

流体力学勉強会資料 [1] (8/26/2015)

[復習 (流束と密度)] 任意の連続体 (continuum)^{†1} を考える. 連続体の質量, 運動量, エネルギーの保存則 (conservation law) の偏微分方程式 (partial differential equation: PDE) による表現は, つぎのように書き下される:

$$(\text{時間変化}) + (\text{流入出}) = (\text{生成}) \implies \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \text{div} \mathbf{G} = \mathbf{H} \quad (1)$$

ここに, \mathbf{F} は密度 [\clubsuit/m^3] であって, 単位体積あたりの質量, 運動量, エネルギーを意味する^{†2†3}:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho(|\mathbf{u}|^2/2 + e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho(u_k^2/2 + e) \end{pmatrix} \quad (2)$$

流束 \mathbf{G} [$\spadesuit/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$] は^{†4}, 単位時間あたりに単位面積を通過^{†5}する質量, 運動量, エネルギーである:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{P} \\ \rho(|\mathbf{u}|^2/2 + e)\mathbf{u} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j - p_{ij} \\ \rho(u_k^2/2 + e)u_j - p_{ij}u_i + q_j \end{pmatrix} \quad (3)$$

独立変数^{†6}は, 時間 t , 空間座標ベクトル $\mathbf{x} = (x, y, z) = \{x_i\} (i = 1, 2, 3)$ である^{†7}. 従属変数として, ρ は密度, $\mathbf{u} = \{u_i\}$ は速度ベクトル, $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$ は応力テンソル, $\mathbf{q} = \{q_i\}$ は熱流ベクトル, e は単位質量あたりの内部エネルギーである^{†8}.

偏微分方程式系を解くためには, 未知数の数と方程式の数が一致せねばならない^{†9}. いま, 式の数 は 5 本で, 未

知変数の数は 17 個^{†10} であって, このままでは, とても解くことはできない. これを打破すべく, 考えている連続体に即した応力と熱流のモデルを仮定し, 方程式を閉じる必要がある. 流体力学は, 多くの場合, Newton 流体を対象にするので, Newton 流体の応力の構成式, および, Fourier の熱伝導の法則を用いて^{†11}, 未知変数の数と方程式の数を一致させる^{†12†13†14}.

式 (1) は, 非同次 (非斉次) の非線形偏微分方程式である. 非同次項 \mathbf{H} は, 未知変数ではなく, 既知定数あるいは関数であり, 連続体の単位質量あたりに作用する外力ベクトル^{†15} \mathbf{K} と発熱 (スカラー) Q から構成される^{†16}:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho K_i \\ \rho K_i u_i + Q \end{pmatrix} \quad (4)$$

(問) 式 (1) あるいは (5)–(7) を導け. ヒント^{†17†18†19†20}.

^{†10} これがわからない者は危険である. 密度が 1 つ, 速度が 3 成分, 応力が 9 成分, 内部エネルギーが 1 つ, 熱流が 3 成分であるから, 総和は 17 個となる. 実は, 応力テンソルは対称テンソル (symmetric tensor) であることが示されるが, それでもなお, 総和は 14 個であって, 方程式の本数——5 本 (質量 1 本, 運動量 3 本, エネルギー 1 本)——までは程遠い.

^{†11} Newton 流体も, Fourier 則も, 仮定に過ぎないが, この妥当性を示す実験結果が相当数報告されている.

^{†12} 応力を圧力と速度を用いて表現し, 熱流を温度を用いて表現する.

^{†13} 一致させたものが, 諸君が知るところの Navier–Stokes 方程式系である. Navier–Stokes 方程式しか知らない者, 知っていてもその導出過程への理解なく単なるユーザーと化している者は, たとえば, 非 Newton 流体を扱う必要性に迫られた際にどう対応するのだろうか. 固体を扱う際にどうするのか. 連続体力学の出発点 [式 (1) あるいは (5)–(7)] に立たずして, 方程式を扱っても, 将来的には, 何も役立たないといつてよい.

^{†14} ついでながら, 学類 4 年生以上では, 基本的には, 試験は行われないうえに, 何を参照してもよい. したがって, 他者との差をつける要因は, いかに素早くかつ正しく参照できるか以外にないといつてよい. 知識量を競っても意味がない. この意味で, 使うべき方程式を運よく発見できても, それを速やかに理解できない者は, 競争社会の中で敗者となるだろう. だからこそ, その基盤となりうる原理・原則への理解が重要であると強調する.

^{†15} 外力 (external force) は, たとえば, 重力 (gravitational force) などの体積力 (body force) であって, 束縛力 (constraint force) たる応力 (stress) とは異なり, 遠距離力である.

^{†16} バネマス系における駆動力 (driving force) や, 熱伝導方程式における発熱項を思い浮かべるとよい.

^{†17} 3 次元空間内に固定された閉曲面 S で囲まれた領域 V を考え, その体積 V を囲む表面積を S とする. なお, 閉曲面の名称とその表面積に記号 S を区別せずに用い, 閉曲面が囲む領域の名称と領域の体積にも記号 V を区別せずに用いる.

^{†18} (i) 質量保存則: V 内の質量の増減は, S をとおして運ばれる質量に等しい. (ii) 運動量保存則: V 内の運動量の増減は, S をとおして運ばれる運動量, S に働く面積力がなす力積 (impulse), V に働く体積力がなす力積の和に等しい. (iii) エネルギー保存則: V 内のエネルギーの増減は, S をとおして運ばれるエネルギー, S に働く面積力がなす仕事, V に働く体積力がなす仕事, S をとおして流入する熱の流れ (熱流, 熱流束: heat flux), V 内部における発熱の総和に等しい. (i)–(iii) の各項を, 日本語で表現したのちに, 数式で書き直せ. すると, 積分形の保存則が導かれるが, これに Gauss の発散定理を援用して, 面積積分を体積積分に変換し, 偏微分方程式の形 (1)[あるいは (5)–(7)] に書き改めよ.

^{†19} 積分形は, とくに数値計算上, 実用的とはいえない. だからこそ, 偏微分方程式の形を用いるのである.

^{†20} 以上の導出法は, Euler 的な立場に基礎をおくものであって, ほと

^{†1} 流体でなくともよいし, 弾性体 (elastic body) でも塑性体 (plastic body) でもよい. しかしながら, 希薄気体 (rarefied gas) などは対象外である. 厳密には, 流体とは, 気体と液体の総称ではない.

^{†2} 本当に単位体積あたりか, 1 つ 1 つの次元を確認し, \clubsuit を補完せよ.

^{†3} 学術論文や教科書では, ベクトル表記が比較的多用されるが, 演算にはテンソル表記が便利といえる. とはいえ, 表記は好み過ぎない. 両表記の相互関係を理解しておき, 自身で書き換えられることが重要である.

^{†4} 流束 (flux) は面積力に類似する概念, 密度は体積力に類似するとイメージするとよい.

^{†5} なぜ, “単位 \clubsuit あたり” という, 一見面倒な操作が必要なのか. 質点 (mass point) や剛体 (rigid body) と異なり, 連続体とは, 自由自在に形を変えるのだから, 基準がなければ, 測れない, 評価できないではないか (蛇口から流れ出る水道水の体積の全てを測る手段があるか. 容積無限大のパケツを用意できるか. 単位時間あたりで測るべきではないか).

^{†6} 独立変数 (independent variable) は人間が制御・操作するもの, 従属 (未知) 変数 (dependent variable) は, 自然にゆだねるものといえる.

^{†7} 添え字は, i および j について 1, 2, 3 を考え, Einstein の総和規約 (summation law) を適用する.

^{†8} なぜ単位質量あたりなのか. 単位体積あたりではダメな理由は何か.

^{†9} 解析的であっても, 数値的であっても, 同じである. そもそも, 微分方程式でなくとも, 連立方程式 (方程式系) を解くならば, 当たり前の要求である.

[運動学と熱力学] (連続体の) 力学は、運動学と熱力学に大別される。速度場からわかる情報^{†21}を運動学的変数、密度、圧力、温度^{†22}などを熱力学的変数という^{†23}。

[質量、運動量、エネルギーの保存則] 書き下す:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j - p_{ij}}{\partial x_j} = \rho K_i \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{u_k^2}{2} + e \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \left(\frac{u_k^2}{2} + e \right) u_j - p_{ij} u_i + q_j \right] = \rho K_i u_i + Q \quad (7)$$

[保存則から導かれる運動方程式] 運動量保存則(6)に積の微分公式を適用し、質量保存則(5)と組み合わせる^{†24}と、連続体の運動方程式^{†25}が導かれる(復習せよ):

$$\rho \frac{D u_i}{D t} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i \quad (8)$$

[Lagrange 微分] 演算子 D/Dt は、Lagrange 微分あるいは物質(実質)微分とよばれる:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{u}\Delta t, t + \Delta t) - f(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad})f = \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (9)$$

これは、Lagrange 微分(左辺)の Euler 的表現(右辺)といえる。1行目の f の引数が重要である^{†26†27†28}。

[非圧縮性流れ] 流れが非圧縮性であるならば、

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 0 \quad (12)$$

んどの書物がこの方法を採用しているが、中には、Lagrange 的に、すなわち、動く閉曲面を考えて、保存則を議論する書物もある。

^{†21} 加速度 (acceleration) や変位 (displacement) といった基礎的な情報だけでなく、渦度 (vorticity) や循環 (circulation) も運動学的な情報である。[注] 変位と変形 (deformation) は全く違う。渦度と渦あり流れ (rotational flow) は違う (英訳を見よ)。[問] 渦度と循環の定義、および、渦度と循環を関係付ける式を調べよ。渦なし流れ (irrotational flow) ならば、循環はどうなるか。

^{†22} 流体力学においては、圧力は応力の一部である (弾性力学の場合は、圧力は応力ではない)。温度は内部エネルギーと 1 対 1 に関係づけられる (たとえば理想気体)。両変数ともに、本勉強会ではまだ未出ことに注意されたい。

^{†23} 基礎的な熱力学的変数から得られる情報を例示し、運動学的変数から得られるそれと区別せよ。

^{†24} この操作は極めて重要である。数値流体力学でいうところの、保存形 (conservative form) と発散形 (非保存形) とも関連深い。[問] 保存形について調べよ。

^{†25} これは、Newton の運動の第二法則そのものである (本当か。確かめよ)。バネマス系など、質点の運動方程式を書き下して、比較せよ。

^{†26} 偏微分係数の定義との差異を強調しておく (\mathbf{x} の極限を含まない):

$$\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \quad (10)$$

^{†27} f は従属変数であって、速度 \mathbf{u} でも、圧力 p でも、何でもよい。

^{†28} (問) 空間座標の物質微分が速度に等しいことを示せ:

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{u} \quad (11)$$

が満たされる^{†29†30}。おのおのの流体粒子^{†31}の軌跡に沿って密度が一定ならば、それは非圧縮性流れである。流体粒子の軌跡を描く曲線を流跡線(道筋)という^{†32}。

[保存則から導かれるエネルギー方程式] 運動方程式(8)の場合と同様に、全エネルギーの保存則(7)を質量保存則(5)と組み合わせると、

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u_k^2}{2} + e \right) = \frac{\partial p_{ij} u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho K_i u_i + Q \quad (13)$$

(問) 応力、熱流、外力、発熱のそれぞれは、運動エネルギーと内部エネルギーのどちらに寄与するか。両方に寄与するのか^{†33}。

[運動エネルギーの流跡線に沿う発展方程式] 運動方程式(8)の両辺に、 u_i を掛けると^{†34}、次式をうる:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{u_k^2}{2} \right) = u_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i u_i \quad (14)$$

運動エネルギーの発展に対して、熱流は寄与しないこと、外力がする仕事は寄与することがわかる^{†35}。

[内部エネルギーの流跡線に沿う発展方程式] 全エネルギーの発展方程式(13)と、運動エネルギーの発展方程式(14)の差をとると、内部エネルギーの発展方程式:

$$\rho \frac{D e}{D t} = p_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + Q \quad (15)$$

熱流の寄与、外力の仕事は寄与しないことがわかる^{†36}。

(問) 本資料の全数式を、添え字表記、ベクトル表記、成分表記の全てで書き下せ^{†37}。

^{†29} 密度が定数値であることを非圧縮性流れの定義と主張する書物も(水力学を中心に)一定数あることに注意を要する。この定義は少数派ではあるが、これが厳密でないなどと批判するつもりはなく、書物によって定義が異なる可能性に注意を払うことが重要なのである。

^{†30} もちろん、密度が定数であることを課す定義の方が、制約が強い。本資料の定義にしたがうと、密度が定数であるならば非圧縮性であるが、非圧縮性であるからと言って密度が一定であるとは限らない。密度が定数の非圧縮性流れを、密度一様の非圧縮流とよぶこともある。

^{†31} 流体粒子 (fluid particle) とは、流体の微小部分 (微小要素) であって、流体を構成する分子や原子でもなければ、質点でもない。しかし、流体粒子の運動を、質点や質点系の運動と対比させて論ずることは多い。

^{†32} 流跡線 (particle path, pathline) は Lagrange 的な立場を、流線 (streamline) は Euler 的な立場をとる。定常流 (steady flow) ならば、流線と流跡線が一致する (確かめよ)。なお、流脈線 (streak line) とよばれる曲線もあるので、混同してはならない。[基礎] 流線、流跡線、流脈線の定義を調べ、身近な例を考えよ。

^{†33} この疑問を解消するためには、全エネルギーの保存則の形(13)では不十分であると気づく。だからこそ、この先の作業が意味をなす。教科書に載っている数式変形など、時間を掛ければ、誰でもできる。むしろ、数式の背後を見抜ける力こそが本質である。

^{†34} 速度に関する内積 (inner product) を取ることに他ならない。[問] バネマス系の運動方程式に、速度を掛けて積分すると、エネルギー保存則が導かれる (運動方程式の第一積分) ことを確認し、この操作と対比せよ。

^{†35} これらは、直感的にわかることだが、数式をもって示された。

^{†36} さらに、応力のする仕事は運動エネルギーと内部エネルギーの双方に寄与することもわかる。

^{†37} 普段から練習していないと、また、ベクトルとテンソルの演算に習熟していないと、案外、書き下せないものである。さらに、各種エネルギー方程式に含まれる各項は、本当にスカラールか。確かめよ。