_{\mathrm{L1}}}{\mathrm{D}t_0}-\alpha_0\beta_1\left(\frac{\mathrm{D_G}u_{\mathrm{G1}}}{\mathrm{D}t_0}-\frac{\mathrm{D_L}u_{\mathrm{L1}}}{\mathrm{D}t_0}\right)-\alpha_0\beta_2(u_{\mathrm{G0}}-u_{\mathrm{L0}})\frac{\mathrm{D_G}\alpha_1}{\mathrm{D}t_0}$$
$$-\alpha_0u_{\mathrm{L0}}\frac{\mathrm{D_L}\alpha_1}{\mathrm{D}t_0}+u_{\mathrm{L0}}(1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L1}}}{\partial x_0}+(1-\alpha_0)\frac{\partial p_{\mathrm{L1}}}{\partial x_0}=0$$

近傍場：その他の従属変数

$$\alpha_1 \equiv s_1 R_1$$
$$u_{\mathrm{G}1} \equiv s_2 R_1$$
$$u_{\mathrm{L}1} \equiv s_3 R_1$$
$$p_{\mathrm{L}1} \equiv s_4 R_1$$

$$s_1 = \frac{(1-\alpha_0)[3\beta_1\alpha_0 v_{\mathrm{p}}^2 - (1-\alpha_0)s_4]}{\alpha_0 v_{\mathrm{p}}[(u_0 + v_{\mathrm{p}})(1-\alpha_0) + \beta_1 v_{\mathrm{p}}]}$$
$$s_2 = (s_1 - 3)v_{\mathrm{p}}$$
$$s_3 = -\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} v_{\mathrm{p}} s_1$$
$$s_4 = -\frac{\Delta^2}{\Omega^2}$$

遠方場：気相の質量保存式

$$\frac{\mathrm{D_G}\alpha_2}{\mathrm{D}t_0} - 3\frac{\mathrm{D_G}R_2}{\mathrm{D}t_0} + \frac{\partial u_{\mathrm{G2}}}{\partial x_0} = K_1$$

$$K_1 = 3\frac{\mathrm{D_G}R_1}{\mathrm{D}t_1} - \frac{\mathrm{D_G}\alpha_1}{\mathrm{D}t_1} - \frac{\partial u_{\mathrm{G1}}}{\partial x_1} + 3\frac{\mathrm{D_G}\alpha_1 R_1}{\mathrm{D}t_0} - 12R_1\frac{\mathrm{D_G}R_1}{\mathrm{D}t_0} + 3\frac{\partial R_1 u_{\mathrm{G1}}}{\partial x_0} - \frac{\partial \alpha_1 u_{\mathrm{G1}}}{\partial x_0}$$

遠方場：液相の質量保存式

$$\alpha_0 \frac{\mathrm{D_L}\alpha_2}{\mathrm{D}t_0} - (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L}2}}{\partial x_0} = K_2$$

$$K_2 = -\alpha_0 \frac{\mathrm{D_L}\alpha_1}{\mathrm{D}t_1} + (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L}1}}{\partial x_1} + (1-\alpha_0)\frac{\mathrm{D_L}\rho_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_0} - \alpha_0 \frac{\partial \alpha_1 u_{\mathrm{L}1}}{\partial x_0}$$

遠方場：気相の運動量保存式

$$\beta_1 \left(\frac{\mathrm{D_G} u_{\mathrm{G}2}}{\mathrm{D}t_0} - \frac{\mathrm{D_L} u_{\mathrm{L}2}}{\mathrm{D}t_0} \right) + \beta_2 (u_{\mathrm{G}0} - u_{\mathrm{L}0}) \frac{\mathrm{D_G} \alpha_2}{\mathrm{D}t_0} - 3\gamma p_{\mathrm{G}0} \frac{\partial R_2}{\partial x_0} = K_3$$

遠方場：気相の運動量保存式

$$
\begin{aligned}
K_3 = &- \beta_1 \left(\frac{\mathrm{D_G} u_{\mathrm{G}1}}{\mathrm{D}t_1} - \frac{\mathrm{D_L} u_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_1} \right) - \beta_2 (u_{\mathrm{G}0} - u_{\mathrm{L}0}) \frac{\mathrm{D_G} \alpha_1}{\mathrm{D}t_1} + 3\gamma p_{\mathrm{G}0} \frac{\partial R_1}{\partial x_1} \\
&- \beta_1 \alpha_1 \left(\frac{\mathrm{D_G} u_{\mathrm{G}1}}{\mathrm{D}t_0} - \frac{\mathrm{D_L} u_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_0} \right) - \beta_1 \left(u_{\mathrm{G}1} \frac{\partial u_{\mathrm{G}1}}{\partial x_0} - u_{\mathrm{L}1} \frac{\partial u_{\mathrm{L}1}}{\partial x_0} \right) \\
&- \beta_2 (u_{\mathrm{G}0} - u_{\mathrm{L}0}) u_{\mathrm{G}1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} - \beta_2 (u_{\mathrm{G}1} - u_{\mathrm{L}1}) \frac{\mathrm{D_G} \alpha_1}{\mathrm{D}t_0} \\
&- \beta_3 (u_{\mathrm{G}0} - u_{\mathrm{L}0}) \frac{\mathrm{D_G} \rho_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_0} + 3\gamma p_{\mathrm{G}0} \left[\alpha_1 \frac{\partial R_1}{\partial x_0} - (3\gamma + 1) R_1 \frac{\partial R_1}{\partial x_0} \right]
\end{aligned}
$$

遠方場：液相の運動量保存式

$$(1-\alpha_0)\frac{\mathrm{D_L}u_{\mathrm{L}2}}{\mathrm{D}t_0} - \alpha_0\beta_1\left(\frac{\mathrm{D_G}u_{\mathrm{G}2}}{\mathrm{D}t_0} - \frac{\mathrm{D_L}u_{\mathrm{L}2}}{\mathrm{D}t_0}\right) - \alpha_0\beta_2(u_{\mathrm{G}0}-u_{\mathrm{L}0})\frac{\mathrm{D_G}\alpha_2}{\mathrm{D}t_0}$$
$$-\alpha_0 u_{\mathrm{L}0}\frac{\mathrm{D_L}\alpha_2}{\mathrm{D}t_0} + u_{\mathrm{L}0}(1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L}2}}{\partial x_0} + (1-\alpha_0)\frac{\partial p_{\mathrm{L}2}}{\partial x_0} = K_4$$

遠方場：液相の運動量保存式の解析結果

$$
\begin{aligned}
K_4 = &-(1-\alpha_0)\frac{\mathrm{D_L}u_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_1} + \alpha_0\beta_1\left(\frac{\mathrm{D_G}u_{\mathrm{G}1}}{\mathrm{D}t_1} - \frac{\mathrm{D_L}u_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_1}\right) + \alpha_0\beta_2(u_{\mathrm{G}0}-u_{\mathrm{L}0})\frac{\mathrm{D_G}\alpha_1}{\mathrm{D}t_1} \\
&+ \alpha_0 u_{\mathrm{L}0}\frac{\mathrm{D_L}\alpha_1}{\mathrm{D}t_1} - u_{\mathrm{L}0}(1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L}1}}{\partial x_1} - (1-\alpha_0)\frac{\partial p_{\mathrm{L}1}}{\partial x_1} \\
&- u_{\mathrm{L}0}(1-\alpha_0)\frac{\mathrm{D_L}\rho_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_0} + \alpha_0\frac{\mathrm{D_L}\alpha_1 u_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_0} + \alpha_0 u_{\mathrm{L}0}\frac{\partial\alpha_1 u_{\mathrm{L}1}}{\partial x_0} - 2u_{\mathrm{L}1}(1-\alpha_0)\frac{\partial u_{\mathrm{L}1}}{\partial x_0} \\
&+ \alpha_0\alpha_1\frac{\partial p_{\mathrm{L}1}}{\partial x_0} + \alpha_0\alpha_1\beta_1\left(\frac{\mathrm{D_G}u_{\mathrm{G}1}}{\mathrm{D}t_0} - \frac{\mathrm{D_L}u_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_0}\right) \\
&+ \alpha_0\beta_1\left(u_{\mathrm{G}1}\frac{\partial u_{\mathrm{G}1}}{\partial x_0} - u_{\mathrm{L}1}\frac{\partial u_{\mathrm{L}1}}{\partial x_0}\right) + \alpha_0\beta_2(u_{\mathrm{G}0}-u_{\mathrm{L}0})u_{\mathrm{G}1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_0} \\
&+ \alpha_0\beta_2(u_{\mathrm{G}1}-u_{\mathrm{L}1})\frac{\mathrm{D_G}\alpha_1}{\mathrm{D}t_0} + \alpha_0\beta_3(u_{\mathrm{G}0}-u_{\mathrm{L}0})\frac{\mathrm{D_G}\rho_{\mathrm{L}1}}{\mathrm{D}t_0}
\end{aligned}
$$

遠方場：Keller式

$$R_2 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2} p_{\mathrm{L}2} = K_5$$

$$K_5 = \left[1 + \frac{3\gamma(3\gamma - 1) p_{\mathrm{G}0} \Omega^2}{2\Delta^2}\right] R_1^2 - \Omega^2 \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^2 R_1}{\mathrm{D}t_0^2} - \left(\frac{4\mu\Omega^2}{\Delta^2} + V\Delta\right) \frac{\mathrm{D}_{\mathrm{G}} R_1}{\mathrm{D}t_0}$$

遠方場：弱非線形波動方程式

$$\frac{\mathrm{D}^2 R_2}{\mathrm{D}t_0^2} - v_\mathrm{P}^2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_0^2} = K$$

$$K = 2v_\mathrm{P} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} \left[\frac{\partial R_1}{\partial t_1} + (v_\mathrm{P} + u_0) \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \Pi_0 \frac{\partial R_1}{\partial \varphi_0} + \Pi_1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial \varphi_0} + \Pi_2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial \varphi_0^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 R_1}{\partial \varphi_0^3} \right]$$

遠方場：弱非線形波動方程式

$$\Pi_0 = -\frac{v_{\mathrm{p}}(1-\alpha_0)\Delta^2 V^2}{6\alpha_0 \Omega^2}$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{6}\left[k_1 - \frac{1}{\alpha_0}k_2 + \frac{1-\alpha_0+\beta_1}{v_{\mathrm{p}}(1-\alpha_0)\beta_1}k_3 + \frac{1}{v_{\mathrm{p}}\alpha_0(1-\alpha_0)}k_4 - \frac{2\Delta^2}{v_{\mathrm{p}}\alpha_0\Omega^2}k_5\right]$$

$$\Pi_2 = -\frac{1}{6\alpha_0}\left(4\mu + \frac{V\Delta^3}{\Omega^2}\right)$$

$$\Pi_3 = \frac{\Delta^2}{6\alpha_0}$$

遠方場：弱非線形波動方程式

$$k_1 = -6v_\mathrm{p}(s_1 - 2) - 2s_2(s_1 - 3)$$

$$k_2 = -2\alpha_0 s_1 s_3$$

$$k_3 = \hat{k} + 3\gamma p_{\mathrm{G}0}(s_1 - 3\gamma - 1)$$

$$k_4 = -\alpha_0\hat{k} - 2(1-\alpha_0)s_3^2 + \alpha_0 s_1 s_4 - 2\alpha_0 v_\mathrm{p} s_1 s_3$$

$$k_5 = 1 + \frac{3\gamma(3\gamma - 1)p_{\mathrm{G}0}\Omega^2}{2\Delta^2}$$

$$\hat{k} = v_\mathrm{p}(\beta_1 + \beta_2)s_1(s_2 - s_3) - \beta_1(s_2^2 - s_3^2)$$

遠方場：弱非線形波動方程式

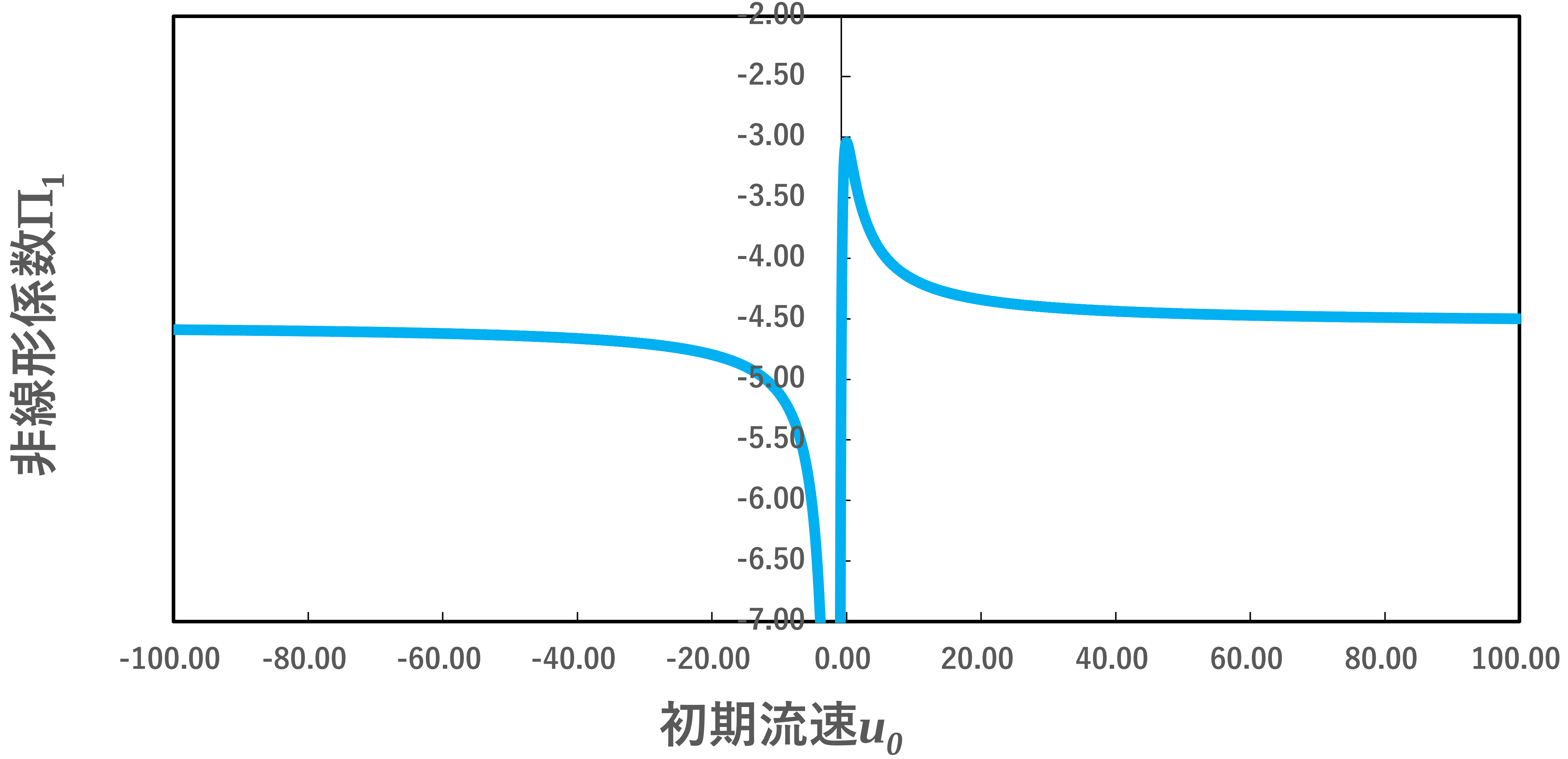
$$s_1 = \frac{(1-\alpha_0)[3\beta_1\alpha_0 v_\mathrm{p}^2 - (1-\alpha_0)s_4]}{\alpha_0 v_\mathrm{p}[(u_0+v_\mathrm{p})(1-\alpha_0)+\beta_1 v_\mathrm{p}]}$$

$$s_2 = (s_1 - 3)v_\mathrm{p}$$

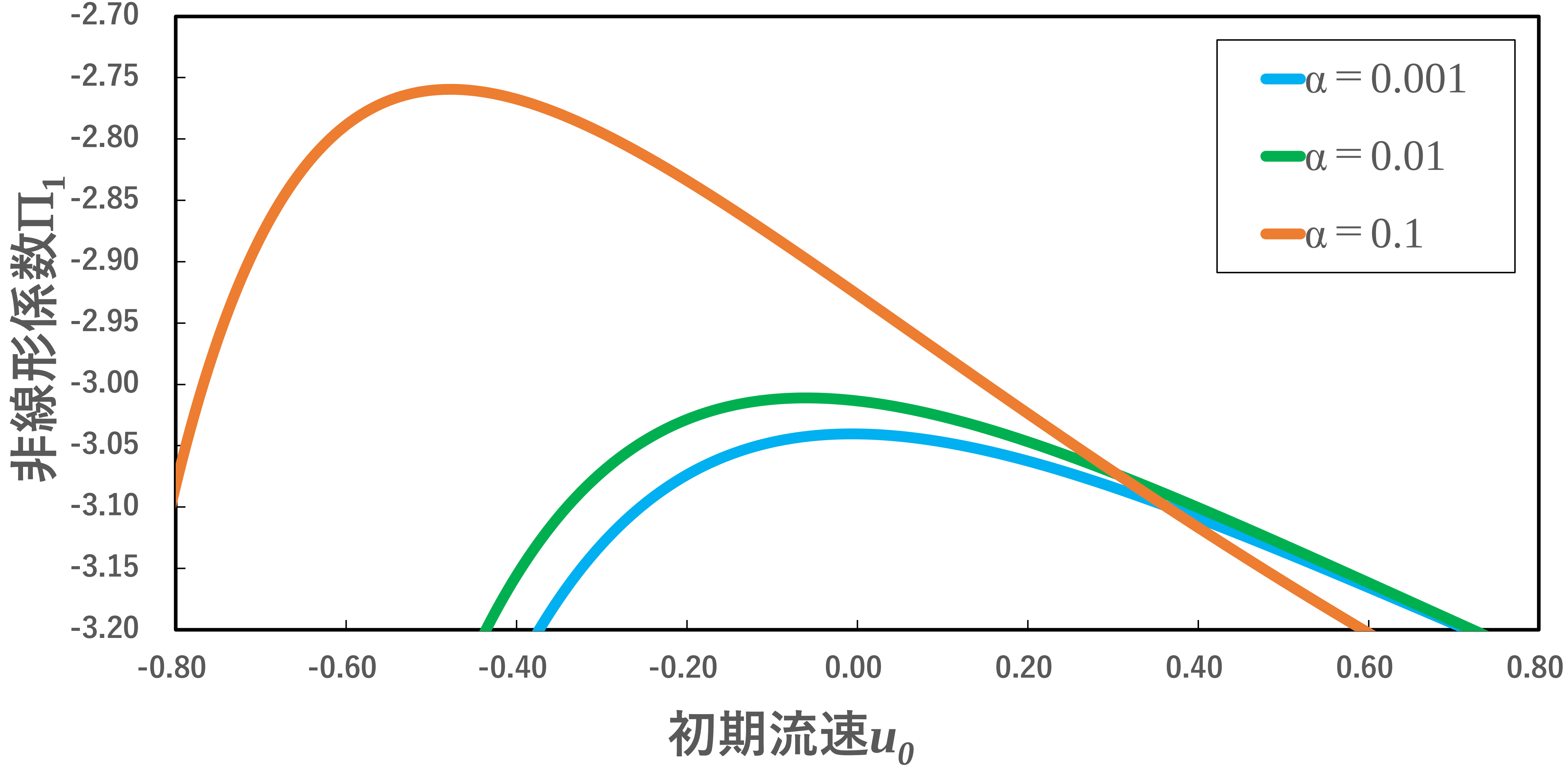
$$s_3 = -\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} v_\mathrm{p} s_1$$

$$s_4 = -\frac{\Delta^2}{\Omega^2}$$

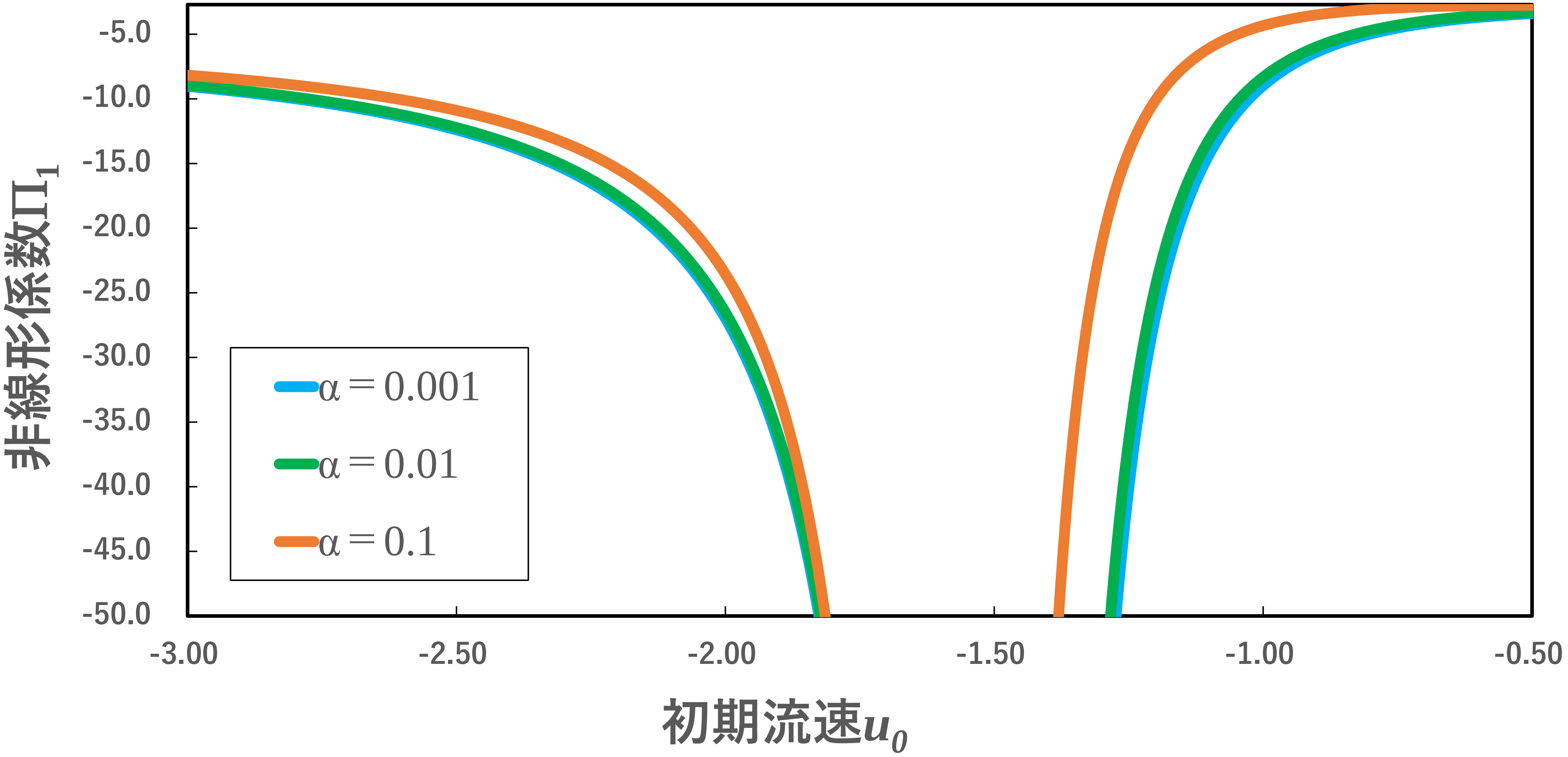
非線形係数Π_1とu_0の関係



非線形係数Π_1とu_0の関係



非線形係数Π_1とu_0の関係



気泡の固有角周波数$\omega_B{}^*$のスケーリング

$$\omega_B^* \equiv \sqrt{\frac{3\gamma(p_{L0}^* + 2\sigma^*/R_0^*) - 2\sigma^*/R_0^*}{\rho_{L0}^* {R_0^*}^2}}$$

$$p_{L0}^* = 101325\ \mathrm{Pa}, \quad \rho_{L0}^* = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}, \quad \sigma^* = 0.0728\ \mathrm{N/m}, \quad \gamma = 1$$

$R_0{}^*$=10 mm ⇨ $\omega_B{}^*$≒1.7 KHz

$R_0{}^*$=10 μm ⇨ $\omega_B{}^*$≒1.8 MHz

$R_0{}^*$=10 nm ⇨ $\omega_B{}^*$≒17 GHz

音源の入射周波数ω^*のスケーリング

$$\frac{\omega^*}{\omega^*_{\mathrm{B}}} \equiv \Omega\sqrt{\epsilon}$$

$$\Omega = 1, \quad \sqrt{\epsilon} = 0.15$$

R_0^*=10 mm ⇨ ω^*≒0.26 KHz

R_0^*=10 μm ⇨ ω^*≒0.27 MHz

R_0^*=10 nm ⇨ ω^*≒2.6 GHz

波の代表速度U^*のスケーリング

$$U^* = \sqrt{\frac{3\alpha_0(1-\alpha_0+\beta_1)\gamma p^*_{\mathrm{G0}}/\rho^*_{\mathrm{L0}} + \beta_1(1-\alpha_0)R^{*\,2}_0 \omega^{*\,2}_{\mathrm{B}}}{3\beta_1\alpha_0(1-\alpha_0)}}$$

$$\alpha_0 = 0.01, \quad \beta_1 = 1/2$$

R_0^*=10 mm ⇒ **U^*≒102 m/s**

R_0^*=10 μm ⇒ **U^*≒107 m/s**

R_0^*=10 nm ⇒ **U^*≒1012 m/s**

波の波長λ^*のスケーリング

$$\lambda^* = \frac{U^*}{\omega^*}$$

R_0^*=10 mm ⇨ λ^*≒0.39 m

R_0^*=10 μm ⇨ λ^*≒0.39 mm

R_0^*=10 nm ⇨ λ^*≒0.39 μm

非線形係数Π_1のスケーリング

$$\Pi_1 = \frac{1}{6}\left[k_1 - \frac{1}{\alpha_0}k_2 + \frac{1-\alpha_0+\beta_1}{v_{\mathrm{p}}(1-\alpha_0)\beta_1}k_3 + \frac{1}{v_{\mathrm{p}}\alpha_0(1-\alpha_0)}k_4 - \frac{2\Delta^2}{v_{\mathrm{p}}\alpha_0\Omega^2}k_5\right]$$

R_0^*=10 mm ⇒ Π_1 ≒3.09

R_0^*=10 µm ⇒ Π_1 ≒3.31

R_0^*=10 nm ⇒ Π_1 ≒3.55