応用数学 (金川) 中間試験 (問題は裏面)　　実施: 2018 年 6 月 6 日 8:40–11:25

(注 1) 中間試験得点および前半の総得点が, それぞれ上位 5 名程度の者の氏名を manaba に記載予定である. 掲載を望まない場合に限り, その旨を答案用紙 1 枚目に記載のこと. 「1 位ならば許可するが 2 位以下ならば許可しない」のような詳細な注文を付けてもよい.

(注 2) 配布物 (全て揃っているかを確認のこと. (2)(3)(4) の 3 点全てを提出のこと).

(1) 試験問題 (本用紙)
(2) 答案用紙 4 枚 (不足時には挙手のこと. 表面のみ使用してもよい)
(3) 授業評価アンケート自由記述用紙
(4) マークシート

(注 3) **学生証 (忘れた者は署名を命ずる)**, 鉛筆, シャープペンシル, 替え芯, 消しゴム, 時計, ペットボトル飲料 1 本 (包装不可), 無地ハンカチもしくはハンドタオル 1 枚, 無地下敷きのみ使用可. 電卓, 筆箱, 定規は使用不可. 携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまう (**携帯電話所持で一時退室した場合不正行為とみなされる**). 鞄のチャックをしめて床におく.

(注 4) **12:10 まで延長解答可**. 10:30 より提出退室可. 10:30 以降は一時退室不可.

(注 5) 答案用紙 4 枚の全てに記名. 足りなければ挙手のこと. 使わなかった答案用紙も提出のこと. 答案用紙右肩に **1/4, 2/4, ⋯ のように計何枚中何枚目かを明記**のこと.

(注 6) 考え方の筋道, 式変形の根拠, 途中計算を, 論理的かつ正確に略さず記述のこと. 最後の答えだけが正しくとも得点されない. **日本語での説明中に数式を挿入**する形で解答のこと. 問題文中に与えられていない記号を用いる際には定義のこと. 記号の誤用は減点する.

(注 7) ある問題の解答において, **導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 導出や証明を繰り返すことなく自由に用いてよい**. 独立採点とするので, 問題文中の数式も用いてよいが, 引用の際は, 答案の式番号と問題文中の式番号を区別のこと.

(注 8) 説明問題の文字数は目安であるが, **大幅に少ない場合には, たとえ正答でも, 満点は与えない. 逆に, 大幅超過による減点はないが, 題意に即さない記述や誤りからは減点するので, 可能な限り指定文字数程度におさめること.** 数式も文字数に数えてよい.

(注 9) 以下の公式や定理を証明せずに用いてよい. ただし, **どの公式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと. これ以外の公式や定理を用いるのならば証明を略さないこと.

(i) 三角関数の直交関係式
(ii) 偶関数や奇関数の積のあいだに成立する関係
(iii) Euler の公式
(iv) Laplace 変換の線形性
(v) Laplace 変換のたたみこみの定理 (合成法則)
(vi) 部分積分法など高校数学で既習の公式 (線引きが不明な場合は挙手のこと)

(注 10) 質問がある場合, 一時退室希望の場合, 答案用紙不足の場合には挙手のこと.

(注 11) **不正行為には学群学則で定める厳罰が課されるので厳禁である**.

応用数学 中間試験 (表面の注意事項を読むこと．注意事項に即さない答案は採点しない)

1. [70 点] 実数変数 x に依存する実数値関数 $f(x)$ を考える．$f(x)$ の Fourier 級数は, 全ての x に対して $f(x)$ に収束する．$f(x)$ は絶対可積分かつ項別積分可能とする．

   (1) $f(x)$ が周期 2π の周期関数である場合に, 以下の設問に答えよ．

   a) $f(x)$ の実 Fourier 係数の全てを定積分で表現する公式を導け．

   b) $f(x)$ の実 Fourier 級数を複素 Fourier 級数に変形せよ．また, 複素 Fourier 係数を定積分で表現する公式を導け．

   c) $f(x)$ の複素 Fourier 級数の虚部がゼロとなることを示せ．

   (2) $f(x)$ が周期 $2L$ の周期関数である場合, (1) b) の結果はどうなるか (L は正の実数定数)．

   (3) $f(x)$ が非周期関数である場合に, $f(x)$ の Fourier 変換, および, その逆 Fourier 変換を定積分で表現する式をそれぞれ導け．

   (4) $f(x)$ が $x \geq 0$ でのみ定義される場合に, $f(x)$ の Laplace 変換を定積分で表現する式を導け．さらに, その逆 Laplace 変換を複素積分で表現する式を導け．

2. [30 点] Laplace 変換を用いて, つぎの常微分方程式の初期値問題の解を求めたい．

$$f'(t) + p(t)f(t) = q(t) \tag{A}$$

$$f(0) = a \tag{B}$$

ただし, $t\,(\geq 0)$ は実数変数, $f(t)$ は実数値関数, $p(t)$ と $q(t)$ は任意の実数値関数, a, b, c はいずれも実数定数, s は複素変数, 記号 $'$ は t に関する微分演算を意味する．次式を既知として証明せずに用いてよい．

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}[e^{ct}] = \frac{1}{s-c}, \quad \mathcal{L}[\sin ct] = \frac{c}{s^2+c^2}, \quad \mathcal{L}[\cos ct] = \frac{s}{s^2+c^2} \tag{C}$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \tag{D}$$

   (1) $p(t) = b$ の場合を考える．Laplace 変換の方法を用いて解を求めよ．

   [注意] (i) 解に $\mathcal{L}$ および $*$ を含めてはならない．(ii) 解が初期条件 (B) を満たすことは確認しなくてよい．(iii) たたみこみの定理 (合成法則) は証明せずに用いてよい (表面記載)．

   (2) $p(t) = bt$ の場合には, Laplace 変換の方法では解けない．理由を 100 文字から 200 文字程度で述べよ．

   [注意] 計算を具体的に実行し, 確かに解けないことを示し, その理由に踏み込むとよい．

   (3) $p(t)$ がいかなる関数ならば, Laplace 変換の方法で解けるのか．200 文字程度で述べよ．

   [注意] (i) $p(t)$ の具体例を最低 2 つ挙げよ．ただし, 同種の例を多数挙げても加点されない．(ii) 実際に解を求める必要はない．(iii) (1) と (2) の解答を引用してもよい．

   (4) 以上をふまえ, 積分変換 (Laplace 変換と Fourier 変換) を用いて常微分方程式を解くことの意義を 500 文字程度で詳述せよ．ただし,「積分変換の方法は, どのような常微分方程式ならば有効に働くのか．適用限界はどこにあるのか」の考察を含めよ．

   [注意] 様々な解答が想定されるが, 正当ならば満点を与える．誤りを書いてはならない．

以上