気泡を含む圧縮性液体中における
高速準単色波の弱非線形伝播

慶本 天謹, 金川 哲也 (筑波大学)
Takanori YOSHIMOTO, Tetsuya KANAGAWA, University of Tsukuba

1 はじめに

圧力波は, 多数の気泡を含む水 (気泡流) 中においては, 単相水中に比べて著しく様相が異なる. その最も重要な性質の 1 つに, 分散性が挙げられる [1]. すなわち, 単相水中においては, 波の周波数は波長に依存しないが, 気泡流中においては, 波の周波数が波長に依存し, 波の伝播速度も波長の関数となることが知られている.

静止気泡流の線形分散関係によれば, 気泡流における位相速度が, 単相水における位相速度より常に小さくなる Slow mode, および, 常に大きくなる Fast mode の 2 つのモードが存在する [2, 3]. Slow mode は水の圧縮性を無視したモードであることに対して, Fast mode は水の圧縮性の効果が生み出すモードである. Slow mode は約 50 年前に発見されており [1], 理論と実験の両面から長い研究の歴史を有する. 著者らは最近, Slow mode に対して, 低周波数の長波を記述する Korteweg–de Vries–Burgers (KdVB) 方程式, 固有周波数程度の短波を記述する非線形 Schrödinger (NLS) 方程式をそれぞれ導出し, 統一的な見解を示した [4]. 一方で, Fast mode に相当する波は, 従来より液体の圧縮性を無視する解析が多く, 実験的観測も遅かったため, 存在があまり知られていないように見受けられる [2, 5]. 大谷・杉山の衝撃波管実験の結果, 波の振幅が極めて小さいことが判明しており [5], 計測の困難さを鑑みれば, 理論的予測が強く望まれている. 波の振幅は, 実現象ゆえに有限だが極めて小さいため, 線形でも強非線形でもない, 弱非線形理論解析が手法として適合する.

そこで, 本稿では, 気泡流の基礎方程式系から, Fast mode における準単色波を記述する弱非線形波動方程式の導出を行う.

2 問題設定および基礎方程式

多数の気泡を含む静止水 (気泡流) を考える. 水の圧縮性を考慮する. 気泡は, すべて球形であり, 一様に分布しており, 生成, 消滅, 合体, 分裂しないものとする. この気泡流の中に音源を置き, 1 次元進行波を入射させる. 気体は水と比べて弾性が大きいため, 音波の入射によって気泡は激しく振動 (非線形振動) する. 簡単のため, 気体の粘性, 気体と液体の熱伝導性, 気液界面を通しての相変化および物質輸送, さらに Reynolds 応力は無視する.

2.1 基礎方程式系

まず, 気相と液相それぞれに対する質量保存式, および, 運動量保存式を用いる [3, 6]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_G^*) + \dfrac{\partial}{\partial x^*}(\alpha\rho_G^* u_G^*) = 0, & (1)\\
\dfrac{\partial}{\partial t^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^*\right] + \dfrac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^* u_L^*\right] = 0, & (2)\\
\dfrac{\partial}{\partial t^*}(\alpha\rho_G^* u_G^*) + \dfrac{\partial}{\partial x^*}\left(\alpha\rho_G^* {u_G^*}^2\right) + \alpha\dfrac{\partial p_G^*}{\partial x^*} = F^*, & (3)\\
\dfrac{\partial}{\partial t^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^* u_L^*\right] + \dfrac{\partial}{\partial x^*}\left[(1-\alpha)\rho_L^* {u_L^*}^2\right] + (1-\alpha)\dfrac{\partial p_L^*}{\partial x^*} + P^*\dfrac{\partial \alpha}{\partial x^*} = -F^*. & (4)
\end{cases}
$$

ここで, t^* は時間, x^* は空間座標, ρ^* は密度, u^* は流速, p^* は圧力であり, *は有次元数を表し, 添え字 G と L はそれぞれ気相と液相を表す. 単相の水に対する基礎方程式系と異なる点の 1 つは, 気相の体積分率 (ボイド率) α という変数を含む点といえる. また, 液相の運動量保存式 (4) には, 気泡の気液界面における局所的な液相圧力 P^* を含む項が存在し, さらに両運動量保存式 (3)(4) において, 気相・液相間の付加質量力 F^* を含む項が存在する. 本研究では, F^* に以下のモデルを用いる [6, 7]:

$$
F^* = -\beta_1\alpha\rho_L^*\left(\frac{\mathrm{D}_G u_G^*}{\mathrm{D}t^*} - \frac{\mathrm{D}_L u_L^*}{\mathrm{D}t^*}\right) - \beta_2\rho_L^*(u_G^* - u_L^*)\frac{\mathrm{D}_G\alpha}{\mathrm{D}t^*} - \beta_3\alpha(u_G^* - u_L^*)\frac{\mathrm{D}_G\rho_L^*}{\mathrm{D}t^*}. \tag{5}
$$

ここに, 係数 β_j $(j = 1, 2, 3)$ を含むが, 球形気泡においては β_j はすべて 1/2 である. また, $\mathrm{D}_G/\mathrm{D}t^*$ および $\mathrm{D}_L/\mathrm{D}t^*$ は, それぞれ, 気相と液相に対する Lagrange 微分である:

$$
\frac{\mathrm{D}_G}{\mathrm{D}t^*} = \frac{\partial}{\partial t} + u_G\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\mathrm{D}_L}{\mathrm{D}t^*} = \frac{\partial}{\partial t} + u_L\frac{\partial}{\partial x}. \tag{6}
$$

周囲水の圧縮性を考慮した気泡の膨張・収縮運動を表す Keller の式を用いる [8]:

$$
\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right) R^*\frac{\mathrm{D}_G^2 R^*}{\mathrm{D}t^{*2}} &+ \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)\left(\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}\right)\frac{P^*}{\rho_{L0}^*} + \frac{R^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^*}\frac{\mathrm{D}_G}{\mathrm{D}t^*}(p_L^* + P^*).
\end{aligned} \tag{7}
$$

ここで, R^* は気泡半径であり, 時間 t^* のみならず空間座標 x^* の関数に拡張したことで, 気泡流中のすべての気泡に適用することが可能となる. Keller の式の左辺は時間の 2 階微分を含むため慣性項であり, 右辺第 1 項は弾性および駆動力項, 右辺第 2 項は時間の 1 階微分を含むため減衰項である. 慣性項を見てわかるとおり, Keller の式は 3 次の非線形偏微分方程式であって, 実際に, 本解析において 3 次の非線形項が現れる.

方程式系 (1)–(7) は, 以下に示す, 気相のポリトロープ変化の状態方程式, 液相の Tait の状態方程式, 気泡内の気体の質量保存式, 気液界面における力のつり合いを表す式 (Young–

Laplace の式) によって閉じられる:

$$\begin{cases} \dfrac{p_G^*}{p_{G0}^*} = \left(\dfrac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*}\right)^\gamma, \quad p_L^* = p_{L0}^* + \dfrac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n}\left[\left(\dfrac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*}\right)^n - 1\right], \\ \dfrac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} = \left(\dfrac{R_0^*}{R^*}\right)^3, \quad p_G^* - (p_L^* + P^*) = \dfrac{2\sigma^*}{R^*} + \dfrac{4\mu^*}{R^*}\dfrac{\mathrm{D}_G R^*}{\mathrm{D}t^*}. \end{cases} \tag{8}$$

ここで, γ はポリトロープ指数, σ^* は表面張力, μ^* は液相の粘性係数を表す. 液相の状態方程式には n という物性値を含むが, 水の場合は $n = 7.15$ であり, これは, 水は空気よりも 7 倍程度縮みにくいことを意味する.

添え字 0 が付いた量は初期静止状態における値であり, すべて定数である.

3 解析手法

3.1 パラメータスケーリング法

Kanagawa らによって提案されたパラメータスケーリング法を用いる [4]. 波の代表的な群速度 U^*, 波長 L^*, 角振動数 ω^* の間には, $U^* = L^*\omega^*$ の関係が成り立ち, $\omega^* \equiv 1/T^*$ とする (T^* は波の代表的な周期). ここで, 3 つの無次元パラメータの大きさを定める:

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv O(\epsilon^1) = V\epsilon, \quad \frac{R_0^*}{L^*} \equiv O(\epsilon^0) = \mathit{\Delta}, \quad \frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv O(\epsilon^{-1/2}) = \frac{\mathit{\Omega}}{\sqrt{\epsilon}}. \tag{9}$$

無次元パラメータ (9) は, 左から順に, それぞれ, 速度, 長さ, 時間についてのスケーリングを意味する. ここで, 摂動 ϵ は, 波の代表的な無次元振幅であり, 1 より十分小さいが有限値をとる (弱非線形波動); V, $\mathit{\Delta}$, $\mathit{\Omega}$ はすべて $O(1)$ の定数である; c_{L0}^* は単相水中の音速, R_0^* は初期気泡径, ω_B^* は単一気泡の固有角振動数である:

$$\omega_B^* \equiv \sqrt{\frac{3\gamma(p_{L0}^* + 2\sigma^*/R_0^*) - 2\sigma^*/R_0^*}{\rho_{L0}^* R_0^{*2}}}. \tag{10}$$

3.2 多重尺度法による解析

パラメータスケーリング法を, 多重尺度法 [9] と組み合わせて解析を行う.

独立変数として, 時間 t^* と空間座標 x^* を, $t \equiv t^*/T^*, x \equiv x^*/L^*$ と無次元化する. これらを用いて, 近傍場用, その次のオーダすなわち $O(1/\epsilon)$ の時空間スケールの遠方場 (遠方場 I) 用, さらにその次の $O(1/\epsilon^2)$ の時空間スケールの遠方場 (遠方場 II) 用に, 計 6 つの新たな独立変数を準備する:

$$\begin{cases} t_0 = t, \quad x_0 = x, \\ t_1 = \epsilon t, \quad x_1 = \epsilon x, \\ t_2 = \epsilon^2 t, \quad x_2 = \epsilon^2 x. \end{cases} \tag{11}$$

これらを用いて, 時間と空間座標の偏微分演算子を展開する (微分展開法)[9]:

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_0}+\epsilon\frac{\partial}{\partial t_1}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2},\quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x_0}+\epsilon\frac{\partial}{\partial x_1}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{12}$$

従属変数の全ては, 新たな独立変数 (11) の関数とみなされる. これらを摂動展開する:

$$\alpha/\alpha_0=1+\epsilon\alpha_1+\epsilon^2\alpha_2+O(\epsilon^3), \tag{13}$$

$$R^*/R_0^*=1+\epsilon R_1+\epsilon^2R_2+O(\epsilon^3), \tag{14}$$

$$u_G^*/U^*=\epsilon u_{G1}+\epsilon^2u_{G2}+O(\epsilon^3), \tag{15}$$

$$u_L^*/U^*=\epsilon u_{L1}+\epsilon^2u_{L2}+O(\epsilon^3), \tag{16}$$

$$p_L^*/p_{L0}^*=1+\epsilon p_{L1}+\epsilon^2p_{L2}+O(\epsilon^3). \tag{17}$$

いずれも無次元振幅 ϵ^1 から展開している. 無次元圧力の展開 (17) が 1 から始まるが, これまでの著者らの摂動展開 [4, 10] とは異なることに注意されたい.

つづいて, 液相密度 ρ_L^* の展開を以下のように定める:

$$\rho_L^*/\rho_{L0}^*=1+\epsilon^3\rho_{L1}+\epsilon^4\rho_{L2}+O(\epsilon^5). \tag{18}$$

すなわち, ϵ^3 から展開を始めるが, 3 という指数は一意に定まることを注意しておく. その理由は以下の 2 点である: (i) p_L^* と ρ_L^* は Tait の状態方程式 (8) に従う; (ii) 状態方程式 (8) に含まれる初期値は, 下記スケーリング (19) を満たさねばならない.

最後に, 気相と液相の初期圧力 p_{G0}^* と p_{L0}^* のスケーリングを定める:

$$\frac{p_{G0}^*}{\rho_{L0}^*c_{L0}^{*2}}\equiv O(\epsilon^2)=\epsilon^2p_{G0},\quad \frac{p_{L0}^*}{\rho_{L0}^*c_{L0}^{*2}}\equiv O(\epsilon^2)=\epsilon^2p_{L0}. \tag{19}$$

ここで, p_{G0} と p_{L0} はともに $O(1)$ であり, p_{G0}^* と p_{L0}^* は単相水中の音速 c_{L0}^* を用いて無次元化されているが, これもこれまでの著者らの無次元化 [4, 10] とは異なる.

4 解析結果

4.1 近傍場—— 分散波の線形伝播

基礎方程式系 (1)–(4) と (7) に対応する, ϵ に対する最低次の方程式として, 線形方程式系

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial t_0}-3\dfrac{\partial R_1}{\partial t_0}+\dfrac{\partial u_{G1}}{\partial x_0}=0, & (20)\\[2mm] \alpha_0\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial t_0}-(1-\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L1}}{\partial x_0}=0, & (21)\\[2mm] -3\gamma\dfrac{p_{G0}}{V^2}\dfrac{\partial R_1}{\partial x_0}+\beta_1\dfrac{\partial u_{G1}}{\partial t_0}-\beta_1\dfrac{\partial u_{L1}}{\partial t_0}=0, & (22)\\[2mm] (1-\alpha_0+\beta_1\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L1}}{\partial t_0}-\beta_1\alpha_0\dfrac{\partial u_{G1}}{\partial t_0}+(1-\alpha_0)\dfrac{p_{L0}}{V^2}\dfrac{\partial p_{L1}}{\partial x_0}=0, & (23)\\[2mm] \dfrac{p_{L0}}{V^2\mathit{\Delta}^2}p_{L1}+\dfrac{\partial^2R_1}{\partial t_0^2}=0, & (24)\end{cases}$$

を得る. 質量保存式 (20)(21) は, 気相と液相ともに Slow mode の線形近似と全く同じ式が導かれた [4, 10]. したがって, 質量保存式 (20)(21) だけを眺めても, Fast mode, Slow mode のいずれの波であるかを判別できないものと示唆される. 運動量保存式 (22)(23) は, 気相・液相ともに, Slow mode とは異なり, 速度に関する定数 V が圧力項の係数に現れている. Keller の式 (24) には, 速度に関する V, および, 長さに関する Δ が現れている.

液相が非圧縮性ならば, $c_{L0}^* \to \infty$ の極限が対応するが, 無次元振幅 ϵ が有限の値をとることを踏まえると, 非圧縮性極限は $V \to 0$ と表現できる. しかし, 本解析では, 液相の圧縮性を考慮しており, そもそも $V = O(1)$ である. 液相の圧縮性の効果が, V によって表現されることから, 圧縮性に起因する Fast mode を表すためには V が必要である. 実際に, V が運動量保存式 (22)(23) に含まれていることは, 式 (22)(23) が Fast mode に対応することを示す.

無次元化した基礎方程式系 (20)–(24) は, R_1 を従属変数とする単一偏微分方程式にまとめることができる:

$$\mathcal{L}[R_1] = 0, \quad \mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - \frac{(1-\alpha_0+\beta_1)\gamma p_{G0}}{\beta_1(1-\alpha_0)V^2}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0}\frac{\partial^4}{\partial x_0^2 \partial t_0^2}. \tag{25}$$

これは, 分散項を伴う線形波動方程式である. その解に準単色波を仮定する:

$$R_1 = A(t_1, t_2, x_1, x_2)\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{c.c.}, \quad \theta = kx_0 - \Omega(k)t_0. \tag{26}$$

ここで, A は複素振幅, $k \equiv k^* L^*$ は無次元波数, θ は位相関数である. すなわち, 搬送波 $\mathrm{e}^{i\theta}$ のゆっくりとした変化が, 包絡波 A によって記述される. 線形分散関係を求めておく:

$$D(k,\Omega) = \frac{(1-\alpha_0+\beta_1)\gamma p_{G0}}{\beta_1(1-\alpha_0)V^2}k^2 - \frac{\Delta^2 k^2 \Omega^2}{3\alpha_0} - \Omega^2 = 0. \tag{27}$$

ここで, k と Ω の関数関係は線形ではないため, 分散性を有することがわかる. また, 虚部を含まないため, 近傍場においては散逸性は現れない. 位相速度 v_p と群速度 v_g を導く:

$$v_p = \frac{\Omega}{k} = \sqrt{\frac{(1-\alpha_0+\beta_1)\gamma p_{G0}}{\beta_1(1-\alpha_0)V^2}\frac{3\alpha_0}{3\alpha_0+\Delta^2 k^2}}, \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}k} = \frac{3\alpha_0 \Omega}{k(3\alpha_0+\Delta^2 k^2)}. \tag{28}$$

式 (26) を式 (20)–(24) に代入し, t_0 および x_0 について積分すると, 1 次の摂動は,

$$\alpha_1 = b_1 R_1, \quad u_{G1} = b_2 R_1, \quad u_{L1} = b_3 R_1, \quad p_{L1} = b_4 R_1, \tag{29}$$

となり, すべては, R_1 の実定数 b_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ 倍として表現可能である:

$$\begin{aligned} b_4 &= \frac{V^2\Delta^2\Omega^2}{p_{L0}}, \quad b_1 = \frac{(1-\alpha_0)\left[3\beta_1\alpha_0 - (1-\alpha_0)p_{L0}b_4 k^2/\left(V^2\Omega^2\right)\right]}{\alpha_0(1-\alpha_0+\beta_1)}, \\ b_2 &= (b_1 - 3)\frac{\Omega}{k}, \quad b_3 = -\frac{\alpha_0 b_1 \Omega}{(1-\alpha_0)k}. \end{aligned} \tag{30}$$

4.2 遠方場 I—— 包絡波の線形伝播

基礎方程式系 (1)–(7) に対応する, ϵ^2 に対する非同次方程式は, 以下の方程式系である:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - 3\dfrac{\partial R_2}{\partial t_0} + \dfrac{\partial u_{G2}}{\partial x_0} = M_1, & (31) \\
\alpha_0 \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial t_0} - (1-\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L2}}{\partial x_0} = M_2, & (32) \\
-3\gamma \dfrac{p_{G0}}{V^2}\dfrac{\partial R_2}{\partial x_0} + \beta_1 \dfrac{\partial u_{G2}}{\partial t_0} - \beta_1 \dfrac{\partial u_{L2}}{\partial t_0} = M_3, & (33) \\
(1-\alpha_0+\beta_1\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L2}}{\partial t_0} - \beta_1\alpha_0 \dfrac{\partial u_{G2}}{\partial t_0} + (1-\alpha_0)\dfrac{p_{L0}}{V^2}\dfrac{\partial p_{L2}}{\partial x_0} = M_4, & (34) \\
\dfrac{p_{L0}}{V^2 \mathit{\Delta}^2} p_{L2} + \dfrac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} = M_5. & (35)
\end{cases}
$$

ここで, 非同次項 $M_j\ (j=3,4,5)$ は, それぞれ,

$$
\begin{aligned}
M_3 = & 3\gamma \frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial R_1}{\partial x_1} - \beta_1 \frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G1}-u_{L1}) - \beta_1 \left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} \right) \\
& - \beta_1\alpha_1 \frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G1}-u_{L1}) - \beta_2 (u_{G1}-u_{L1})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} + 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\left[\alpha_1 \frac{\partial R_1}{\partial x_0} - (3\gamma+1)R_1\frac{\partial R_1}{\partial x_0} \right], \quad (36) \\
M_4 = & -(1-\alpha_0)\left(\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{L1}}{\partial t_1} \right) + \beta_1\alpha_0 \frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G1}-u_{L1}) + \alpha_0 \frac{\partial \alpha_1 u_{L1}}{\partial t_0} \\
& + \beta_1\alpha_0 \left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} \right) + \beta_1\alpha_0\alpha_1 \frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G1}-u_{L1}) + \beta_2\alpha_0 (u_{G1}-u_{L1})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} \\
& + \alpha_0\alpha_1 \frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_0} - (1-\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}^2}{\partial x_0} + \alpha_0 p_{L1}\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0}, \quad (37) \\
M_5 = & -2\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0 \partial t_1} - R_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - 2u_{G1}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0 \partial x_0} - \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0}\frac{\partial R_1}{\partial t_0} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial t_0} \right)^2 + \frac{3\gamma(3\gamma-1)}{2V^2\mathit{\Delta}^2} p_{G0} R_1^2 - \frac{R_1}{\mathit{\Omega}^2}. \quad (38)
\end{aligned}
$$

なお, M_1 と M_2 は, Slow mode の NLS 方程式の導出過程の第 2 次近似と全く等しい [4]. 近傍場の場合と同様に, 遠方場 I でも, 質量保存式 (31)(32) は Slow mode の場合と同一で, 運動量保存式 (33)(34) の左辺の係数には, 近傍場同様に V が現れている. 新たな違いは非同次項に潜む. すなわち, 運動量保存式の非同次項 (36)(37) の係数に V を含む. 具体的には, 気相と液相それぞれの無次元初期圧力 p_{G0} および p_{L0} に, $1/V^2$ がかけられている. Keller の式 (35) の左辺も, V と $\mathit{\Delta}$ を含む点は近傍場同様であるが, 非同次項 (38) において, 運動量保存式と同様に, p_{G0} に $1/V^2$ がかけられている. さらに, (38) の最右辺に, Slow mode では現れない R_1 を含む線形項が現れた.

連立非同次方程式系 (31)–(35) を, 単一の非同次方程式にまとめる:

$$
\mathcal{L}[R_2] = \mathit{\Gamma} A^2 \mathrm{e}^{i2\theta} + i\left(-\frac{\partial D}{\partial \mathit{\Omega}} \right)\left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_1} + i\eta A \right)\mathrm{e}^{i\theta} + \text{c.c.}. \quad (39)
$$

ここで, 実定数は以下のように与えられる:

$$
\begin{aligned}
&\eta = -\frac{k}{2\Omega^4}(v_p + v_g) < 0,\\
&\Gamma = -\frac{2}{3}\left[\Omega m_1 - \frac{\Omega m_2}{\alpha_0} + \frac{1-\alpha_0+\beta_1}{\beta_1(1-\alpha_0)}km_3 + \frac{km_4}{\alpha_0(1-\alpha_0)} - \frac{2\Delta^2 k^2 m_5}{\alpha_0}\right],\\
&m_1 = 6(2-b_1)\Omega + 2b_2(3-b_1)k, \quad m_2 = -2\alpha_0 b_1 b_3 k,\\
&\hat{m} = (\beta_1+\beta_2)(b_2-b_3)b_1\Omega - \beta_1(b_2^2 - b_3^2)k, \quad m_3 = \hat{m} + 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}(b_1 - 3\gamma - 1)k,\\
&m_4 = -\alpha_0\hat{m} + \alpha_0 b_1 b_4 k - 2(1-\alpha_0)b_3^2 k - 2\alpha_0 b_1 b_3 \Omega + \alpha_0 b_1 b_4 \frac{p_{L0}}{V^2}k,\\
&m_5 = -3b_2\Omega k + \frac{3\gamma(3\gamma-1)p_{G0}}{2\Delta^2} + \frac{5\Omega^2}{2}.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

非同次方程式 (39) の可解条件より, 次式が課される:

$$
\frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g\frac{\partial A}{\partial x_1} + i\eta A = 0. \tag{41}
$$

Slow mode の第 2 次近似の場合 [4] と比較すると, Fast mode では新たに次の項が現れた:

$$
i\eta A = -i\frac{k}{2\Omega^4}(v_p + v_g)A. \tag{42}
$$

式 (41) を式 (39) に代入すると,

$$
\mathcal{L}[R_2] = \Gamma A^2 \mathrm{e}^{i2\theta} + \text{c.c.}, \tag{43}
$$

となり, その解は,

$$
R_2 = c_0 A^2 \mathrm{e}^{i2\theta} + \text{c.c.}, \quad c_0 \equiv \frac{\Gamma}{D_{22}}, \quad D_{22} \equiv D(2k, 2\Omega) = -\frac{4\Delta^2\Omega^2 k^2}{\alpha_0}, \tag{44}
$$

であった [4]. さらに, 式 (44) を式 (31)–(35) に代入すると, 2 次の摂動が求まる:

$$
\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ u_{G2} \\ u_{L2} \\ p_{L2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & 0 \\ c_3 & d_3 & e_3 & 0 \\ (V^2/p_{L0})c_4 & (V^2/p_{L0})d_4 & (V^2/p_{L0})e_4 & (V^2/p_{L0})f_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2\mathrm{e}^{i2\theta} + \text{c.c.} \\ i\partial A/\partial t_1 \mathrm{e}^{i\theta} + \text{c.c.} \\ A\mathrm{e}^{i\theta} + \text{c.c.} \\ |A|^2 \end{pmatrix}. \tag{45}
$$

ここで, 実定数 c_j, d_j, e_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ と f_s は, それぞれ,

$$
\begin{aligned}
&c_4 = \Delta^2(4c_0\Omega^2 + m_5), \quad c_3 = \left[c_4 - \frac{3\gamma p_{G0}\alpha_0 c_0}{(1-\alpha_0)V^2}\right]\frac{k}{\Omega} - \frac{\alpha_0 m_3 + m_4}{2(1-\alpha_0)\Omega},\\
&c_1 = -\frac{(1-\alpha_0)c_3 k}{\alpha_0\Omega} - \frac{m_2}{2\alpha_0\Omega}, \quad c_2 = (c_1 - 3c_0)\frac{\Omega}{k} + \frac{m_1}{2k},\\
&d_4 = 2\Delta^2\Omega, \quad d_1 = \frac{d_4}{3\alpha_0 v_p^2}[b_1 - 3(1-\alpha_0)], \quad d_2 = \frac{d_4}{v_p}\left(1 + \frac{b_2}{6\alpha_0 v_p}\right), \quad d_3 = \frac{d_4}{v_p}\left(1 + \frac{b_3}{6\alpha_0 v_p}\right),\\
&e_4 = -\frac{\Delta^2}{\Omega^2}, \quad e_3 = \frac{e_4}{v_p} - \frac{b_3}{k}\frac{\eta}{v_g}, \quad e_1 = -\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\left(\frac{e_3}{v_p} - \frac{b_3}{\Omega}\frac{\eta}{v_g}\right), \quad e_2 = e_1 v_p + \frac{b_2}{k}\frac{\eta}{v_g},\\
&f_s = -\Delta^2(\Omega^2 + 2b_2\Omega k) + \frac{3\gamma(3\gamma-1)p_{G0}}{V^2},
\end{aligned}
\tag{46}
$$

と与えられるが, $e_j\,(j=1,2,3,4)$ を係数とする $A\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{c.c.}$ なる項は, Slow mode では現れなかった [4] ことを強調しておきたい.

4.3 遠方場 II—— 包絡波の散逸と分散を伴う非線形伝播

基礎方程式系 (1)–(4) と (7) に対応する, ϵ^3 に対する方程式は, 以下の方程式系である:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial t_0} - 3\dfrac{\partial R_3}{\partial t_0} + \dfrac{\partial u_{G3}}{\partial x_0} = N_1, & (47) \\ \alpha_0\dfrac{\partial \alpha_3}{\partial t_0} - (1-\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L3}}{\partial x_0} = N_2, & (48) \\ -3\gamma\dfrac{p_{G0}}{V^2}\dfrac{\partial R_3}{\partial x_0} + \beta_1\dfrac{\partial u_{G3}}{\partial t_0} - \beta_1\dfrac{\partial u_{L3}}{\partial t_0} = N_3, & (49) \\ (1-\alpha_0+\beta_1\alpha_0)\dfrac{\partial u_{L3}}{\partial t_0} - \beta_1\alpha_0\dfrac{\partial u_{G3}}{\partial t_0} + (1-\alpha_0)\dfrac{p_{L0}}{V^2}\dfrac{\partial p_{L3}}{\partial x_0} = N_4, & (50) \\ \dfrac{p_{L0}}{V^2\varDelta^2}p_{L3} + \dfrac{\partial^2 R_3}{\partial t_0^2} = N_5. & (51) \end{cases}$$

ここで, 非同次項 $N_j\,(j=1,2,3,4,5)$ は, それぞれ,

$$\begin{aligned} N_1 =& -\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial t_2}(3R_1-\alpha_1) + \frac{\partial}{\partial t_1}[3R_1(\alpha_1-2R_1)+3R_2-\alpha_2] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1}[u_{G1}(3R_1-\alpha_1)-u_{G2}] + \frac{\partial}{\partial x_0}[3(u_{G2}R_1+u_{G1}R_2)-(\alpha_1u_{G2}+\alpha_2u_{G1})] \\ &+ \frac{\partial}{\partial t_0}[3(\alpha_1R_2+\alpha_2R_1)-12R_1R_2-6\alpha_1R_1^2+10R_1^3] + 3\frac{\partial u_{G1}R_1(\alpha_1-2R_1)}{\partial x_0}, \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} N_2 =& (1-\alpha_0)\left(\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{L2}}{\partial x_1}\right) - \alpha_0\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_2}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial t_1}\right) - \alpha_0\frac{\partial \alpha_1u_{L1}}{\partial x_1} - \alpha_0\frac{\partial}{\partial x_0}(\alpha_2u_{L1}+\alpha_1u_{L2}) \\ &+ (1-\alpha_0)\frac{\partial \rho_{L1}}{\partial t_0}, \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} N_3 =& 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial R_1}{\partial x_2} - \beta_1\frac{\partial}{\partial t_2}(u_{G1}-u_{L1}) - \beta_1\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_1} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_1}\right) + 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\frac{\partial R_2}{\partial x_1} \\ &- \beta_1\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G1}-u_{L1}) - \beta_2(u_{G1}-u_{L1})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_1} - \beta_1\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G2}-u_{L2}) \\ &+ 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\left[\alpha_1\frac{\partial R_1}{\partial x_1} - (3\gamma+1)R_1\frac{\partial R_1}{\partial x_1}\right] - \beta_2(u_{G1}-u_{L1})\left(u_{G1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0}+\frac{\partial \alpha_2}{\partial t_0}\right) \\ &- \beta_1\left[\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G2}-u_{L2}) + \alpha_2\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G1}-u_{L1})\right] - \beta_2(u_{G2}-u_{L2})\frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} \\ &- \beta_1\left[\frac{\partial}{\partial x_0}(u_{G1}u_{G2}-u_{L1}u_{L2}) + \alpha_1\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0}\right)\right] \\ &+ 3\gamma\frac{p_{G0}}{V^2}\left[\alpha_1\frac{\partial R_2}{\partial x_0} + \alpha_2\frac{\partial R_1}{\partial x_0} - (3\gamma+1)\left(\frac{\partial R_1R_2}{\partial x_0} + \alpha_1R_1\frac{\partial R_1}{\partial x_0} - \frac{3\gamma+2}{6}\frac{\partial R_1^3}{\partial x_0}\right)\right], \end{aligned} \tag{54}$$

$$
\begin{aligned}
N_4 = &- (1-\alpha_0)\left(\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{L1}}{\partial t_2}\right) + \beta_1\alpha_0\frac{\partial}{\partial t_2}(u_{G1}-u_{L1}) + \beta_1\alpha_0\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G1}-u_{L1}) \\
&+ \beta_1\alpha_0\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_1} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_1}\right) + \beta_2\alpha_0(u_{G1}-u_{L1})\frac{\partial\alpha_1}{\partial t_1} + \alpha_0\alpha_1\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_1} + \alpha_0\frac{\partial\alpha_1 u_{L1}}{\partial t_1} \\
&- (1-\alpha_0)\left(\frac{\partial u_{L1}^2}{\partial x_1} + \frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L2}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{L2}}{\partial t_1}\right) + \beta_1\alpha_0\left[\alpha_1\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G2}-u_{L2}) + \alpha_2\frac{\partial}{\partial t_0}(u_{G1}-u_{L1})\right] \\
&+ \alpha_0 p_{L1}\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} + \beta_1\alpha_0\left[\frac{\partial}{\partial x_0}(u_{G1}u_{G2}-u_{L1}u_{L2}) + \alpha_1\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} - u_{L1}\frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0}\right)\right] \\
&+ \beta_1\alpha_0\frac{\partial}{\partial t_1}(u_{G2}-u_{L2}) + \beta_2\alpha_0\left[(u_{G1}-u_{L1})\left(u_{G1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_0} + \frac{\partial\alpha_2}{\partial t_0}\right) + (u_{G2}-u_{L2})\frac{\partial\alpha_1}{\partial t_0}\right] \\
&+ \alpha_0\frac{\partial\alpha_1 u_{L1}^2}{\partial x_0} + \alpha_0\frac{\partial}{\partial t_0}(\alpha_1 u_{L2} + \alpha_2 u_{L1}) - 2(1-\alpha_0)\frac{\partial u_{L1}u_{L2}}{\partial x_0} + \alpha_0\left(\alpha_1\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L2}}{\partial x_0} + \alpha_2\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial p_{L1}}{\partial x_0}\right) \\
&+ \alpha_0 p_{L1}\frac{p_{L0}}{V^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_0} + \alpha_0\left[p_{L2}\frac{p_{L0}}{V^2} - \frac{3\gamma(3\gamma-1)}{2}\frac{p_{G0}}{V^2}R_1^2 + \frac{1}{p_{L0}}\frac{V^2\mathit{\Delta}^2}{\mathit{\Omega}^2}R_1\right]\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_0},
\end{aligned} \tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
N_5 = &- 2\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial t_2} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial t_1^2} - 2\frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0\partial t_1} - 2R_1\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial t_1} - 2u_{G1}\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_1\partial x_0} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial x_1}\right) - 3\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\frac{\partial R_1}{\partial t_1} \\
&- \frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0}\frac{\partial R_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{G1}}{\partial t_1}\frac{\partial R_1}{\partial x_0} - R_1\frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} - R_2\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - 2u_{G1}\left(R_1\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial x_0} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0\partial x_0}\right) \\
&- 3\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\frac{\partial R_2}{\partial t_0} - \frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0}\frac{\partial R_2}{\partial x_0} - 2u_{G2}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0\partial x_0} - u_{G1}^2\frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} \\
&- \frac{\partial R_1}{\partial x_0}\left(u_{G1}\frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} + \frac{\partial u_{G2}}{\partial t_0} + R_1\frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} + 3u_{G1}\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\right) + V\mathit{\Delta}\frac{\partial R_1}{\partial t_0}\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - \frac{1}{V\mathit{\Delta}}p_{L1}\frac{\partial R_1}{\partial t_0} \\
&+ \frac{p_{G0}}{V^2\mathit{\Delta}}\frac{3\gamma(3\gamma-1)}{2}\frac{\partial R_1^2}{\partial t_0} + \frac{3\gamma(3\gamma-1)}{\mathit{\Delta}^2}\frac{p_{G0}}{V^2}R_1R_2 - \frac{\gamma(3\gamma-1)(3\gamma+4)}{2\mathit{\Delta}^2}\frac{p_{G0}}{V^2}R_1^3 \\
&- \left(\frac{4\mu}{V\mathit{\Delta}^2} + \frac{V\mathit{\Delta}}{\mathit{\Omega}^2}\right)\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{1}{\mathit{\Omega}^2}(R_1^2 - R_2).
\end{aligned} \tag{56}
$$

近傍場と遠方場 I と同様に, 遠方場 II でも, 質量保存式 (47)(48) に Slow mode との差異はなく, 運動量保存式 (49)(50) に V が現れ, Keller の式 (51) に V と $\mathit{\Delta}$ が現れる. 一方, Keller の式の非同次項 (56) の最右辺に, Slow mode では現れない R_1^2 および R_2 なる項が現れた.

近傍場と遠方場 I 同様, 方程式系 (47)–(51) を単一の非同次方程式にまとめる:

$$
\mathcal{L}[R_3] = \mathit{\Lambda}_1 \mathrm{e}^{i3\theta} + \mathit{\Lambda}_2 \mathrm{e}^{i2\theta} + \mathit{\Lambda}_3 \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{c.c.}. \tag{57}
$$

ここで, $\mathit{\Lambda}_j\ (j=1,2,3)$ は複素振幅 A を含む複素変数である (本解析では, $\mathit{\Lambda}_1$ および $\mathit{\Lambda}_2$ の具体形は用いない). 非同次方程式 (57) の可解条件より,

$$
\mathit{\Lambda}_3 = \left(-\frac{\partial D}{\partial \mathit{\Omega}}\right)\left[i\left(\frac{\partial A}{\partial t_2} + v_g\frac{\partial A}{\partial x_2}\right) + \frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + C_1|A|^2A + iC_2A + C_3A + iC_4\frac{\partial A}{\partial x_1}\right] = 0, \tag{58}
$$

が課される．ここに, 実定数係数は以下のとおりである:

$$
\begin{aligned}
&q = \frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}k} = -\frac{9\alpha_0 \mathit{\Delta}^2 \mathit{\Omega}}{(3\alpha_0 + \mathit{\Delta}^2 k^2)^2} < 0,\\
&C_1 = \frac{1}{3}\frac{1}{\partial D/\partial \mathit{\Omega}}\left[\mathit{\Omega} n_1 - \frac{\mathit{\Omega} n_2}{\alpha_0} + \frac{1-\alpha_0+\beta_1}{(1-\alpha_0)\beta_1} k n_3 + \frac{k n_4}{\alpha_0(1-\alpha_0)} - \frac{\mathit{\Delta}^2 k^2 n_5}{\alpha_0}\right],\\
&n_1 = 3\mathit{\Omega}[c_0(4-b_1) - c_1 + 6b_1 - 10] + k[c_2(3-b_1) + b_2(3c_0 - c_1 + 9b_1 - 18)],\\
&n_2 = -\alpha_0(b_1 c_3 + b_3 c_1),\\
&\hat{n} = (2\beta_1 - \beta_2) b_1 (c_2 - c_3)\mathit{\Omega} - (\beta_1 - 2\beta_2)(b_2 - b_3) c_1 \mathit{\Omega} - k b_1 (b_2 - b_3)[\beta_1(b_2 + b_3) + \beta_2 b_2]\\
&\qquad - \beta_1 k (b_2 c_2 - b_3 c_3),\\
&n_3 = \hat{n} + 3\gamma \frac{p_{G0}}{V^2} k \left[2b_1 c_0 - c_1 + (3\gamma + 1)\left(1 - b_1 - c_0 + \frac{3\gamma}{2}\right)\right],\\
&n_4 = -\alpha_0 \hat{n} + \frac{\mathit{\Omega} n_2}{k} - 2(1-\alpha_0) b_3 c_3 k\\
&\qquad + \alpha_0 k \left\{b_1 c_4 - \frac{p_{L0}}{V^2} b_4 c_1 + 2\alpha_0 b_4 \frac{p_{L0}}{V^2} - b_1\left[-3b_3^2 + \frac{3\gamma(3\gamma-1)p_{G0}}{2V^2}\right]\right\},\\
&n_5 = 5c_0 \mathit{\Omega}^2 + 2b_2 k[b_2 k - (1 + 3c_0)\mathit{\Omega}] + 3\gamma(3\gamma - 1)\left(c_0 - 2 - \frac{3\gamma}{2}\right)\frac{p_{G0}}{V^2 \mathit{\Delta}^2},\\
&C_2 = \frac{(4\mu/V + V\mathit{\Delta}^3/\mathit{\Omega}^2)k^2}{2(3\alpha_0 + \mathit{\Delta}^2 k^2)} \geq 0,\\
&C_{41} = (b_1 - 3)^2 \frac{\mathit{\Omega}^2}{k} + e_2 \mathit{\Omega} + \frac{1}{\alpha_0} e_4 k, \quad C_{42} = e_2 k + \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0} e_3 (\mathit{\Omega} + k),\\
&C_4 = \frac{1}{3}\frac{1}{\partial D/\partial \mathit{\Omega}}\left(C_{41} - C_{42} v_g + \frac{\mathit{\Delta}^2 k \mathit{\Omega}}{\alpha_0}\eta\right), \quad C_3 = \frac{1}{3}\frac{1}{\partial D/\partial \mathit{\Omega}}\left(C_{42}\eta + \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0} V^2 \mathit{\Delta}^2 \mathit{\Omega}^4\right).
\end{aligned}
\tag{59}
$$

群速度 v_g の波数 k 導関数 q は負値であり, q を与える式の形は, Slow mode の場合と全く同じである．一方で, C_2 は Slow mode とは異なる [4].

式 (58) の解として, 包絡波の複素振幅 A を正弦波解に仮定する:

$$A = \mathrm{e}^{i\mathit{\Theta}}, \quad \mathit{\Theta} = K\xi - W(K)\tau. \tag{60}$$

ここで, K は包絡波 A の無次元波数, W は無次元周波数, $\mathit{\Theta}$ は位相関数である．

式 (41)(58) を, 微分展開法 (12) に立ち戻って組み合わせると, 独立変数として x と t が回復し, 近傍場, 遠方場 I, 遠方場 II までを接続できる:

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_g \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \epsilon \eta A + \epsilon^2 \left(C_1 |A|^2 A + iC_2 A + C_3 A + i\frac{C_4}{\epsilon}\frac{\partial A}{\partial x}\right) = 0. \tag{61}$$

これを, 変数変換

$$\tau = \epsilon^2 \left(1 - \frac{C_3}{W}\right) t, \quad \xi = \epsilon\left[x - \left(v_g + \frac{\eta}{K} + \epsilon C_4\right) t\right], \tag{62}$$

を用いて書きかえると, 減衰項を含む NLS 方程式を得る:

$$i\frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{q}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + C_1 |A|^2 A + iC_2 A = 0. \tag{63}$$

ここで, $C_2 \geq 0$ より, 左辺第 4 項は減衰項であり, 減衰は液体の粘性と液体の圧縮性の両効果に起因する (熱による減衰は無視したことを改めて強調する). 左辺第 2 項は分散性, 第 3 項は 3 次の非線形性をそれぞれ表す. 遠方場 II では, 分散性, 非線形性, 散逸性の 3 つの性質が現れ, これらが競合しながら, 包絡波が伝播する. また, τ と ξ の中に, Slow mode の NLS 方程式 [4] には存在しなかった項が現れた.

5　おわりに

多数の気泡を含む圧縮性のある水中を伝わる 1 次元進行波の中でも, 水の圧縮性に起因して発現する, 位相速度が極めて大きな圧力波の弱非線形伝播を理論的に調べた. 多重尺度法を用いて, 高周波数の準単色波のゆるやかな変調を記述する NLS 方程式を導いた.

今後, 式 (62)(63) を解いて, 波動伝播のふるまいの詳細な理解に迫る.

謝辞

本研究は, JSPS 科研費 16K18008 の助成, および, 公益信託小野音響学研究助成基金の助成を受けて遂行された.

参考文献

[1] L. van Wijngaarden, “On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles,” *J. Fluid Mech.*, **33** (1968), 465.

[2] R. I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media* (Hemisphere, New York, 1991).

[3] R. Egashira, T. Yano and S. Fujikawa, “Linear wave propagation of fast and slow modes in mixtures of liquid and gas bubbles,” *Fluid Dyn. Res.*, **34** (2004), 317.

[4] T. Kanagawa, T. Yano, M. Watanabe and S. Fujikawa, “Unified theory based on parameter scaling for derivation of nonlinear wave equations in bubbly liquids,” *J. Fluid Sci. Technol.*, **5** (2010), 351.

[5] 大谷清伸, 杉山 弘, 溝端一秀, “気泡を含む液体中を伝播する強い衝撃波と気泡崩壊,” 日本機械学会論文集 B 編, **68** (2002), 1646.

[6] T. Yano, R. Egashira and S. Fujikawa, “Linear analysis of dispersive waves in bubbly flows based on averaged equations,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, **75** (2006), 104401.

[7] I. Eames and J. C. R. Hunt, “Forces on bodies moving unsteadily in rapidly compressed flows,” *J. Fluid Mech.*, **505** (2004), 349.

[8] J. B. Keller and I. I. Kolodner, "Damping of underwater explosion bubble oscillations," *J. Appl. Phys.*, **27** (1956), 1152.

[9] A. Jeffrey and T. Kawahara, *Asymptotic methods in nonlinear wave theory* (Pitman, London, 1982).

[10] T. Kanagawa, "Two types of nonlinear wave equations for diffractive beams in bubbly liquids with nonuniform bubble number density," *J. Acoust. Soc. Am.*, **137** (2015), 2642.