応用数学演習 II [第 8 回] (11/26) 解答

1. 以下の積分を実際に計算し，三角関数の直交性を確かめよ．

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos\, nx \cos\, mx \,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\, nx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos\, 2nx}{2} \,\mathrm{d}x = \pi \quad (n=m) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\,(n-m)x + \cos\,(n+m)x}{2} \,\mathrm{d}x = 0 \quad (n \neq m) \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin\, nx \sin\, mx \,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\, nx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos\, 2nx}{2} \,\mathrm{d}x = \pi \quad (n=m) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\,(n-m)x - \cos\,(n+m)x}{2} \,\mathrm{d}x = 0 \quad (n \neq m) \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin\, nx \cos\, mx \,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\,(n-m)x + \sin\,(n+m)x}{2} \,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}
$$

2. 周期 2π の関数 $f(x) = 0 \;\; (-\pi \le x \le 0), x \;\; (0 \le x \le \pi)$ のフーリエ係数 a_n, b_n を求めよ．

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = -\frac{2}{\pi n^2} \quad (n \;:\; \mathrm{odd})\,,\; 0 \quad (n \;:\; \mathrm{even}) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cos n\pi = -\frac{1}{n}(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}
$$

ただし, $n = 1, 2, 3 \cdots$ である．

3. 周期 8 の関数 $f(x) = -x-4 \; (-4 \le x < 0)$, $0 \; (x=0)$, $4-x \; (0 < x \le 4)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$
a_0 = 0\,,\quad a_n = 0\,,\quad b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 (4-x)\sin\left[\frac{n\pi x}{4}\right]\,\mathrm{d}x = \frac{8}{n\pi} \quad \to \; f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n\pi}\sin\left[\frac{n\pi x}{4}\right]
$$

4. 関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}(\pi - x) \; (0 \le x \le \pi)$ のフーリエ正弦級数を求めよ．

$$
b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \quad \to \; f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nx
$$

5. 関数 $f(x) = x^2 \; (0 \le x \le \pi)$ のフーリエ余弦級数を求めよ．

$$
a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^3}{3}\,,\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^n}{n^2}\,, \quad \to \; f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx
$$

6. 関数 $f(x) = 0 \; (-\pi \le x < 0)$, $x \; (0 \le x \le \pi)$ のフーリエ級数を利用して次の等式を導け．

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}
$$

問題 2 より $x = \pi/2$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right] + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left[\frac{n\pi}{2}\right]\right\} \\
&\to \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left[\frac{n\pi}{2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2n-1}(-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}
\end{aligned}
$$

応用数学演習 II [第 9 回] (12/6) 解答

1. 関数 $f(x) = x^2$ $(0 \leq x \leq \pi)$ のフーリエ余弦級数を求めよ.
   11 月 29 日出題の問題 5 解答参照.

2. 1. の結果を利用して，次の等式を導け.

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

   (1) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$

   $x = \pi$ を代入すると，$f(\pi) = \pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

   (2) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{12}$

   $x = 0$ を代入すると，$f(0) = 0 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

   (3) $\dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \cdots = \dfrac{\pi^4}{90}$

   パーセバルの等式より，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[4\frac{(-1)^n}{n^2}\right]^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{x^2\right\}^2 \mathrm{d}x \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

3. 次の関数 $f(x) = x(2-x)$ $(0 \leq x \leq 2)$ のフーリエ余弦級数とフーリエ正弦級数を求めよ.
   $f(x)$ を周期 4 の偶関数に拡張し，フーリエ余弦級数を求める.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}, \quad a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left[\frac{n\pi x}{2}\right]\mathrm{d}x = \frac{-8}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n + 1\right], \quad \rightarrow \quad f(x) \sim \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2}$$

   また，$f(x)$ を周期 2 の偶関数として考えることもできるため，以下のようにも求められる.

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}, \quad a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{-4}{n^2\pi^2}, \quad \rightarrow \quad f(x) \sim \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2}$$

   $f(x)$ を周期 4 の奇関数に拡張し，フーリエ正弦級数を求める.

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left[\frac{n\pi x}{2}\right]\mathrm{d}x = \frac{16}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right] \quad \rightarrow \quad f(x) \sim \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right]$$

4. 関数 $f(x) = 0$ $(-\pi \leq x < 0)$, x $(0 \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数を利用して次の等式を導け.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

   11 月 29 日出題の問題 6 解答参照.

応用数学演習 II [第 10 回] (12/13) 解答

1. $u(t,x)$ に関する 1 次元熱伝導方程式の初期値・境界値問題を解く.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$u(0,x) = \begin{cases} x & (0 \le x \le 1) \\ 2-x & (1 < x \le 2) \end{cases} \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,2) = 0 \tag{3}$$

(a) 未知関数の変数分離形 $u(t,x) = T(t)X(x)$ を仮定し, 式 (1) に代入すれば

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2X}\frac{d^2X}{dx^2} \tag{4}$$

となる. 式 (4) の左辺は t のみの関数, 右辺は x のみの関数であることから, これらが等号で結ばれるためには, 定数でなければならない. それを $-\kappa^2$ とおけば ($\kappa > 0$ とする) , 熱伝導方程式 (1) は結局

$$\frac{d^2X}{dx^2} + 2\kappa^2 X = 0 \tag{5}$$

$$\frac{dT}{dt} + \kappa^2 T = 0 \tag{6}$$

なる 2 本の常微分方程式に帰着される (あらかじめ定数を負の数で仮定したが, 本問題の場合, 正の数とおくと不適なことは, 境界条件から検証できる. 資料を参考のこと).

(b) 式 (5) の一般解を求める. 解を $X(x) = e^{sx}$ と仮定し代入すれば, s に対する特性方程式が得られる. これを解くことによって, 根が, $s = \pm\sqrt{2}\kappa i$ と求まる (i は虚数単位). 常微分方程式 (5) の線形性に基づいて重ね合わせの解を考え, 指数関数を三角関数に分ければ, 結局

$$X(x) = A\cos\sqrt{2}\kappa x + B\sin\sqrt{2}\kappa x \tag{7}$$

となる. 同様に, 式 (6) の一般解は

$$T(t) = C\exp(-\kappa^2 t) \tag{8}$$

である. A, B, C は任意定数である.

(c) 境界条件 (3) より, $T(t)X(0) = T(t)X(2) = 0$ であるが, $T(t) = 0$ であれば解が意味を失うので, $X(0) = X(2) = 0$ を一般解 (7) に課せばよいことが分かる. まず前者より, $A = 0$ と定まり, 後者より, $B\sin 2\sqrt{2}\kappa = 0$ となるが, $B = 0$ は不適であるため, 結局

$$2\sqrt{2}\kappa = n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \kappa = \frac{n\pi}{2\sqrt{2}} \tag{9}$$

と定まる (n は整数). この κ が固有値であり, その値が定まった. それに付随する基本解 (任意定数を含まない解) は, n(あるいは κ) の値によって無数にふるまうことから, これを固有関数と呼び, それは

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \tag{10}$$

$$\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{8}t\right) \tag{11}$$

と定まる.

(d) 一般解を以下のように仮定し求める.

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{8}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \tag{12}$$

ただし, $b_n \equiv B_n C_n$ と置き直した．これに初期条件 (2) を代入すれば

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \tag{13}$$

が得られる．これは, 周期 4 の関数 $u(0,x)$ の Fourier 正弦級数展開式であり, b_n はその Fourier 係数である．Fourier 係数を与える公式 (あるいは, 両辺に正弦関数をかけて, 項別積分の仮定と直交性より導いても良い) より

$$b_n = \int_0^2 u(0,x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\ dx = \int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\ dx + \int_1^2 (2-x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\ dx \tag{14}$$

となり, 部分積分により計算すれば

$$b_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{15}$$

と求まる．$n = 2k$ のとき $b_n = 0$ であることから, $n = 2k-1$ とおけば, $\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k+1}$ である．これを式 (12) に戻せば, 一般解が求まる：

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\exp\left\{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{8}t\right\}\sin\left\{\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right\} \tag{16}$$

2. $u(x,y)$ に関する 2 次元の Laplace 方程式の境界値問題を解く．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{17}$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0 \tag{18}$$

$$u(0,y) = f(y) \tag{19}$$

$$u(1,y) = 0 \tag{20}$$

変数分離形 $u(x,y) = X(x)Y(y)$ を仮定し, 式 (17) に代入し計算すれば

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha \tag{21}$$

が得られる．この左辺と右辺はそれぞれ x, y のみの関数であるため, 定数でなければならなく, それを α とおいた ($\alpha > 0$ と仮定しておく)．結局, 2 本の常微分方程式

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \alpha X = 0 \tag{22}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \alpha Y = 0 \tag{23}$$

が得られる．それぞれの一般解はただちに求まり

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x} \tag{24}$$

$$Y(y) = C\sin\sqrt{\alpha}y + D\cos\sqrt{\alpha}y \tag{25}$$

である．A, B, C, D はそれぞれ任意定数である．境界条件 (18) より, $X(x)Y(0) = X(x)Y(1) = 0$ であるが, $X(x) = 0$ であれば解は意味を失う．ゆえに, $Y(0) = Y(1) = 0$ でなければならなく, この境界条件を一般解 (25) に課すこととなる．まず, 前者より $D = 0$ が定まり, 後者より $C\sin\sqrt{\alpha} = 0$ となるが, $C = 0$ であればこの一般解は意味を失う．ゆえに $\sin\sqrt{\alpha} = 0$ でなければならなく

$$\sqrt{\alpha} = n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = n^2\pi^2 \tag{26}$$

である．n は整数であり，この値によって無限通りの $Y(y)$ が得られることから，任意定数 C を置きなおし，一般解 (25) を

$$Y_n(y) = C_n \sin n\pi y \tag{27}$$

のように書く．任意定数の n の依存性も添え字として示した．α を固有値，$\sin n\pi y$ を固有関数と呼ぶ．同様に $X(x)$ についても，式 (24) を

$$X_n(x) = A_n e^{n\pi x} + B_n e^{-n\pi x} \tag{28}$$

と書き直す．これに境界条件 (20) を課すと，$Y(y) \neq 0$ より $X(1) = 0$ であり

$$A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B_n = -A_n e^{2n\pi} \tag{29}$$

である．これより

$$X_n(x) = A_n \left(e^{n\pi x} - e^{2n\pi} e^{-n\pi x}\right) = 2A_n e^{n\pi} \frac{1}{2} \left[e^{n\pi(x-1)} - e^{-n\pi(x-1)}\right] = 2A_n e^{n\pi} \sinh n\pi(x-1) \tag{30}$$

となる．X, Y それぞれの固有関数が式 (27)(30) と求まった．X, Y の n 番目の積が u の n 番目に対応し，$X_n(x)Y_n(y) = u_n(x, y)$ とかける．さらに，Laplace 方程式の線形性から成り立つ解の重ね合わせの性質 (線形結合性)

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) \tag{31}$$

を用いれば，解 $u(x, y)$ は

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n e^{n\pi} \sinh n\pi(x-1) C_n \sin n\pi y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh n\pi(x-1) \sin n\pi y \tag{32}$$

とかける．$a_n \equiv 2A_n C_n e^{n\pi}$ と置きなおした．ここで，境界条件 (19) を代入すれば，

$$f(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh n\pi \sin n\pi y \tag{33}$$

となる．これを，周期 2 の関数 $f(y)$ の Fourier 正弦級数と見れば ($-1 \leq y \leq 0$ の範囲に偶関数となるように $f(y)$ を拡張)，$-a_n \sinh n\pi$ はその Fourier 係数であるため

$$-a_n \sinh n\pi = 2 \int_0^1 f(y) \sin n\pi y \; dy \quad \Leftrightarrow \quad a_n = -\frac{2}{\sinh n\pi} \int_0^1 f(y) \sin n\pi y \; dy \tag{34}$$

と求まる．これを代入して，一般解がもとまる：

$$u(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sinh n\pi(x-1) \sin n\pi y}{\sinh n\pi} \times \int_0^1 f(y) \sin n\pi y \; dy \tag{35}$$

3. 教科書 P.207 の波動方程式から初めて，P.210 の特殊解までを導く手順を参考のこと．

補足 (常微分方程式の一般解と変数分離の定数に関して)

2 階線形常微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \kappa f = 0 \tag{36}$$

の一般解は, 定数 κ の正負によって以下の 3 通りに場合分けされて与えられる：

$$f(t) = A\sin\sqrt{\kappa}t + B\cos\sqrt{\kappa}t \quad (\kappa > 0) \tag{37}$$

$$f(t) = Ae^{\sqrt{-\kappa}t} + Be^{-\sqrt{-\kappa}t} \quad (\kappa < 0) \tag{38}$$

$$f(t) = At + B \quad (\kappa = 0) \tag{39}$$

ただし, A, B は任意定数である. これらを導く一般的な方法は, 基本解を $f(t) = e^{st}$ と仮定し, s が従う代数方程式を導き, それを解くことによって, s を決定する方法である (特性方程式の方法). このとき, 方程式の線形性から, 基本解の線形結合として一般解が与えられる. 式 (37) は, s が虚数となる場合のものであり, 複素数 (純虚数) の指数関数と実数の三角関数を関連付ける (Euler の公式) ことにより得られる表現である. これを, 三角関数で表現せずに

$$f(t) = Ae^{i\sqrt{\kappa}t} + Be^{-i\sqrt{\kappa}t} \tag{40}$$

と書いても良い. これとは逆に, 式 (38) を双曲線関数で表現した一般解

$$f(t) = A\sinh\sqrt{-\kappa}t + B\cosh\sqrt{-\kappa}t \tag{41}$$

も正しい (導いてみてください).

いま, 境界条件

$$f(0) = f(1) = 0 \tag{42}$$

のもとで常微分方程式 (36) を解くとする. このとき, 仮に $\kappa < 0$ と仮定するならば, 一般解は式 (38) で与えられる. これに境界条件 (42) を代入した結果, 特殊解 (微分方程式だけが与えられたときに得られる, 任意定数を含む一般的な解を一般解, 与えられた境界条件に従うように任意定数を定めて表現された, 特定の場合にのみ成り立つ解を特殊解という) は

$$A + B = 0 \quad \text{and} \quad Ae^{\sqrt{-\kappa}} + Be^{-\sqrt{-\kappa}} = 0 \tag{43}$$

なる代数方程式を解くことにより得られるが, これをみたすのは

$$A = B = 0 \quad \text{or} \quad \kappa = 0 \tag{44}$$

となる. いずれも, 解が意味を成さないため, 適さない. この場合, $\kappa < 0$ なる仮定が間違っていたことが分かる.

偏微分方程式を解く場合においても, 分離定数 κ を例えば正の数と置き, 境界条件を代入し計算を進めた結果, 上記のような不適合性が出てこなければそれでよい. また, 仮に負の数とおいた結果, 不適合性がでてこれば, そこで初めて, 定数の正負の定義を変えたりして計算をやり直せばよい. いずれも, 境界条件を代入した結果から初めて考察すれば良いことであり, 定数の正負を定義する段階においてどういう置き方が適切であるかということは, 基本的には考えなくともよい. しかし, 物理的な考察などから, 解が三角関数あるいは指数関数的振る舞いをするなどの予想がついている場合は, それを踏まえて定義することも良い. 演習問題 1, 2 に対して, 仮定が適切であったがために不適合が無かった人も, 違う定数の置き方をしていれば不適合性が出ていたことを計算によって確かめてみてください.