



筑波大学
University of Tsukuba

2018年2月16日
エシス卒論発表会環境エネ4-1

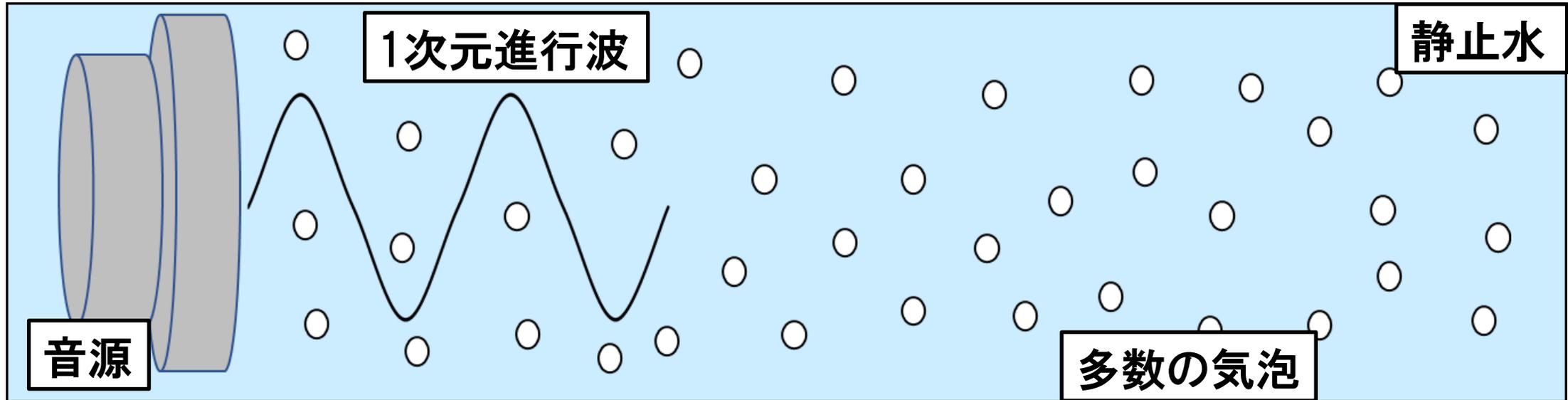
気泡を含む圧縮性液体中における 高速圧力波の準単色伝播を 記述する非線形方程式の導出

筑波大学理工学群工学システム学類
エネルギー工学専攻
金川研究室

慶本天謹

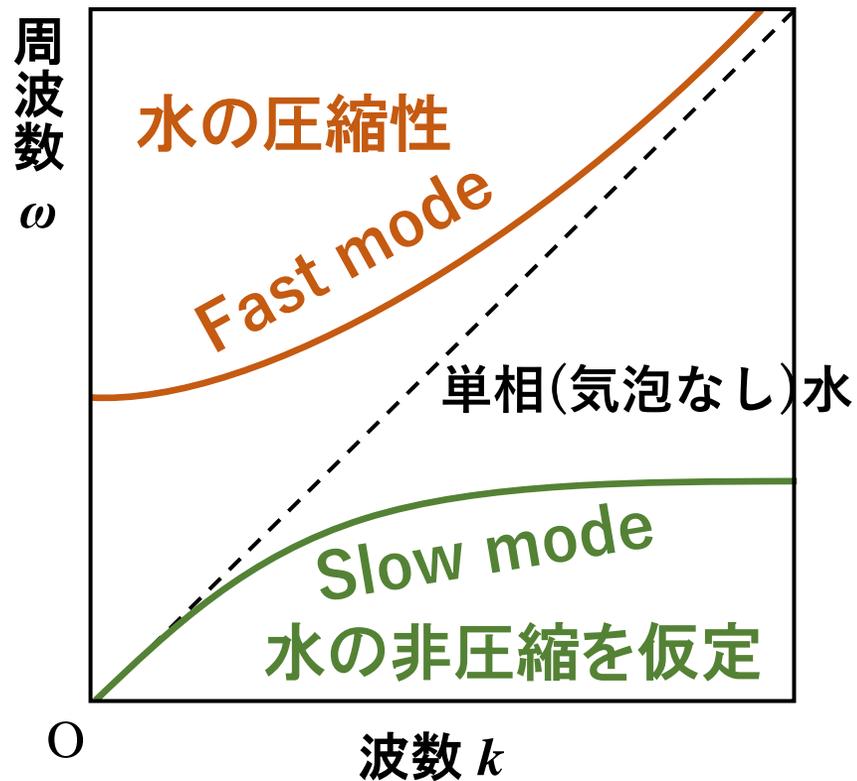
指導教員: 金川哲也

問題設定



- 多数の球形気泡を一様に含む静止水中における音波の理論解析
- 音波は1次元進行波とする
- 音波の入射により気泡は激しく振動
→ 波の分散性が現れる(van Wijngaarden, 1968)

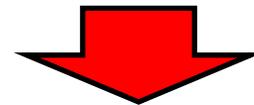
背景：線形分散関係 (江頭ら, 2004)



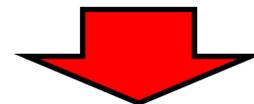
- **Slow mode**は理論と実験の両面から長い研究の歴史を有する

- **Fast mode**

15年前に初めて実験で観測

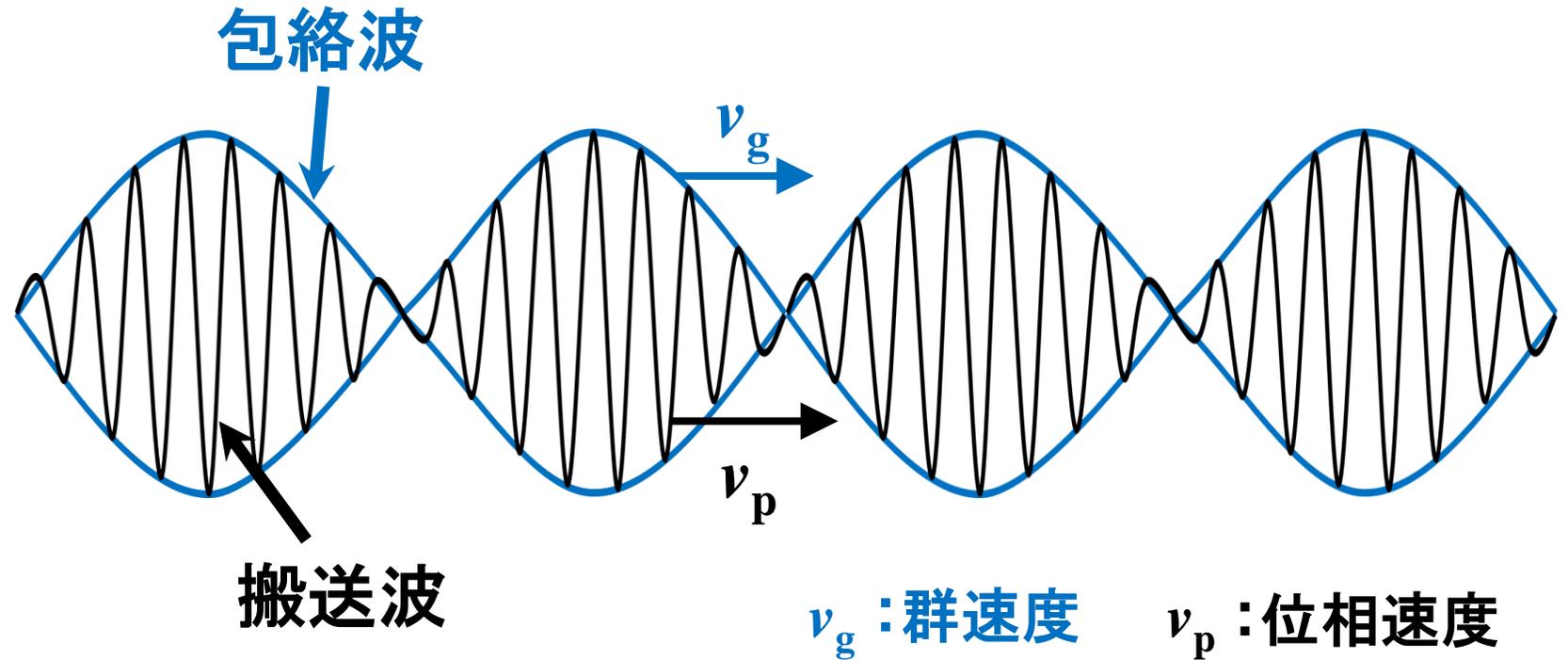
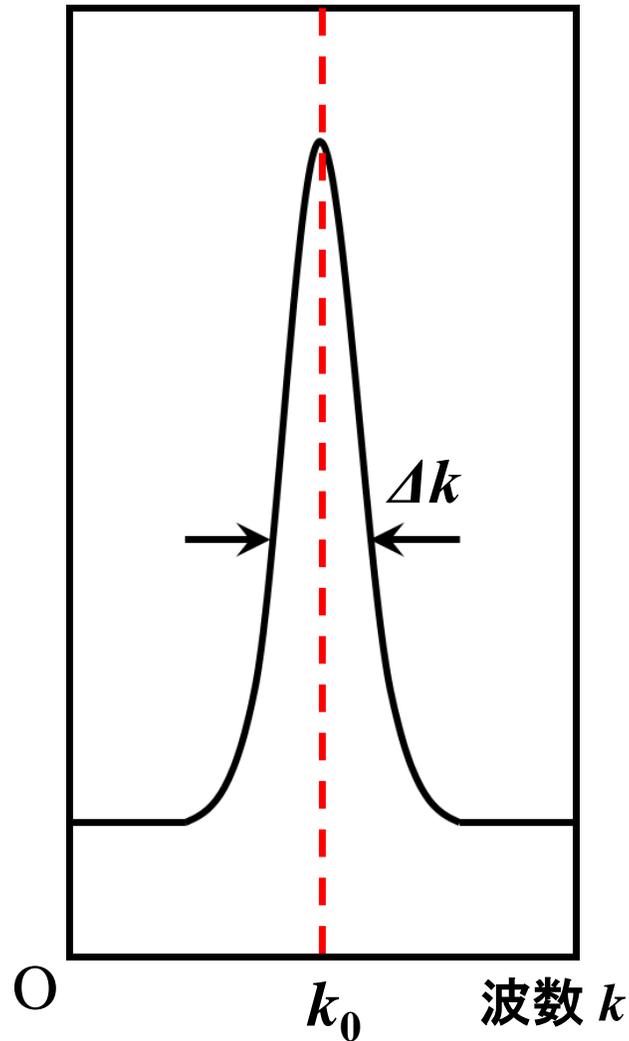


振幅が小さく、実験が進展していない



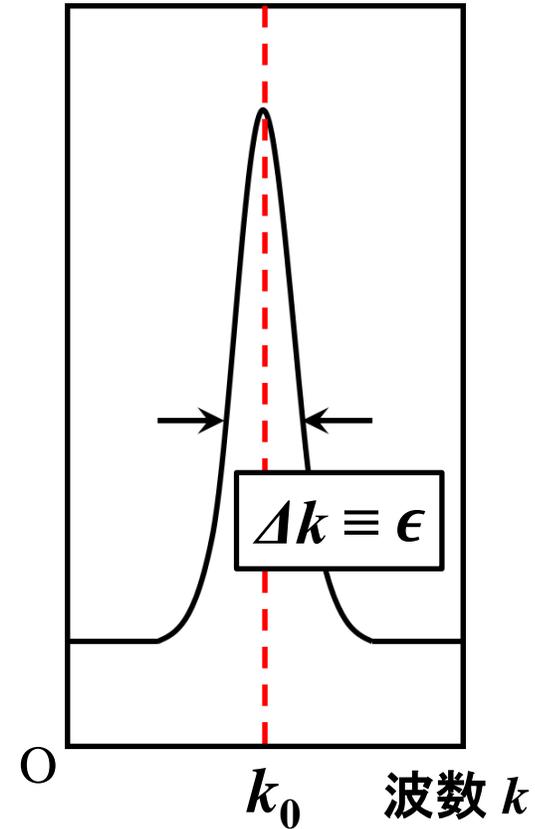
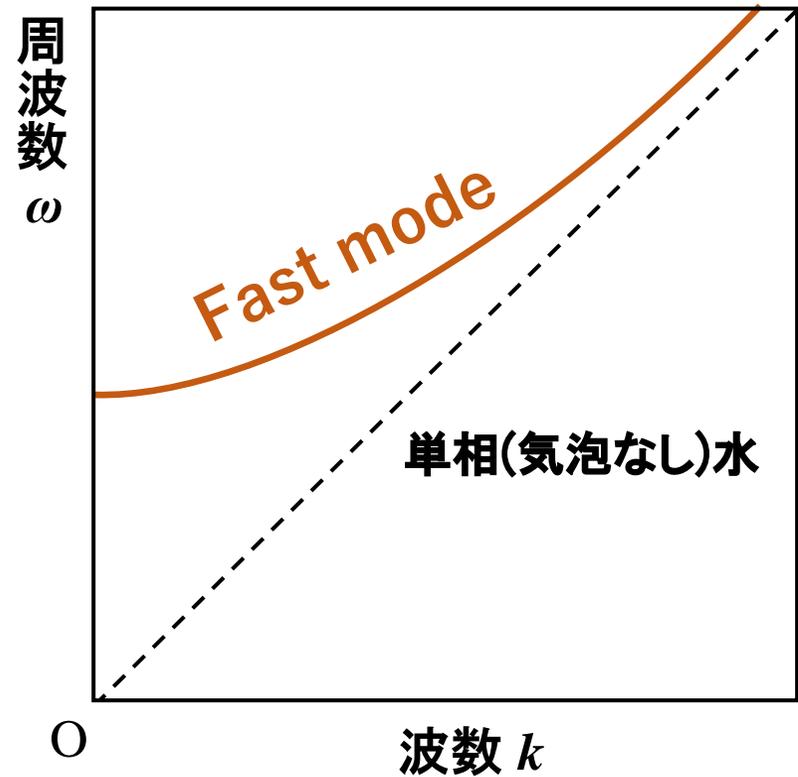
理論的な予測が求められる

準単色波



- 振幅が変調 (AM: Amplitude Modulation)
- 包絡波の運動を求める

本解析の目的



Fast modeにおいて、**準単色波**の伝播を記述する
弱非線形波動方程式の導出

基礎方程式系

気泡流の基礎方程式系 (江頭ら, 2004)

① 気相の質量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\alpha \rho_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\alpha \rho_G^* u_G^*) = 0$$

*は全て有次元数

ρ^* : 密度 u^* : 速度

G : 気相 L : 液相

② 液相の質量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*} [(1 - \alpha) \rho_L^*] + \frac{\partial}{\partial x^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* u_L^*] = 0$$

α : ボイド率

③ 気相の運動量保存式

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\alpha \rho_G^* u_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\alpha \rho_G^* u_G^{*2}) + \alpha \frac{\partial p_G^*}{\partial x^*} = F^*$$

④ 液相の運動量保存式

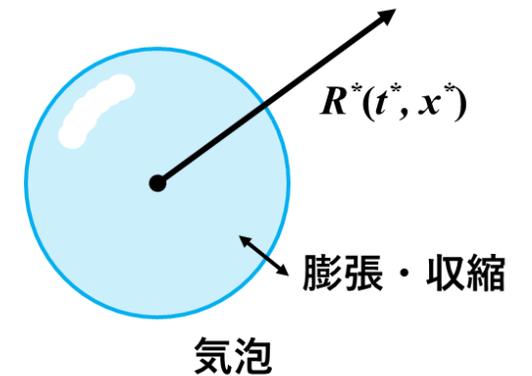
$$\frac{\partial}{\partial t^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* u_L^*] + \frac{\partial}{\partial x^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* u_L^{*2}] + (1 - \alpha) \frac{\partial p_L^*}{\partial x^*} + P^* \frac{\partial \alpha}{\partial x^*} = -F^*$$

気泡流の基礎方程式系 (江頭ら, 2004)

⑤ Kellerの式 (周囲水の圧縮性を考慮した, 気泡の膨張・収縮運動を表す)

$$\rho_{L0}^* \left[\left(1 - \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) R^* \frac{D_G^2 R^*}{Dt^{*2}} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) \left(\frac{D_G R^*}{Dt^*} \right)^2 \right]$$

$$= \left(1 + \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) P^* + \frac{R^*}{c_{L0}^*} \frac{D_G}{Dt^*} (p_L^* + P^*)$$



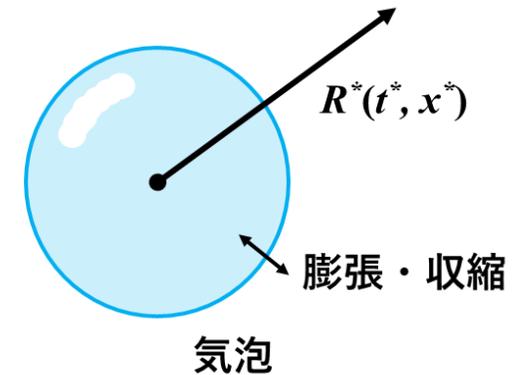
4本の
補助式で
閉じる

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textcircled{6} \frac{p_G^*}{p_{G0}^*} = \left(\frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} \right)^\gamma, & \textcircled{7} p_L^* = p_{L0}^* + \frac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n} \left[\left(\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} \right)^n - 1 \right] \\ \textcircled{8} \frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} = \left(\frac{R_0^*}{R^*} \right)^3, & \textcircled{9} p_G^* - (p_L^* + P^*) = \frac{2\sigma^*}{R^*} + \frac{4\mu^*}{R^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \end{array} \right.$$

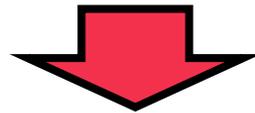
気泡流の基礎方程式系 (江頭ら, 2004)

⑤ **Kellerの式**(周囲水の圧縮性を考慮した, 気泡の**膨張・収縮**運動を表す)

$$\rho_{L0}^* \left[\left(1 - \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) R^* \frac{D_G^2 R^*}{Dt^{*2}} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) \left(\frac{D_G R^*}{Dt^*} \right)^2 \right]$$
$$= \left(1 + \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) P^* + \frac{R^*}{c_{L0}^*} \frac{D_G}{Dt^*} (p_L^* + P^*)$$



9本の**強非線形**の連立方程式



手計算で限界まで, **弱非線形**を含む1本の波動方程式にまとめる

準単色音波のみを取り出す

パラメータスケーリング法 (金川ら, 2010)

- 速さ, 長さ, 時間に関する無次元パラメータの大きさを決める

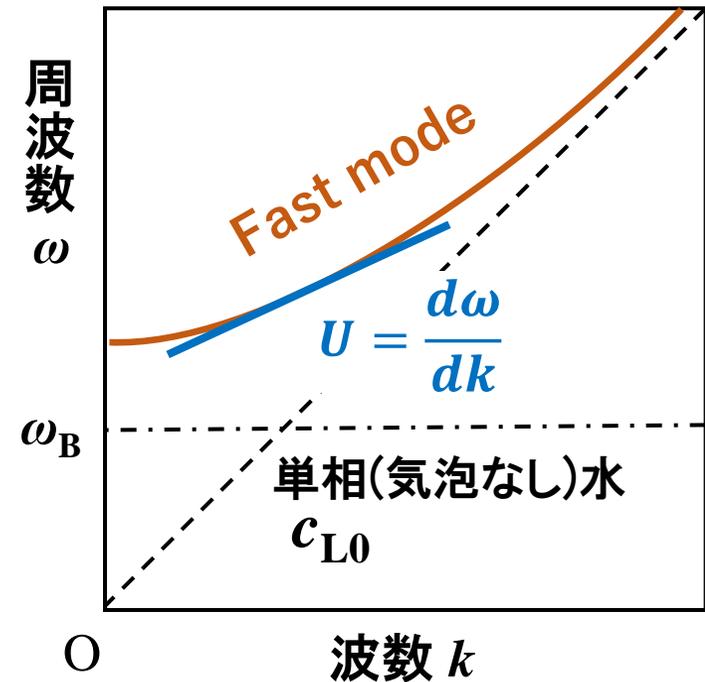
$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} : \text{速さ} \quad \frac{R_0^*}{\lambda^*} : \text{長さ} \quad \frac{\omega^*}{\omega_B^*} : \text{時間}$$

U^* : 波の群速度 c_{L0}^* : 単相水中の音速

R_0^* : 気泡径 λ^* : 波長

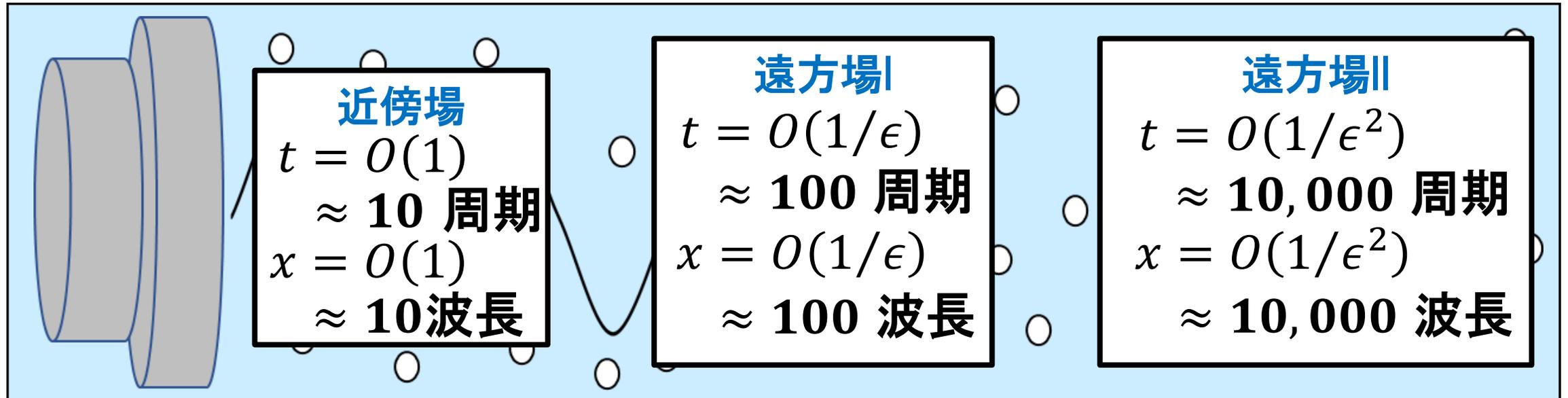
ω^* : 波の周波数 ω_B^* : 気泡の固有周波数

$$U^* \ll c_{L0}^*, \quad R_0^* \approx \lambda^*, \quad \omega^* \gg \omega_B^*$$



多重尺度法 (Jeffrey & Kawahara, 1982)

- 波の無次元振幅 $\epsilon (\ll 1)$ を導入し, **近傍場**と2つの**遠方場**を表す



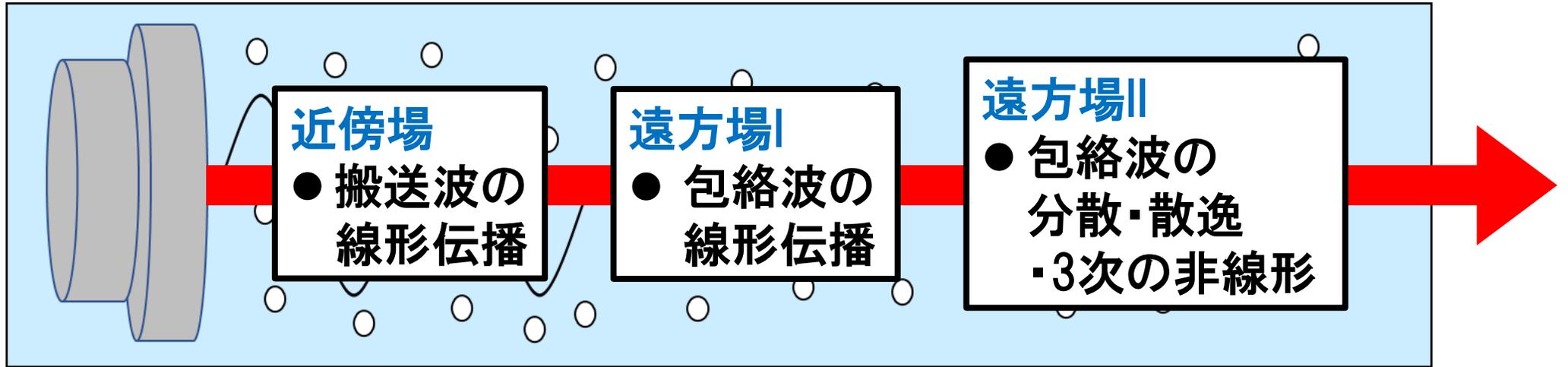
- 未知変数の摂動展開(一部)

$$\frac{R_0^*}{R^*} = 1 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + O(\epsilon^3)$$

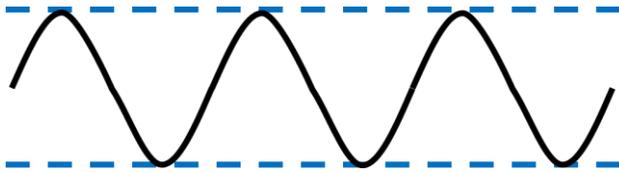
$$\frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} = 1 + \epsilon^3 \rho_{L1} + \epsilon^4 \rho_{L2} + O(\epsilon^5)$$

結果

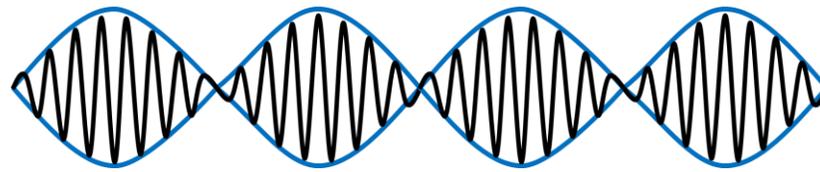
結果



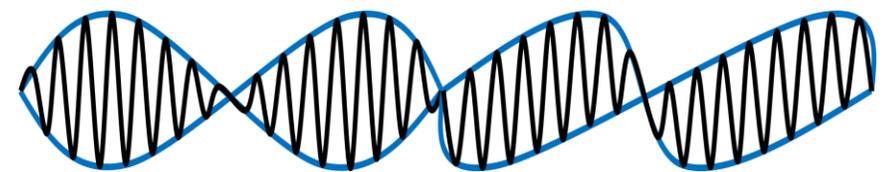
$$A = \text{const.}$$



$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0$$



$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) + C_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + C_2 |A|^2 A + iC_3 A = 0$$



A: 包絡波の複素振幅

近傍場・遠方場I・遠方場IIを接続する

結果

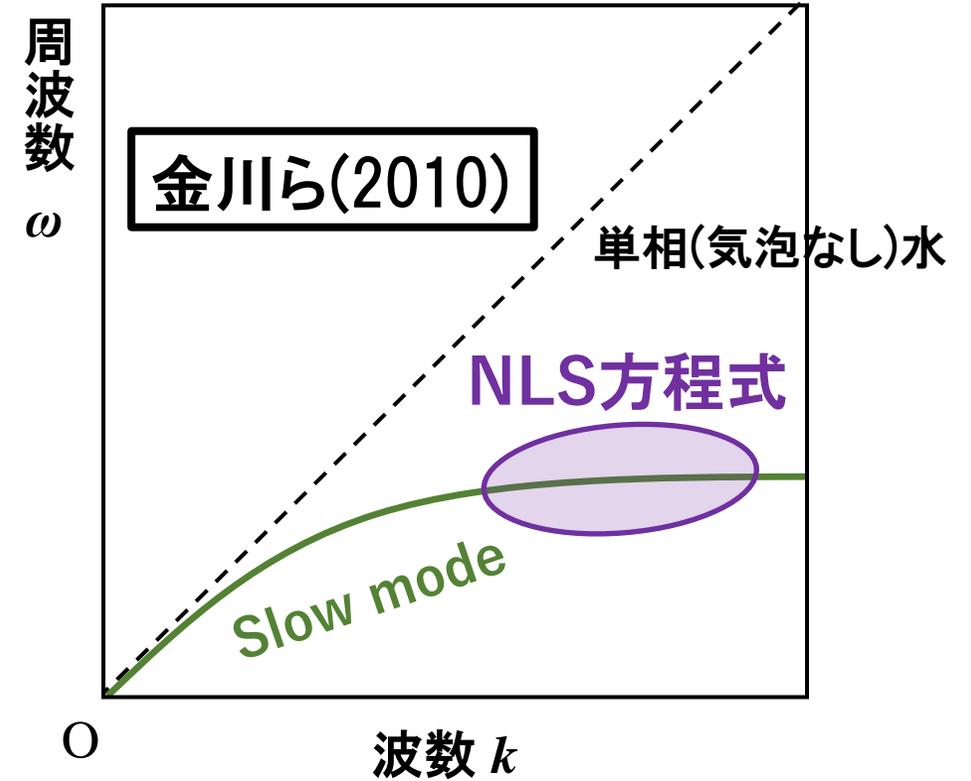
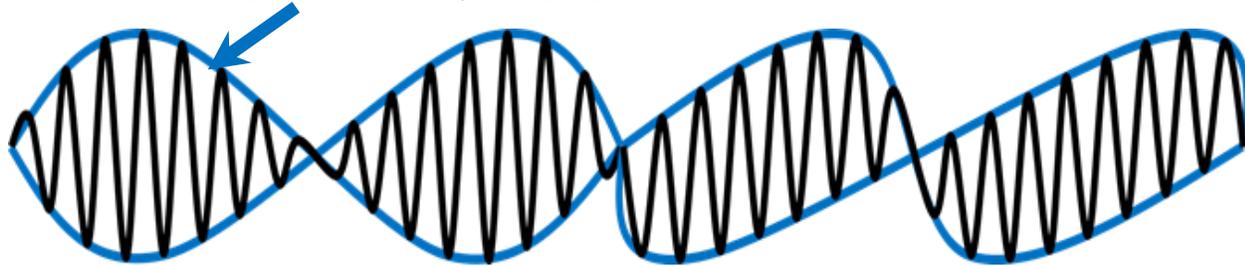
非線形Schrödinger(NLS)方程式

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + C_1 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + C_2 |A|^2 A + iC_3 A = 0$$

分散 非線形 散逸

C_2 : 約100項から成る非常に複雑な係数

A : 包絡波の複素振幅



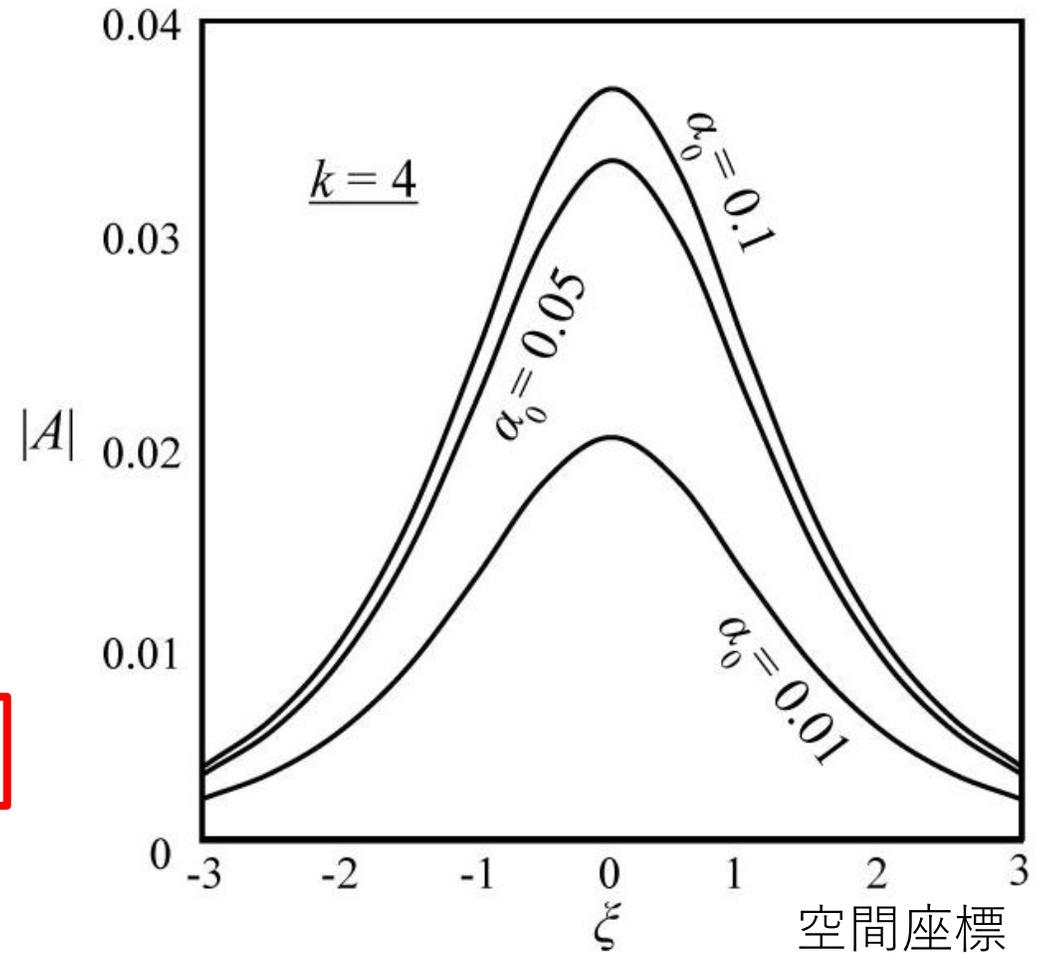
結果

非線形Schrödinger(NLS)方程式

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + C_1 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + C_2 |A|^2 A + iC_3 A = 0$$

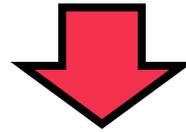
分散 非線形 散逸

気泡の量が増加 → 実振幅 $|A|$ も増加



結言

目的：気泡を含む水の圧縮性によって現れるFast modeにおける、準単色波の伝播を記述する波動方程式の導出



分散性・非線形性・散逸性の競合による包絡波の伝播を記述するNLS方程式を導いた

今後の展望

- ① 得られた非線形Schrödinger方程式を数値的に解いて、波動伝播のふるまいの詳細な理解に迫る
- ② 混合体モデルを用いて同様に非線形波動方程式を導出し、非線形係数の比較を行う