連続体力学第 2 回勉強会 (3/3/2016) メモ †1

1. 「連続体力学」の一部に, 既習の「流体力学」と「弾性力学 ($\approx$ 材料力学)」†2 などが位置づけられる.

2. 勉強会の目的 : **任意の (如何なる場合も通用する) 連続体の「基礎方程式系」**†3 を学ぶことに注力. これに, われわれの経験 (実験結果) に即した「構成式」†4 を代入すると, 連続体力学の個々の問題が解けるが, それはその都度でも間に合うし, 自分でやればよい.

3. 「基礎方程式系」の 1 つ目として, 質量保存の法則の偏微分方程式による表現の「連続の式」†5 を, 天下りに述べた. それは, 次式であった †6†7 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0 \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u})=0\right) \tag{1}$$

4. 記号 : 未知変数は, 上式の**分子**の密度 ρ と, 速度ベクトル (u, v, w) である. 成分 (スカラー) で数えると 4 つである. これらは, **分母**にある独立変数 (t, x, y, z) の「**4 変数関数**」である †8. 連続体力学が (1 変数関数を扱う質点や剛体の力学 †9 よりも) 難しいといわれる理由の一つに, このような数理的困難さが挙げられる.

5. 連続体力学の目的:「**密度や速度などが †10, いつ (時間), どこで (空間), いくつか, どのようにふるまうか.** 」を知ること. 数式で述べると, 密度 $\rho = f(x, y, z, t)$ の関数形 f を決定すること †11.

6. 手順: (i) 連続体の「全て」†12 を考慮にいれた基礎方程式系を知っておく. (ii) 着目している連続体に即した構成式を調べ, あるいは作り, 代入する †13. (iii) コンピュータで (数値的に) 解く †14.

---

†1 本メモは, 昨日の板書が多すぎたことに疲れたため, 突発で作ったものであり, あくまでも要約あるいは速記にすぎません. 内容は保障しないし, 誤字脱字も確認していません. 熱力学の講義資料の 1% あるいは 2% 程度の労力しか割いていないので, メモあるいは落書きにすぎないという前提のもとで活用ください (あくまで板書で進行).

†2 弾性力学というと守備範囲が広い. このうち, 等方的かつ Hooke 弾性体の仮定が適用できて, 静力学 (定常問題) のうち, 工学で現れる部材の変形に着眼したものを材料力学という (と理解してはいるが, 専門でないので, 自信はない).

†3 **基礎方程式系とは, 質量・運動量・エネルギーの保存法則の偏微分方程式による表現**を指す (後述).

†4 構成式の代表例として, 応力とひずみが比例する Hooke 弾性体という連続体と, 応力とひずみ速度が比例する Newton 流体という連続体を例示する.

†5 連続の式は, とくに流体力学で多用されるが, 弾性体などの固体の連続体力学でも用いられる (後述). 質量は常に保存されねばならないからである.

†6 以後, 分数の分子の括弧を省略する : $\partial(\rho u)/\partial x = \partial \rho u/\partial x$

†7 大括弧内の表現は, 添え字表記 (後述) およびベクトル表記を意味する. これに対して, 括弧外を成分表記という. いずれの表記も, 用途あるいは好みに応じて使い分けるものであって, **物理的意味は一切変わらない**. 以降は, 括弧内の表記を用いることが多い.

†8 微分方程式を見たならば, 記号を, 独立変数と従属 (未知) 変数に分類せねばならない. これは, たとえ方程式の物理的意味を知らなくても可能である. なお, 変数だけでなく, 定数や非斉次項の存在も重要である.

†9 質点の力学は, 速度 $v(t)$ の決定が主要な目的であった. すなわち, 1 変数関数に対する常微分方程式の解.

†10 他にも多数ある: 変位ベクトル, 加速度ベクトル, 渦度, 応力, ひずみテンソル, ひずみ速度テンソル, 熱流ベクトル, 圧力, 温度, エントロピー, など.

†11 速度ベクトルなども同様. 密度と速度の解は, 連続の式のような偏微分方程式によって決定される.

†12 全てとは, **「連続体であること」以外に, 一切の仮定を持ち込まないこと**.

†13 (i)(ii) から, 解くべき方程式が決定される. なお, 着目している現象 (運動の様子や物質の種類 (物性)) を眺めると, 多くの場合, 不要な (無視できるほどに寄与が小さい) 項が現れるのが普通なので, それを消すことも有効.

†14 まれに, 手計算で解ける場合もある. しかし, **非線形力学**である連続体力学の基礎方程式系とは, 非線形の連立偏微分方程式

7. 連続体の位置付け：質点は, 質量を有するが体積が無限小. 体積を扱いたい欲求から, 質量と体積を有する「剛体」の概念が誕生. しかし, 剛体も変形は扱えないので, さらなる欲求から, 質量と体積を有するだけでなく, **「変形」を議論可能な「連続体」**という仮想的な力学の概念 (モデル) ができた.

8. 当たり前のように, 連続体は, 気体, 液体, 固体に分類される. 気体と液体の総称が流体. 固体は, 弾性体や塑性体など, その後の分岐がさまざまなので分類困難[†15].

9. (ここから今回の内容) 連続体を直感的に定義[†16]すると**「すきまがない」**といえる. いかなる物質も, 分子の集合として構成されるが[†17], それらの詳細に立ち入らない. 実際には, 分子と分子の間の距離が存在するが, これが無視できるほどに小さいとみなす近似[†18].

10. 連続体近似は, 仮定であるので, その妥当性は検証すべきである[†19].

11. 「すきまがない」連続体近似のおかげで, 連続体力学の全ての未知変数 (速度ベクトルや密度など) は, 空間座標ベクトル[†20] $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ の連続関数[†21]かつなめらかな関数として定義される[†22]. したがって, いたる $\boldsymbol{x}$ で偏微分可能で, 全ての未知変数は, 偏微分方程式の解として決定される[†23].

12. 変数の表現: たとえば, 密度は, 以下のようにかけた：

$$\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t) = \rho(x, y, z, t) \tag{2}$$

このように, 未知変数を時空間 $(\boldsymbol{x}, t)$ の関数として眺める立場を「Euler の見方」という[†24][†25].

に支配され, これを手計算で解くことは, 一般に不可能といえる.

[†15] だからこそ, 構成式（経験則）以前に, **「基礎方程式系」に習熟し, 構成式を代入する前の段階で止めておく**価値がある.

[†16] 連続体の数学的定義もあるが, 簡単ではないので, いまは踏み込まない. 調べてみよ.

[†17] もっと遡れば, 原子や量子など.

[†18] 連続体近似あるいは連続体極限ということがある. どれだけ近づいて眺めても, どこまで細かくみても, もはや, 分子の存在は跡形もない.

[†19] しかし, 自身は, 検証した記憶がない (そのような対象 (主に水と空気) ばかりを研究してきたからだけかもしれないが). たとえば, 鉄や水を思い浮かべるまでもなく, 固体や液体では, 疑わずとも成立するといってよいだろう. しかし, 気体の場合は常に成立するとは限らない. (反例) 分子と分子の間の距離が大きな希薄気体では, 連続体力学を使えない. 宇宙空間など. (発展) 平均自由行程とは何か. Boltzmann 方程式とは何か.

[†20] **ベクトルを太字**で表現する. ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ と, その 1 つ目の成分のスカラー x は全くの別物であるので混同してはならない (同じアルファベットを用いる慣習があるのだが, 別のアルファベットを用いてもよい). さらに, ベクトルの大きさ (絶対値) は $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であって, $|\boldsymbol{x}| \neq x$ に注意を要する. なお, 次回以後は, $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ よりも, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ という表現を用いることが多い.

[†21] すきまがないから.

[†22] すべての $\boldsymbol{x}$ に対して連続体が対応する.

[†23] いいかえれば, 偏微分方程式こそが, 道具となる.

[†24] もう一つ, 「Lagrange の立場」があるが, 不便なのであまり使わない. しかし, この立場に関連する「Lagrange 微分」という微分演算子 D/Dt

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \left(= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{grad} \right) \tag{3}$$

は極めて重要である (記号も含め, 全て後述. 右辺の大括弧内の表記が重要 (成書で意味を調べるとよい)). **この演算子の存在, とくに右辺の速度と空間微分 (勾配演算子ナブラ: ∇) の内積こそが, 連続体力学 (とくに流体力学) が非線形力学たる起源である (いいかえれば, これ以外に, 非線形性の起源は, どこにもない. その意味で, あえて, 先取りして強調する).**

[†25] 未知変数の ρ などを「場の量」といい, 密度 (の解) を「密度場」, 速度 (の解) を「速度場」という. 密度場はスカラー場, 速度場はベクトル場である (ベクトル解析).

13. ベクトル解析 (板書)：空間座標 $\boldsymbol{x}$ による偏微分の演算を扱う．**「ベクトルの」微分ではなく，「ベクトルで」微積分**する [†26].

14. なぜベクトル解析か: ベクトルを成分 (スカラー) に分けて調べる (理解する) ことはたしかに重要であるが, **ベクトルそれ「自体」を扱うことがもっと重要**である．すなわち, ベクトルの成分

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3') = \cdots \tag{4}$$

は, **座標系が変われば目まぐるしくその値を変える**がゆえに, いちいち着目するスカラーを変えねばならない．しかしながら, **ベクトル $\boldsymbol{x}$ は座標系に依存せず不変**である．

15. (ここから話題転換) 連続体力学の基本法則, すなわち, 理論展開を行うために認めてしまう法則は何か．**Newton の運動の 3 つの法則**以上ではない [†27]．しかし, 第二法則すなわち Newton の運動方程式以外は, どちらかといえばサポート役であって, 前面に出てくることが少ない．

16. (結論から述べる)Newton の第二法則は, 連続体力学においては, 結局, **質量・運動量・エネルギーの保存法則**に帰着する [†28]．以後, この **3 つの保存法則**が出発点となる．

17. 質量保存則は, 質点や剛体の問題では, 一見考慮していないように勘違いしがちであるが, それは誤りである．たとえば, 質点の運動時にその質量 m が一定 (定数) であること, すなわち,「$m = \text{const.}$」を質量保存則とよんでも言い過ぎではない [†29].

18. Newton の第二法則は運動量の保存則を意味する．これを, 以下の質点の運動方程式を例示して示せ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \tag{5}$$

ここに, $x(t)$ は変位 [†30], t は時間 (独立変数), $F(t)$ は質点に働く力, m は質量 (定数) である．これは, 非斉次 (非同次) の 2 階線形定数係数常微分方程式である [†31].

19. 保存：「形を変えてもなお不変」である量を保存量という．**質量 [†32]・運動量・エネルギーはすべて保存量**である．だからこそ, 質量・運動量・エネルギーの保存法則を起点におく (後述)．たとえば, 車の衝突時, 運動量は力積に形を変えるが, その総量は不変である意味で, 運動量とは保存量である [†33][†34].

20. 嘘と思うかもしれないが, Newton の**運動方程式 (5) を解くことはできない．これだけでは解けない**のである [†35]．なぜか．未知変数の数が 2 個, 式の数が 1 本だからである [†36]．では, どうするか．

[†26] ベクトル関数のスカラー変数による微分は, ベクトル解析ではない (理由を考えよ)．**ベクトル変数 "による" 微分**がベクトル解析であって, スカラー関数のベクトルによる微分も, ベクトル関数によるベクトルによる微分も, ベクトル解析の守備範囲.

[†27] 質点 (系) や剛体 (系) の力学の延長線なので, 当たり前といえるだろう.

[†28] 厳密には, 質量保存則は, 第二法則とは無関係であるが, 一括りにした.

[†29] しかし, これを「連続の式」と書く書物は見たことはない.

[†30] 先述の空間座標の x と混同してはならない.

[†31] 連続体力学の全てが, (偏) 微分方程式に支配されるので, 微分方程式の分類すらできない者は, 復習を強くすすめる.

[†32] 質量は, 形を変えることはなく, 総量が一定である.

[†33] エネルギーも, 熱や仕事への変換や, 電気エネルギーから運動エネルギーへの変換などを含め, 総量は不変である.

[†34] 「保存」とは, 一定や不変や定数とは異なる.

[†35] 2 つの初期条件が足りないからという理由ではない (基礎: 2 階微分方程式ならば, 2 個の初期条件が必要であることを示せ).

[†36] もちろん, 右辺が, $F = 0$(斉次形), あるいは, $F = C$ (定数) ならば, 解ける.

21. 第二法則 (運動方程式) の両辺に速度を掛けて積分すれば, エネルギーの保存則が導かれる [†37].

22. **Newton の運動の法則から保存法則へ：** 結局, Newton の第二法則は, 質量・運動量・エネルギーの保存法則に帰着する. これらの偏微分方程式による表現を「基礎方程式系」といい, それは, いかなる連続体に対しても普遍的に成立する [†38].

23. **最重要!!**: 当たり前と思うかもしれないが, 一般に, **「数式の本数 = 未知数の数」** [†39] でなければ方程式は解けない. 実は, **これを満たすように, 都合よく経験則 (構成式) をあてはめて, ことを運ぶことが, 連続体力学の最大の問題**と言って過言でない [†40][†41]. 以下で, 方程式と未知変数の過不足を数えよう.

24. 天下りだが, 連続体力学の未知変数は, 17 個 [†42][†43] もある [†44].

25. 保存量として, 質量とエネルギーはスカラーだが, 運動量はベクトルなのでスカラー成分を 3 つもつ. ゆえに, 保存則を表現する基礎方程式の本数は 5 本 (5 連立).

26. 未知変数と方程式の本数が一致しないので, 困った. **基礎方程式は不変**なので, これをいじることはできない. ゆえに, **未知変数の数を 17 個から 5 つまで減らす以外の策はない** [†45][†46].

27. そのために, われわれの経験に頼って, いくつかの「構成式」を個々の問題に応じて適用する [†47]. すると, 未知変数の数は, やがて, 5 個まで減少する. 極論, 人間がすべきことはここまで. あとは (もはや原理的に解けるのだから) コンピュータが計算してくれる [†48].

[†37] この操作を「運動方程式の第一積分」という. 流体力学における Bernoulli の定理は, Euler の運動方程式 (等方性の非粘性流体に対する Newton の運動の第二法則の偏微分方程式による表現) の第一積分に他ならない (確かめよ). すなわち, その物理的意味も, エネルギーの保存にあるのだが, Bernoulli の定理と, 後述する「エネルギー保存則」やそこから導かれる「エネルギー方程式」を混同してはならない.

[†38] 仮定を課して項が消えたりすることはあっても, 出発点は不変.

[†39] 未知変数の数と式の本数が一致しているとき, 「方程式系 (連立方程式) は閉じている」という.

[†40] 連立一次方程式を思い返すまでもなく理解できるレベルであるが, 軽視すべきでない.

[†41] これは, 近似的に解けないのではなくて, **そもそも原理的に解けない**ということである (手計算でも, 数値計算でも, いかなる計算法でも解けない).

[†42] 天下りに述べておく : 未知変数は, (i) 密度 ρ, 内部エネルギー e, (ii) 速度 $\boldsymbol{v}$, 熱流束 $\boldsymbol{q}$, (iii) 応力 $\boldsymbol{P}$ である [速度は, 以後, $\boldsymbol{u}$ ではなく, $\boldsymbol{v}$ を用いることが多い. 速度ベクトルと一対一対応にある未知変数の「変位ベクトル」に記号 $\boldsymbol{u}$ を用いる慣習にしたがうからである]. (i) はスカラー, (ii) はベクトル, (iii) はテンソルであって, 成分で数えると, $(1+1)+(3+3)+9=17$ 個である.

[†43] テンソルの厳密な定義に迫ることは容易ではないので, いまは, 9 つの成分をもつ 3×3 行列

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{ここに}, \boldsymbol{P} = \{p_{ij}\} \quad (i=1,2,3; j=1,2,3) \tag{6}$$

とのみ述べておく (テンソルと行列には類似点が多いが, 同一視してはならない). なお, 成分 p_{ij} のうち, $i=j$ は対角成分, $i \neq j$ は非対角成分である (行列の対角化を復習せよ). 実は, **応力テンソルは対称テンソル**すなわち $p_{ij}=p_{ji}$ を満たすテンソルであること ($p_{12}=p_{21}$, $p_{13}=p_{31}$, $p_{23}=p_{32}$) が証明できるが (先取りしてみよ), それでもなお, 未知数の数は 3 個減るだけにすぎない.

[†44] 諸君が調べれば, このように述べていない書物が大半であることに気づくが, 決して, その書物が間違いなのではなく, すでに何らかの仮定を置いているからである. どの述べ方が正しいかなどという問題ではない.

[†45] さもなくば, 基礎方程式が解けないので, 無力である.

[†46] 応力テンソルが対称テンソルである事実を利用しても (要証明), なお, 14 個から 5 個まで, 9 つも減らさねばならない.

[†47] たとえば, 応力とひずみの比例を述べる Hooke の法則, 応力とひずみ速度の比例を述べる Newton 流体の仮定, 熱流と温度勾配の比例を述べる Fourier 法則など.

[†48] 次回 (第 3 回): 3/8(火)16:00–18:00, 次々回 (第 4 回): 3/22(火)16:00–18:00