応用数学小テスト [1][†1]

2017 月 4 月 26 日 (水) 8:40–9:00 (目安) 実施

(注 1) **日本語での説明中に数式を挿入**する形で, 論理的に解答のこと. 途中計算や式変形の根拠を省略しないこと. 問題文中に書かれていない記号を用いる場合は, 定義を略さずに述べること.

(注 2) おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと. 証明不要で用いてよい公式の線引きが不明な場合には, 挙手し質問のこと.

(注 3) 答案用紙は裏面も使用可. 不足時は, 挙手し申し出ること.

(注 4) 解答時間は, 適宜延長するので, 丁寧に焦らず解答のこと.

問 1. [70 点] 任意の自然数 n と m に対して成立する次式を証明せよ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

(注意) 三角関数の加法定理, 2 倍角の公式は, 既知として証明せずに用いてよい.

問 2. [30 点] 任意の偶関数と任意の奇関数の積は奇関数となる. 数式を用いてこれを示せ.

問 3. [記入任意] 満点取得者が少ない場合, 満点者の氏名を (名誉の意味で) manaba のコースニュースに掲載する予定ですが, これを望まない方は「望まない」と記載してください. 早く終わった人は, 講義に対する感想や疑問点を書き, 下記レジュメを読んでください.

以上

応用数学第 2 回講義レジュメ[†2]

- 前回——(i) 三角関数の直交関係式, 偶関数と奇関数の定義, 周期関数の定義という準備 (伏線) のもとで, (ii) 周期 2π の**周期関数** $f(x)$ を, 全ての三角関数の重ね合わせ, すなわち,

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

  で表現するという, 画期的な級数展開である Fourier 級数を導入した. 同時に, Fourier 係数 a_n, b_n, c の重要性を述べ, そのうち, c を $f(x)$ から与える公式を導出した.

- 今回—— §1.4.2 の解説 (a_n と b_n を $f(x)$ の定積分から求める公式). §1.5 の問題 5 を解説[†3]. §2 (本日配布) のうち, Euler の公式 (§2.1.2) を天下り的に解説し, 実 Fourier 級数から複素 Fourier 級数を導く (§2.2.1) 予定.

- 次回—— 5 月 **1 日 (月!!)**. 小テスト [2] を実施 (小テスト [1] と全く同じ要領). **Fourier 係数を導く問題 (問題 4) と Euler の公式に関する問題 (問題 14) は確実に出題**[†4].

- 連絡事項—— 4 月 **29 日 (土) 23:59** $\Longrightarrow$ アンケート締切 (manaba から提出)

[†1] 100 点満点で採点し, 前半の総得点中 6 点に換算する.
[†2] あくまでも要点のみをまとめたものであって, 原則, 講義資料に沿って板書する.
[†3] §1.5 には, 複数の問題が載っているが, 時間の制約上, 全てを解くことはしない. 自主学習としてほしい.
[†4] その他の出題情報は, 講義中あるいは manaba で述べる. (i) 具体的な $f(x)$ が与えられたときに Fourier 係数を求められるか, (ii) Euler の公式を記憶し使いこなせるか, が重要であることを, 予め注意しておく.

応用数学 小テスト [2][†1]

実施: 2017 月 5 月 1 日 (月) 8:40–9:05 (適宜延長)

(注 1) 前回は, 根拠不足, 乱雑な記述, イージーミスではない致命的な計算ミスが目立った. **第三者に一通りに伝わる**ように, 日本語での説明中に数式を挿入する形で, 論理的に解答のこと. 途中計算や式変形の根拠を省略しないこと.

(注 2) おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと. 問題文中に書かれていない記号を用いる場合は, 定義を略さずに述べること.

(注 3) 答案用紙の不足時や, 証明不要で用いてよい公式の線引きが不明な場合などは, 挙手のこと.

(注 4) 解答時に, 式を引用する際には, 式番号をつけるとよい. その際に, 問題文中の式番号 (1)(2) と混同しないこと.

問 1. [80 点] 実変数 x に依存する実数値関数 $f(x)$ を考える. 全ての x に対して, $f(x)$ の実 Fourier 級数が $f(x)$ に収束する場合, すなわち,

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

なる等式が成立する場合を考える. ここに, c は実定数, a_n と b_n はともに自然数 n についての実数列 (定数列) である. 次式を導け.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

(注 1) n に関する総和記号と x に関する積分記号の順序交換が可能であるとする.

(注 2) 三角関数の積の積分に関する公式 (直交関係式) を証明せずに用いてよい. ただし, **どの式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと.

問 2. 以下の設問に答えよ.

1) [5 点, **答えのみでよい (理由など不要)**]
複素指数関数 e^{ix} を実三角関数で表す Euler の公式を書け (x は実変数, i は虚数単位).

2) [15 点] 実正弦関数 $\sin x$ を複素指数関数を用いて表現する式を導け.

問 3. [任意] 満点取得の場合に, 氏名を manaba に掲載「されたくない」場合は「×」と書いてください. 早く終わった場合は, 講義の感想や疑問点を書き, 裏面を読んでください.

以上

[†1] 100 点満点で採点し, 前半の総得点中 6 点に換算する.

応用数学第 3 回 (5/1/2017) レジュメ[†2]

- 前回まで:

  1. 実 Fourier 級数の伏線: 三角関数の直交関係式, 偶関数と奇関数の定義, 周期関数.
  2. 周期 2π の**周期関数** $f(x)$ を, あらゆる三角関数の重ね合わせ, すなわち,

  $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

     で表現するという, 画期的な**無限級数展開**である Fourier 級数を導入した.
  3. **Fourier 係数 (実数数列) a_n と b_n の重要性**を述べ, これらを $f(x)$ を用いた定積分として与える公式を導いた.
  4. 問題 5 の解説: a_0 を別途計算する必要性. $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$ なる基礎関係. $n = 2k - 1$ への置き換え. **Fourier 係数の減少を確認**.
  5. 余談レベルで, Taylor 級数と Fourier 級数の比較に触れた.
  6. 複素 Fourier 級数への拡張の伏線: Euler の公式を天下りに導入した.

- 今回—— 小テスト問 2 を解説しながら §2.1.3 (前回配布) までを復習. §2.1.4 は天下りに受け入れ, 口頭説明に留め, 板書はしない. §2.1.5–2.1.6 を簡単に解説. **重要極まりない §2.2 を詳細に解説 (複素 Fourier 級数と係数)**. 今回配布の §2.3 (複素 Fourier 級数が実 Fourier 級数に戻るのか?), および, 時間があれば, 演習問題を 1 題程度解説[†3].

- 次回小テスト (5 月 10 日 (水))—— **(2.34)(2.35) の導出を出題 (それ以外出題しない)**[†4]. したがって, pp. 41–44 の計算を, 確実にフォローのこと.

- 次回 (5/10) および次回以降 (5/17, 24, 31) のスケジュール:

  – 本日, §2 のやり残しが生じれば解説するが, 全問題を解くことはしない.
  – §3 (Fourier 級数の性質) は省略 (講義資料は manaba に掲載済)[†5].
  – 早期に, 最重要といえる Fourier 変換 (§4) に入る.
  – Laplace 変換 (§5) は, 5/24, 5/31(前半最終回) で, 1 回から 1.5 回程度を費やして, 簡単に触れるに留める.
  – 6 月 7 日 (水) 8:40–11:25 中間試験 (配点 50 点 (前半総得点 100 点満点中))

- 連絡事項—— アンケートの未提出者は manaba から提出のこと (加点の可能性がある).

[†2] あくまでも要点のみをまとめたものであって, 講義内で事細かに解説は行わない. 原則, 講義資料に沿って板書する.

[†3] §2 には, 複数の問題が載っているが, 時間の制約上, 全てを解くことはしない. 自主学習としてほしい.

[†4] GW だからである. 次々回以降は, 親切には指示しない可能性が高い. ただし, 本日の進度によっては進めない可能性もあるので, 範囲変更の連絡 (口頭, 板書, manaba のいずれかもしくは複数) を見落とさないこと.

[†5] 難易度, 進度, 重要性などを鑑みて, 一旦省略するが, 講義時間に余裕が生まれた場合は, 最終回などで解説する可能性がある. 小テストからも出題範囲外とする. 単位が欲しいだけの者は, §3 の学習は省略して, その分, 試験範囲の学習への集中をすすめる. 深く学びたい者, Fourier 級数がどのような場面で使えるのかに踏み込みたい者は, §3 の独学を強くすすめる.

応用数学 小テスト [3][†1]

実施: 2017 月 5 月 10 日 (水) 8:40–9:10 (適宜延長)

(注意) Euler の公式, 偶関数と奇関数の定義, 三角関数の直交関係式などの基礎事項は, 証明せずに用いてよい. 証明が必要か否かの線引きが不明な場合には, 挙手し質問のこと.

問 1. 実変数 x に依存する実数値関数 $f(x)$ が, 実 Fourier 級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

に展開できて, 全ての x において $f(x)$ に収束する場合を考える. このとき, 各係数は,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,...) \tag{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,...) \tag{4}$$

と表される. ここに, a_n と b_n はともに自然数 n についての実数列 (実 Fourier 係数) である. いま, (1) を

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx} \tag{5}$$

なる複素 Fourier 級数へと書き換えたい. ここに, c_n は複素 Fourier 係数 (複素数列) である. 以下の順序にしたがって, 書き換えを遂行する.

1) [10 点] 次式をそれぞれ示せ.

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\quad \sin nx=\frac{i(e^{-inx}-e^{inx})}{2} \tag{6}$$

2) [60 点] 式 (1) から出発して式 (5) までを導け.

3) [10 点] c_n を定義せよ. すなわち, c_n の実部と虚部を, a_n と b_n を用いて表せ.
(注意) 本設問 3) の解答は前設問 2) に含めても構わない.

4) [20 点] 次式を導け.

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \quad (n=0,\pm1,\pm2,...) \tag{7}$$

問 2. [任意] 満点取得の場合に, 氏名を manaba に掲載「されたくない」場合は「×」と書いてください. 早く終わった場合は, 講義の感想や疑問点を書いてください.

以上

[†1] 100 点満点で採点し, 前半の総得点中 8 点に換算する.

応用数学 小テスト [4][†1]

実施: 2017 月 5 月 17 日 (水) 8:40–9:00 (適宜延長)

問 1. [10 点, **答えのみでよい**]

$-\infty < x < \infty$ で定義される実数値関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $F(k)$ の定義式を書け．ここに, x と k はともに実変数である．(注意) $1/\sqrt{2\pi}$ の有無は気にしなくてよい．

問 2. [45 点] 複素 Fourier 級数, 複素 Fourier 係数, Fourier 変換, 逆 Fourier 変換という 4 つの概念の関連性 (類似点や相違点) を, 50 文字から 100 文字程度で説明せよ．ただし, **「数列」「関数」「連続」「離散 (飛び飛び)」の全てを使用必須用語**とする．

(注意 1) 図や表を用いてもよいが, 文章での説明も添えること．

(注意 2) 字数はあくまで目安である．数式は字数に含めても含めなくてもよい．また, 大幅に超過, あるいは少ない分量であっても, 本質を突いておれば, 満点を与える．

問 3. [45 点] 実変数 x に依存する複素数値関数

$$f(x) = e^{(i-1)x} \tag{A}$$

において, $x \to 0$ なる極限をとると, $f(x) \to 0$ と収束する．この理由を, 50 文字から 100 文字程度で述べよ．ただし, **複素指数関数のふるまいに必ず言及**のこと．

(注意) 字数はあくまで目安である．数式は字数に含めても含めなくてもよい．また, 大幅に超過, あるいは少ない分量であっても, 本質を突いておれば, 満点を与える．

問 4. [記入任意] 満点取得の場合に, 氏名を manaba に掲載「されたくない」場合は「×」と書いてください．講義や小テストの感想や疑問点を書いてください．

以上

次回小テスト [5] (5/24) 出題のポイント

- 1 階および 2 階導関数の Fourier 変換を求められるか
- たたみこみの “定義” を記憶しており, たたみこみの “定理” を証明できるか
- Fourier 変換を用いて, 常微分方程式の境界値問題を少ない計算量で要領よく解けるか

今後の予定

- 本日—— 小テスト [4], Fourier 変換 (2)——Fourier 変換と逆変換の実例 (害虫やノイズの除去), Fourier 変換の導出, 導関数の変換, たたみこみ積分とその変換, 常微分方程式の境界値問題の解法への応用
- 5/24—— 小テスト [5], Fourier 変換 (3)——エネルギースペクトル, Gauss 関数と Dirac のデルタ関数とその変換, Laplace 変換 (1)
- 5/31—— 小テスト [6], Laplace 変換 (2)
- 6/7—— 中間試験
- 6/14 以降—— 後半の講義

[†1] 100 点満点で採点し, 前半の総得点中 8 点に換算する．

応用数学 小テスト [5][†1]

実施: 2017 月 5 月 24 日 (水) 8:40–9:10 (適宜延長)

答案の出来が悪い．採点では**式変形の根拠を最重視**している．思ったように得点できていないと感じている者は，とくに，以下の点に注意し，答案を取りまとめること．

注意事項 (よく読んでから解答のこと)

1. 日本語での説明中に数式を挿入する形で，論理的に解答のこと．**途中計算や式変形の根拠を省略しない**こと．
2. 根拠不足，乱雑な記述，イージーミスではない致命的な計算ミスからは大幅に減点する．
3. おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと．
4. 問題文中に書かれていない記号を用いる場合は，定義 (意味) を略さずに述べること．
5. 部分積分の公式に限り，証明せずに用いてよい．Fourier 変換の定義式は既知としてよい．線引きがわからない場合は，挙手し質問のこと．

問 1. [40 点] 常微分方程式

$$e\sqrt{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+8\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pi x^3e^y\sin x \tag{A}$$

について以下の設問に答えよ．

1) 従属変数 (未知変数) と独立変数はそれぞれ何か (完答採点)．**答えのみでよい**．
2) 何階の微分方程式か．**答えのみでよい**．
3) 線形の微分方程式，非線形の微分方程式のどちらか．**理由も簡潔に述べよ**．
4) 同次 (斉次) 方程式，非同次 (非斉次) 方程式のどちらか．**理由も簡潔に述べよ**．
5) 変数係数の方程式，定数係数の方程式のどちらか．**理由も簡潔に述べよ**．

問 2. [20 点] 次式を示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y-x)g(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)g(x+\eta)\mathrm{d}\eta \tag{B}$$

ここに，f と g はともに実数値関数，x, y, η はいずれも実変数である．

問 3. [40 点] 実数値関数 $f(x)$ の Fourier 変換を $F(k)$ とおく (x と k は実変数)．このとき，$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ の Fourier 変換を $F(k)$ を用いて表す公式を導け．ただし，$f(x)$ は次式を満たす:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0 \tag{C}$$

問 4. [記入任意] 満点取得の場合に，氏名を manaba に掲載「されたくない」場合は「×」と書いてください．講義や小テストの感想や疑問点を書いてください．

以上

[†1] 100 点満点で採点し，前半の総得点中 8 点に換算する．

応用数学 小テスト [6][†1]

実施: 2017月5月31日(水) 8:40–9:05 (適宜延長)

注意事項 (よく読んでから解答のこと)

1. 日本語での説明中に数式を挿入する形で, 論理的に解答のこと. **途中計算や式変形の根拠を省略しないこと.**
2. 根拠不足, 乱雑な記述, イージーミスではない致命的な計算ミスからは大幅に減点する.
3. おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと.
4. 問題文中に書かれていない記号を用いる場合は, 定義 (意味) を略さずに述べること. ただし, π, e, i, ∞, d, ∂, $\int$, sin, cos, tan, arctan, ln, $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ などといった, 市民権を得ている数学記号の説明は不要である.
5. 既知として用いてよい公式や定理の線引きがわからない場合は挙手のこと.

問1. [10点, 答えのみ書け]

実変数 $t \geq 0$ に対して定義される実数値関数 $f(t)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ の定義式を書け. 問題文中に与えられていない記号を用いる場合には, 簡潔な説明を添えよ.

問2. [40点] 実変数 t に依存するつぎの実数値関数を考える.

$$f(t) = 1 \tag{A}$$

Laplace 変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ を計算せよ. また, $\mathcal{L}[f(t)]$ が収束するための条件を求めよ.

問3. 2次元直交座標 (x, y) から平面極座標 (r, θ) への変数変換を考える.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{B}$$

1) [20点] r と θ をそれぞれ x と y だけを用いて表せ ($\theta = \cdots$ の形に解け).

2) [30点] 変数変換の Jacobian $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ が r となることを, 計算によって示せ.

問4. [50点 (ボーナス問題)] 次式を示せ (x は実変数).

$$\frac{\mathrm{d}\arctan x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} \tag{C}$$

注1) 微分係数 (導関数) の定義から出発しなくてもよい.

注2) $\arctan x$ を $\tan^{-1}$ と書いてもよい.

注3) 逆関数の導関数. 正接関数の導関数. 逆三角関数の定義. **定義に忠実に従う.**

問5. [記入任意] 150点あるいは100点取得の場合に, 氏名を manaba に掲載「されたくない」場合は「×」と書いてください. 講義や小テストの感想や疑問点を書いてください.

以上

[†1] 150点満点で採点し, 前半の総得点中12点に換算する. すなわち, 4点分はボーナス点であって, 前半総得点が100点を超える者が出る可能性がある. 4点分のボーナス点が取れなかったからといって, 不利にはならない.

応用数学中間試験 (工シス—環境 & エネ, H29 春 ABC, 3 単位, 金川) 2017 年 6 月 7 日 8:40–11:25

注 意 事 項

注 1) **不正行為には学群学則で定める厳罰が課される.**

注 2) 鉛筆 (シャープペンシルおよび替え芯), 消しゴム, 時計, ペットボトル飲料 1 本 (包装不可), 無地ハンカチもしくはハンドタオル 1 枚, 無地下敷きのみ机上においてよい. 電卓, 筆箱, 定規は使用不可. **携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまう.** 鞄のチャックをしめて床におく.

注 3) 12:10 まで延長解答可. 10:30 より提出退室を認める. 10:30 以降はトイレなどの途中退室不可.

注 4) 答案用紙 4 枚の全てに記名. 足りなければ挙手のこと. 使わなかった答案用紙も提出のこと. 答案用紙右肩に **1/4, 2/4,** $\cdots$ **のように計何枚中何枚目かを明記**のこと.

注 5) 考え方の筋道, 式変形の根拠, 途中計算を, 論理的かつ正確に略さず記述のこと. 最後の答えだけが正しくとも得点にはなりえない. **日本語での説明中に数式を挿入**する形で解答のこと. 問題文中に与えられていない記号を用いる際には定義のこと. 記号の誤用からは減点する.

注 6) ある問題の解答において, **導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 導出や証明を繰り返すことなく自由に用いてよい.** 独立採点とするので, 問題文中の数式も用いてよいが, 引用の際は, 答案の式番号と問題文中の式番号を区別のこと.

注 7) 以下の公式や定理を証明せずに用いてよい. ただし, **どの公式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと. これ以外の公式や定理を用いるのならば証明を略さないこと.

(a) 三角関数の直交関係式, (b) 偶関数や奇関数の積に成立する関係, (c) Euler の公式, (d) Laplace 変換の線形性, (e) 部分積分法など高校数学で既習の公式 (境界線が不明な場合は挙手のこと).

1. [計 40 点] 実変数 x 依存の実数値関数 $f(x)$ の Fourier 級数が, 全ての x に対して $f(x)$ に収束する. $f(x)$ をつぎの 4 通りに分類する.

(i) $f(x)$ が周期 2π の周期関数である場合:

1) [8 点] 実 Fourier 係数 a_0, a_n, b_n のそれぞれを $f(x)$ の定積分から与える公式を導け. ここに, n は自然数である. (注意) $f(x)$ は絶対可積分かつ項別積分可能である.

2) [8 点] $f(x)$ の実 Fourier 級数を, 複素 Fourier 級数の形に書き換えると同時に, 複素 Fourier 係数 c_n を, 実 Fourier 係数を用いて定義せよ. さらに, c_n を $f(x)$ の定積分から求める公式を導け.

(ii) $f(x)$ が周期 $2L$ の周期関数である場合 (L は正の実定数):

3) [4 点] $f(x)$ の複素 Fourier 級数の総和記号による表式, および, 複素 Fourier 係数 c_n を $f(x)$ の定積分から与える公式をそれぞれ導け.

(iii) $f(x)$ が非周期関数である場合:

4) [12 点] (ii) の結果を発展させて, Fourier 変換 $\mathcal{F}[f(x)](k) = F(k)$, および, 逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}[F(k)](x) = f(x)$ を定積分で表現する式をそれぞれ導け. ここに, $F(k)$ は実変数 k 依存の複素数値関数である. (重要) 非周期関数を数式で表現かつ議論せよ.

(iv) $f(t)$ が実変数 $t \geq 0$ で定義される場合 (慣例に倣い独立変数を x から t に変更した):

5) [8 点] Fourier 変換の定義に即して, Laplace 変換 $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ の定義式を導け. さらに, 逆 Laplace 変換 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t)$ を複素積分の形で与える公式を導き, 積分経路を複素数平面に図示せよ. ここに, $F(s)$ は複素関数である (s は複素変数).

2. [18 点] 次式を示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{A}$$

さらに, (A) を利用して, 次式も示せ.

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \tag{B}$$

ここに, x と k はともに実変数である.

(注意) 変数変換やそれに伴う積分範囲の変更の根拠を詳述せよ. 極限 $x \to \infty$ および $x \to -\infty$ におけるふるまいも詳述せよ.

3. [14 点] 実変数 $t\,(\geq 0)$ 依存の実数値関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対して成立する次式を示せ.

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s) \tag{C}$$

ここに, s は複素変数であり, $*$ は Laplace 変換に関する合成積 (たたみこみ) を意味する.

(ヒント) Jacobian を用いることが望ましい.

4. [計 28 点] 固有角振動数 ω のバネマス系の共振現象は

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 f(t) = A \sin \omega t \quad (t \geq 0) \tag{D}$$

によって記述される. 平衡点からの変位 $f(t)$ を与える解は無数に存在するが, ここでは,

$$f(0) = X, \quad f'(0) = V \tag{E}$$

を満たすものを求めたい. ここに, $f(t)$ は実変数 t に依存する実数値関数, A, X, V, ω はいずれも実定数, 記号 $'$ は t に関する微分演算を意味する. 次式を既知として用いてよい.

$$\mathcal{L}[\cos \omega t](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[\sin \omega t](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{F}$$

1) [3 点 (完答), **答えのみ書け**] 問題「(D)(E) を数学的に説明せよ」に対して, 金川君が

<u>1 階非線形定数係数斉次 (同次) 偏微分方程式の初期値境界値問題</u>

と誤答した. 下線部に潜む金川君の誤りの全てを正せ (**完答採点ゆえに注意深く答えよ**).

2) [7 点] 導関数 $\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}t^2$ の Laplace 変換を, 複素変数 s, $\mathcal{L}[f(t)](s)$, 式 (E) のみを用いて表す式を導け. また, その式が成立するための条件を, 理由も含めて述べよ.

3) [15 点] Laplace 変換を用いて, 式 (D)(E) を満たす解を導き, その解が $t \to \infty$ において発散すること (共振) を示せ.

(注意とヒント) (i) Laplace 変換以外の解法は不可. (ii) 定積分計算は最後まで実行せよ. 積分記号を含む形は不可. (iii) 計 4 項からなる形を得たならば, 正解であろう.

4) [3 点] 求めた解が, 式 (E) を満たしていることを, 計算によって示せ.

以上

応用数学 (金川哲也) 小テスト

2016 年 5 月 10 日 12:15–12:40 (目安) 実施

[注意] 答案用紙の不足時は申し出ること. **日本語での説明中に数式を挿入**する形で解答のこと (途中計算や式変形の根拠は省略不可). おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと.

問 1. 周期 2π の周期関数 $f(x)$ を考える. x は実数変数で, $f(x)$ は実数値をとる.

1) [4 点] $f(x)$ が実 Fourier 級数

$$c+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

に展開することが可能で, 全ての x において級数 (1) が $f(x)$ に収束するとする. このとき, 実 Fourier 係数 c, a_n, b_n のそれぞれを, $f(x)$ の定積分から求める式を導出せよ. [注意 1] 三角関数の積の積分に関する公式 (直交関係式) は, 既知として証明せずに用いてよい. [注意 2] $f(x)$ は絶対可積分であるとする. [注意 3] n に関する総和と x に関する積分の順序交換が許されるとする.

2) [4 点] 実 Fourier 級数 (1) から出発して, $f(x)$ の複素 Fourier 級数展開

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx} \tag{2}$$

を導くと同時に, 複素 Fourier 係数 c_n を実 Fourier 係数 a_n と b_n を用いて定義せよ. Euler の公式 (指数関数と三角関数を関係付ける式) は, 既知として証明せずに用いてよい.

3) [2 点] 2) で定義した複素 Fourier 係数 c_n を, $f(x)$ の定積分から求める形

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \tag{3}$$

に変形せよ.

問 2. これまでの講義に対する感想や疑問点があれば書いて下さい (任意).

応用数学 第 3 回レポート課題 (2016/5/10 出題)

1. 締切と提出方法: **5 月 16 日 (月) 18:30** (厳守)[†1]. 3F305 金川教員室に来室のこと [†2].

2. 次の問題を手書きで解答のこと [†3]. **“A4”サイズ “レポート用紙”に “片面”**で解答のこと.

   1) 必須問題 (5 問: 4.2 点): 問題 22, 42, 46, 48, 51

   2) 選択問題 (**1 問選択** [†4]: 0.8 点): 問題 27–41, 43, 44, 49, 50, 52

[連絡] (1) 4/28 締切のアンケート未提出者は提出してください. (2) 教科書を購入してください: **『技術者のための**高等数学 3—フーリエ解析と偏微分方程式—』培風館, **1980 円** (税別)[†5].

[†1] 不完全でも提出をすすめる. [採点方針] **未完成よりも, 未提出・遅延の方が減点は大きい.**

[†2] 手渡しでの受理を原則とするが, 不在時は居室入口の封筒に投函してもよい.

[†3] 本日の進度に応じて範囲変更の可能性がある (その場合, 講義内と manaba でアナウンスする).

[†4] 1 問以上解答してもよい. 1 問の正答があれば, 他の問題が誤答であっても減点はないし, 添削の上で返却する.

[†5] 前半の講義 (の試験対策) には教科書は不要ですが, 後半の講義で使用予定です. amazon のレヴューなどからもわかるように, **工学徒のための安く優れた良書**です. くどく書いてある金川の講義資料と簡潔な本書を併用することで二重の理解が可能です. 第三エリア丸善では **5 月 19 日までしか購入できません** (返品が始まります).

応用数学小テスト 2 (中テスト)　2016 年 5 月 24 日 12:15–15:00 実施 (出題: 金川)

注意事項 (**よく読んだ上で解答を始めること**)

1. 鉛筆 (シャープペンシルおよび替え芯), 消しゴム, 時計のみ机上におく (関数電卓, 筆箱, 定規使用不可). **携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまうこと**. 鞄のチャックをしめて床におくこと. 不正行為には学類で定める罰則が課される.
2. 答案用紙 5 枚全てに要記名. 足りなければ申し出る. 使わなかった答案用紙も提出のこと. 用紙右上に **1/5, 2/5, ⋯ のように計何枚中何枚目かを明記**のこと.
3. **最後の "答えだけが正しい" ことは, 正答とはみなされない**. 考え方の筋道や式変形の根拠を, 論理的かつ正確に略さず記述する. **日本語での説明中に数式を挿入**する形で解答のこと (途中計算や式変形の根拠は省略不可). おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと. 記号の誤用からは減点する.
4. ある問題の解答において**導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 証明を繰り返すことなく自由に用いてよい**. 独立採点とするので, 問題文中の数式も用いてよいが, 引用の際は, 答案の式番号と問題文中の式番号を区別のこと.
5. グラフを描く際には, 軸とグラフの交点の座標や軸の名称などを明記のこと. 綺麗な図でなくとも, 重要な特徴が示された概形ならばよい.
6. 以下の公式や定理を証明せずに用いてよい. これ以外の公式や定理を用いるのならば証明を略さないこと. ただし, **どの公式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと.
   (a) 三角関数の直交関係式
   (b) Euler の公式
   (c) 実 Fourier 係数と複素 Fourier 係数を与える公式
   (d) Fourier 級数の収束定理
   (e) 偶関数と奇関数の積に成立する関係
   (f) たたみこみの定理 (たたみこみの Fourier 変換に関する定理)

問 1 [25 点] 区間 $-\pi \leq x < \pi$ で定義された実数値の 1 次関数 x を, 周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に拡張して作られる関数 $f(x)$ が Fourier 級数に展開可能であって, 不連続点を除く全ての x に対して, Fourier 級数が $f(x)$ に収束する.

(1) $f(x)$ の概形を描け. [注意] 精密な図でなくとも, 重要な特徴が示されておればよい.

(2) $f(x)$ の実 Fourier 級数を求めよ. 総和記号を用いた表現を書き下した後に, 初めの 4 項を具体的に書き下せ.

(3) $f(x)$ の複素 Fourier 級数を求めよ. 総和記号を用いた表現を書き下した後に, 代表的な 4 項を具体的に書き下せ.

(4) (3) の複素 Fourier 級数 **"から出発"** して, (2) の実 Fourier 級数への帰着を証明せよ.

問 2 [10 点] 実数値関数を考える.

(1) Fourier 変換と逆 Fourier 変換の定義式を書け. [注意] 書くだけでよい. 各記号に説明を与えよ.

(2) (1) で書き下した数式と, 複素 Fourier 級数および複素 Fourier 係数の関係を, 数式を用いて 200 字前後で説明せよ (証明ではない). 題意は「Fourier 級数と Fourier 変換の違いは何か」であって, これがわかる記述ならば, 厳密な証明である必要はない.

問 3 [30 点] 次の 2 種類の実数値関数を考える.

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{A}$$

$$g(x) = e^{-ax^2} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{B}$$

ここに, a は正の実数定数, x は実数変数であり, 以下の k は実数変数とする.

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の概形をそれぞれ描け. [注意] 精密な図でなくとも, 重要な特徴が示されておればよい.

(2) $f(x)$ の Fourier 変換 $F(k)$ を求め, $F(k)$ が実数値の偶関数であることを示せ.

(3) $g(x)$ の Fourier 変換 $G(k)$

$$G(k) = Ae^{-k^2/(4a)} \tag{C}$$

を導け. ここに, A は任意の実数定数であるが, A を決定する必要はない.

問 4 [5 点] 次式を証明せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(x-\eta)\mathrm{d}\eta \tag{D}$$

ここに, x, y, η は実数変数, f と g は実数値関数である.

問 5 [30 点] 実数変数 x の実数値関数 $f(x)$ が

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{E}$$

を満たすとする. $f(x)$ の Fourier 変換を $F(k)$ とおく. k は実数変数とする.

(1) $f(x)$ の 2 階導関数の Fourier 変換を, k と $F(k)$ だけを用いて表す式を導出せよ.

(2) 常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - a^2 f = q(x) \tag{F}$$

の解のうち, 条件 (E) を満たし, かつ, $q(x)$ を積分の中に含むものを求めよ. ここに, $q(x)$ は既知の実数値関数, a は既知の実数定数である.

問 6 これまでの講義に対する感想や疑問点があれば書いて下さい.

以上

応用数学 中間試験問題 2016 年 6 月 7 日 12:15–15:00 実施 (出題: 金川)

注意事項

1. 鉛筆 (シャープペンシルおよび替え芯), 消しゴム, 時計のみ机上におく (関数電卓, 筆箱, 定規使用不可). **携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまうこと**. 鞄のチャックをしめて床におくこと. 不正行為には学類で定める罰則が課される.
2. 答案用紙 4 枚全てに要記名. 足りなければ申し出ること. 使わなかった答案用紙も提出のこと. 答案用紙右上に **1/4, 2/4,** $\cdots$ **のように計何枚中何枚目かを明記**のこと.
3. **最後の "答えだけが正しい" ことは, 正答とはみなされない**. 考え方の筋道, 式変形の根拠, 途中計算を, 論理的かつ正確に略さず記述する. **日本語での説明中に数式を挿入する形で解答のこと**. おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと. 記号の誤用からは減点する.
4. ある問題の解答において**導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 証明を繰り返すことなく自由に用いてよい**. 独立採点とするので, 問題文中の数式も用いてよいが, 引用の際は, 答案の式番号と問題文中の式番号を区別のこと.
5. 以下の公式や定理を証明せずに用いてよい (**中テストと異なる!!**). これ以外の公式や定理を用いるのならば証明を略さないこと. **どの公式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと.

   (a) 三角関数の直交関係式, (b) Euler の公式, (c) 偶関数や奇関数の積に成立する関係.

問 1 [27 点] 絶対可積分かつ項別積分が可能な周期 2π の周期関数 $f(x)$ を考える. $f(x)$ は実数変数 x に依存する実数値関数である. $f(x)$ が Fourier 級数 (実 Fourier 級数および複素 Fourier 級数) に展開可能であって, $f(x)$ の Fourier 級数が, 全ての x において $f(x)$ に収束する場合を考える. [注意] 問題文中に与えられていない記号を用いる際には定義のこと. 題意に即して解答のこと.

(1) 実 Fourier 係数を $f(x)$ から求める公式をすべて導け.
[注意] 項別積分などの仮定をどこで用いたのかを述べよ.

(2) $f(x)$ の実 Fourier 級数が, 複素 Fourier 級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{A}$$

の形に整理できることを証明すると同時に, 複素 Fourier 係数 c_n を実 Fourier 係数を用いて定義せよ. [ヒント] n に注意せよ.

(3) c_n を $f(x)$ から求める公式を導け.

(4) 複素 Fourier 級数 (式 (A)) の虚部はゼロとなる. これを証明せよ.

問 2 [20 点] 複素 Fourier 係数の先にある Fourier 変換そしてその先の Laplace 変換を定義したい. [注意] 小問 (1)(2)(3) で, f と F の定義がそれぞれ異なることに注意せよ.

(1) 周期 $2L$ の実数値の周期関数 $f(x)$ を考える. $f(x)$ の複素 Fourier 級数, および, 複素 Fourier 係数を $f(x)$ の定積分から与える公式を導け. ここに, L は正の実数定数, x は実数変数である. [ヒント] 問 1 の結果を利用するとよい.

(2) (1) の結果から出発して, Fourier 変換 $\mathcal{F}[f(x)](k) = F(k)$, および, 逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}[F(k)](x) = f(x)$ の定義式を導け (定積分で表現せよ). ここに, $f(x)$ は実数値の非周期関数 (x は実数変数), $F(k)$ は複素数値関数である (k は実数変数).

(3) (2) で導いた Fourier 変換の定義を用いて, Laplace 変換 $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ の定義式を導け (定積分で表現せよ). ここに, $f(t)$ は $t \geq 0$ で定義される実数値関数 (t は実数変数), $F(s)$ は複素関数である (s は複素変数).

(4) (2)(3) を用いて, 次式を導け. 記号の定義は (3) と同一である.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)-i\infty}^{\mathrm{Re}(s)+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{B}$$

問 3 [12 点] つぎの実数値関数 $f(x)$ を考える. ただし, x は実数変数, a は正の実数定数である.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\infty < x < 0) \\ e^{-ax} & (0 \leq x < \infty) \end{cases} \tag{C}$$

(1) $f(x)$ の概形を描け. [注意] 精密な図でなくともよいが, 軸との交点の座標などは示せ.

(2) $f(x)$ の Fourier 変換 $F(k)$ を求めよ. [注意] 定積分の計算に含まれる極限 $x \to \infty$ および $x \to -\infty$ におけるふるまいを言及のこと.

(3) (2) で求めた $F(k)$ の虚部は奇関数となる. これを証明せよ.

問 4 [41 点] Laplace 変換を利用して, 常微分方程式

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = q(t) \quad (t > 0) \tag{D}$$

の解のうち,

$$f(0) = a, \quad f'(0) = b \tag{E}$$

を満たすものを求めたい. ここに, $f(t)$ は実数変数 t に依存する実数値関数, a, b, ω は全て実数定数, $q(t)$ は任意の実数値関数, ダッシュ記号 $'$ は t に関する微分演算を意味する.

(1) $f''(t)$ の Laplace 変換を, 式 (E), $F(s)$, s だけを用いて表現する式を導き, その適用範囲を記せ. ここに, $F(s)$ は $f(t)$ の Laplace 変換である (s は複素変数).

(2) $\sin\omega t$ および $\cos\omega t$ の Laplace 変換を与える公式を導き, その適用範囲が

$$\mathrm{Re}(s) > 0 \tag{F}$$

であることを証明せよ.

(3) 一般に, 実数値関数 $f_1(t)$ の Laplace 変換と実数値関数 $f_2(t)$ の Laplace 変換の積は, $f_1(t)$ と $f_2(t)$ のたたみこみ (合成積) の Laplace 変換に等しい. これを証明せよ.

(4) (1)(2)(3) を道具として, 式 (D)(E) を満たす解を導け.

以上