熱力学 II (金川哲也) 講義資料 [4] (2014/10/31)

[第 2 回 (前回) 小テスト結果][124] 第 1 回よりも遥かに高得点者が増えた．平均点は 7.34 点, 標準偏差が 3.08 点, 受験者 70 名のうち, 10 点が 24 名, 9 点が 15 名, 1 点が 3 名, 0 点が 2 名であった．

これまでの総得点 20 点満点のうち, 20 点が 7 名, 19 点が 7 名, 3 点が 1 名, 2 点が 1 名, 0 点が 1 名である [125].

[音速 (speed of sound)] 状態変数のひとつである．**エントロピーが一定** (S が定数) における, 圧力 p の密度 ρ 変化率として定義される [126]:

$$a \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} \tag{103}$$

もちろん, 圧力 p の 2 つの独立変数は何であってもよい．しかしながら, 音速の具体形を知るためには, (i) 圧力の関数形を $p(\rho, S)$ の形で表現し, その上で, (ii) p の密度偏導関数を計算する必要がある．

[理想気体の音速] 具体例をとおして実感するために, 状態方程式が整備されている理想気体を取り上げる．式 (103) をみて, 圧力 p の独立変数を (ρ, S) とみなすべきであることに気づく．したがって, 第 1 回講義資料の演習問題 2 においてすでに導いた状態方程式

$$p = A\rho^\kappa \exp{(S/C_V)} [= p(\rho, S)] \tag{104}$$

を利用すべきと気づく (A は任意定数)[127]. むしろ, **これ以外に, 理想気体の状態変数 (p, ρ, S) を関係づける状態方程式は存在しない** [128].

式 (103) をみて, エントロピー S が一定ならば, 指数関数は定数として A に吸収され,

$$p = \tilde{A}\rho^\kappa \tag{105}$$

とかける ($\tilde{A}$ も任意定数)[129]. これは, 理想気体の Poisson 関係式 [130] の密度による表現である．

理想気体ならば, 音速を与える式 (103) は

$$a \equiv \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} \tag{106}$$

で与えられるが, これに, 式 (105) を代入すると

$$a = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T} \tag{107}$$

をうる (導いてみよ)[131].

[連続体力学と弾性波][132] 初回講義において, **質点・剛体・連続体** [133] の分類を, 質量 (mass)・体積 (volume)・変形 (deformation) の有無の観点から述べた．熱力学と音波・弾性波についても述べた．

気体と液体を総称して**流体** (fluid) とよぶ．気体も液体も, 一般に, 容易に変形する (deformable). 気体と液体の顕著な差異の一つに, 気体は, 液体と比較して, **密度を自由自在に変える**ことがあげられる．密度の変化を伴う流れを**圧縮性流れ** (compressible flow) とよぶ [134].

一方で, 固体は, 変形の挙動に応じて種々の分類があり, その分類は極めて複雑といえる．ここでは, 弾性体のみを取り上げる [135].

以下では, 弾性体中の縦波と横波の力学と, 理想気体中の音波の力学の入り口に踏み込む．

[連続体の運動方程式] Newton の運動の第二法則に基づいて, 任意の閉曲面内の**運動量の保存法則**を立式すると, **任意の**連続体の運動方程式 [136] は

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \nabla\cdot\boldsymbol{P} + \rho\boldsymbol{K} \tag{108}$$

とかける [137]. これは, 対象が**連続体であること以外に**

---

[124] 第 3 回 (10 月 24 日) 講義資料における, Joule の実験および Joule–Thomson 効果を述べた後に, 本資料の内容を講述する．

[125] 総得点が 10 点以下の者は, 第 4 回小テストおよび中間試験における**挽回のチャンスがある**．

[126] 質量保存則と運動量保存則に基づいて, 波面前後の流入と流出を議論して, 定義式 (103) を導くことが多いが, 紙数の都合上割愛し, 天下りに定義を与える．なお, 便宜上, 根号をとった a^2 で扱うことが多い．

[127] 既出の状態方程式 $pV^\kappa = A\exp{(S/C_V)}$ の容積 $V(= m\rho)$ を密度 ρ で書き換えただけである (確かめよ).

[128] 本当だろうか．すなわち, 状態方程式の陰関数表現 $f(p, \rho, S) = 0$ の成立を確かめよ．

[129] 確かめよ．エントロピーが一定のみならず, **理想気体ならば定容熱容量が定数**であることも使っている．

[130] Poisson 関係式も, いうまでもなく, 理想気体の状態方程式である．ふつうは, 密度ではなく, 体積 $V = m\rho$ を使う．

[131] 気体定数のかわりに, 比熱が既知であるならば, $a = \sqrt{\kappa(c_P - c_V)T}$ と書くことも有効である．ここで, 理想気体の Mayer の関係式 $c_P - c_V = R$ を用いた (再導出せよ). c_P と c_V はそれぞれ定圧比熱と定容比熱 [これは比熱 (比熱容量) であって, **熱容量ではない**]. **つねに次元を確認**することが習慣づいていれば, 間違うことはありえない．

[132] 発展的内容であるので, 小テストと中間試験の**出題範囲外**とする．しかしながら, 一般常識として習得してほしい．紙数の制約上, 天下り的に述べるので, 各自, 成書で補完されたい．

[133] 厳密には, 前者 2 つは, 質点系の力学, 剛体系の力学というべきである．

[134] ここでは, やや直感的に述べたが, **液体でも密度は変化しうる**．一方で, 気体でも非圧縮性流れとして扱う場合がある [低速あるいは亜音速 (subsonic) で走行する自動車や車両周りの空気力学 (空力: aerodynamics)]. 圧縮性の有無は, 本質的には, 気体か液体かには依存せず, **流れの様子**によって判断すべきなのである．固体中を弾性波が伝播しているならば, 固体でも体積 (密度) は変化する (瞬時に回復するが). 圧縮性の有無は, 気体か液体か固体かではなく, 注目している連続体と, 注目している運動を注意深く観察したうえで, 判断を下さねばならないのである．

[135] **弾性体** (elastic body) とは変形しても**元に戻る**ものを, **塑性体** (plastic body) とは変形すると**元に戻らない**ものを, それぞれ指す．粘弾性体 (visco-elastc body) とは, 弾性体と流体の双方の特性を有し, **レオロジー** (rheology) とよばれる分野において研究されている．

[136] 運動量保存則の偏微分方程式による表現である．**Newton の運動方程式 (第 2 法則) とは, 運動量の保存則**を意味することを, たとえば, 質点の力学を例示して確認せよ．

[137] 正確には, **式 (108) は, 質量保存則 (連続の式) もすでに取り込んでいる**のだが, ここでは詳述しない．紙数の制約上, 導出過程も割愛する．連続体力学あるいは流体力学の成書を参照されたい．

kanagawa♣kz.tsukuba.ac.jp

何ら仮定をおいていない, 一般的な表式である[138]. ここに, 独立変数 t は時間, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ は空間座標ベクトル[139], 従属変数 ρ は密度, $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$ は速度ベクトル[140], $\boldsymbol{P}$ は応力テンソル (2 階テンソル), さらに $\boldsymbol{K}$ は連続体の単位質量に働く外力ベクトル[141] である[142].

式 (108) の形は, 見慣れないと想像するが[143], よく眺めると, 左辺が密度と加速度の積であって, 右辺は力である. **"密度と加速度の積 (左辺) が力に等しい"**という **Newton の運動の第二法則**に他ならない[144].

[変位と速度と加速度] 速度 $\boldsymbol{v}$ および加速度 $\boldsymbol{\alpha}$[145] と, 変位 $\boldsymbol{u}$ の関係[146] の関係を示しておこう:

$$\boldsymbol{v}\equiv\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt},\quad \boldsymbol{\alpha}\equiv\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \tag{109}$$

変位 (従属変数) $\boldsymbol{u}$ と空間座標 (独立変数) $\boldsymbol{x}$ は, 異なる. 独立変数は人間が制御するもの, 従属変数は自然に委ねるものといえる. Lagrange 微分[147] とよばれる演算子の定義を示す:

$$\frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\left(=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right) \tag{110}$$

[従属変数と独立変数] 式 (108) の従属変数 (未知変数) は, ρ と $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{P}$ であって (記号は 3 つだが, **成分は 13 個**存在する. したがって, 未知変数は 13 個である), これらは t と $\boldsymbol{x}$ を独立変数に有する 4 変数関数である. たとえば, 速度の独立変数依存性は,

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{v}(x,y,z,t) \tag{111}$$

と表現できる. もしくは, 速度の x 方向成分 u については, つぎのようにかける[148]:

$$u(x,y,z,t) \tag{112}$$

[力の分類: 面積力と体積力] 式 (108) の右辺は力であると述べたが, 質点の力学とは異なり, 2 項にわけられているのはなぜだろうか. **応力 (stress) は面積力, 外力 (external force) は体積力**であって[149], このように, 連続体の問題では, **力を面積力と体積力にわける**点に注意せねばならない. **体積力の大きさは質量や体積に比例**するもので, 質点や剛体の力学でも考慮してきた. **面積力とは, 面をとおして, 外の連続体から受ける力**である. 面積力の影響こそが, 連続体力学と, 質点や剛体の力学との本質的差異である.

質点の周りには何もない. しかしながら, **連続体の周りには連続体が存在**するがゆえに, **面をとおして面積力が働く**のである[150].

Navier–Stokes 方程式[151] の右辺 (力) の煩雑な形に目を奪われて, 物理的意味を見失うことが多い. 数式にとらわれるよりも, **Newton の運動の第二法則 (運動量保存則) に他ならない**という物理を忘れてはならない.

[応力を与える構成式][152] そもそも, なぜ応力とひずみやひずみ速度を関係づけるのだろうか. 運動方程式 (108)

---

138 その普遍性ゆえ, 諸君は, まだこの表式を見たことがないと想像する. 連続体 (continuum) でありさえすればよい. 他の仮定はおいていない. **流体力学に特有の話と勘違いする者が多い**が, 固体でも適用できる. しかしながら, 連続体近似が破綻するような対象には適用不可能である [たとえば, 希薄気体 (rarefied gas)].

139 太字のベクトル $\boldsymbol{x}$ と, $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ の x 方向成分を示すスカラー x を, 混同してはならない (以下の速度ベクトルなども同様).

140 流体力学においては流速 (fluid velocity) とよぶこともあるが, 連続体力学では速度とよぶ.

141 $\rho\boldsymbol{K}$ が単位体積あたりの外力であることを確かめよ. さらに, 他の項との次元の一致をも確かめよ: $\mathrm{N/m^3}$ となる.

142 添え字表記 (テンソル表記) を使うならば, 式 (108) は

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt}=\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}+\rho K_i$$

となり, 記号は, $\boldsymbol{x}=\{x_i\}$, $\boldsymbol{v}=\{v_i\}$, $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$, $\boldsymbol{K}=\{K_i\}$ である. ここに, v_i は $\boldsymbol{v}$ の x_i 方向成分を意味する (他記号も同様). **同じ添え字が 2 階以上現れた際には, その添え字についての総和をとる**ものとする [**総和記号** $\sum_{j=1}^{3}$ **が省略**されている. これを Einstein の総和規約 (summation law) といい, テンソル解析における縮約 (contraction) に相当する]. (練習) 以降の数式も, 適宜, 添え字表記で表してみよ.

143 流体力学の運動方程式と似ていると思うかもしれないが, 実は, 微妙に**異なる**.

144 流体力学の基礎方程式をいろんな項に分割すると, とくに力に関する項が煩雑であるがゆえに, 混乱することが多い. **流体力学は Newton 力学 (古典力学)** であることを強く意識する必要がある. 初学者は, まず, Newton の運動の 3 法則 [慣性 (inertia) の法則, 運動量 (momentum) の法則, 作用・反作用 (action and reaction) の法則] という原理 (principal) に立ち戻って, 数式の物理的意味を注意深く観察すべきである. 細部に踏み込むのは, その後でもよいと考える.

145 ふつう, acceleration の頭文字 a に由来して $\boldsymbol{a}$ を使うが, 音速 a との混同を防ぐため $\boldsymbol{\alpha}$ を用いた. ついでながら, 音速には c を使うことも多いが, 熱力学における比熱 c との混同を避けた.

146 流体力学では, 多くの場合, 速度に $\boldsymbol{u}$ の記号を用いるが, 連続体力学として弾性力学と流体力学を統一的に議論する場合は, 変位に $\boldsymbol{u}$ を, 速度に $\boldsymbol{v}$ をそれぞれあてはめることが多い.

147 実質微分 (substantial derivative) あるいは物質微分 (material derivative) とよばれることも多い. 記号よりも, 右辺の演算子の定義に注目せよ. なお, スカラー $\boldsymbol{v}\cdot\nabla$ を成分を用いて書き下すと, $u\partial/\partial x+v\partial/\partial y+w\partial/\partial z$, 添え字表記では $v_j\partial/\partial x_j$ となることを確かめよ [この意味の添え字 j を, 無効添え字 (dummy index) という]. ここに, 速度 $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$ かつ空間座標 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ である.

148 いずれも正しい表現であるが, 初学者は混乱するのがふつうである. 従属変数と独立変数の双方に, ベクトル (vector) 変数とスカラー (scalar) 変数が入り混じるのだから, すぐに理解できる方が不自然である.

149 面積力 (surface force) の例に**圧力**, 体積力 (body force) の例に**重力** (gravitational force) や遠心力 (centrifugal force) がある.

150 この意味で, **面積力 (や応力) は, 連続体力学特有**の概念といえる.

151 Newton 流体 (応力とひずみ速度が線形関係にある流体) に対する運動量保存則の偏微分方程式による表現をさす.

152 連続体力学の数式がわかりにくければ, まず, 質点の力学で体感すべきであろう (**本質は全く同一**). バネマス系の運動方程式は,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=0$$

で与えられる [$x(t)$ はおもりの位置 (**従属 (未知)** 変数), t は時間 (**独立**変数), k はばね定数 (spring constant)]. これは, (i) 運動量の**保存則** $m\ddot{x}=F$, および, (ii) Hooke の法則 (**構成式**) $F=-kx$ からなる. (i) だけでは解けないから, (ii) というモデルを課して, 方程式を閉じたのである. 運動量が保存されないこ

kanagawa♣kz.tsukuba.ac.jp

を眺めると, 応力テンソルが 9 成分 (2 階テンソル), 速度ベクトルが 3 成分 (1 階テンソル: ベクトル), 密度が 1 成分 (0 階テンソル: スカラー) であるから, **未知変数の数は 13 個**である [153]. **方程式の本数は,** (x, y, z) **方向で 3 本**である. **未知変数と方程式の数が一致しないならば, 解くことができない**. 解けないならば, 何も得られない. だからこそ, 方程式を閉じて解を求めるべく, **何らかの仮定をおく**必要があるのである [154].

[Hooke 弾性体と Newton 流体, そしてその類似性] 連続体の運動と応力を具体的に関係づけよう. 応力は連続体を変形させる. 逆にいうと, **変形から応力の形を推測できる**と考えられる.

式 (108) の段階では, 応力の表式は任意である. 応力をどのように与えるのかが, 構成式 (constitutive equation) の考え方である. 本講義では, 最も基礎的かつ重要度の高い, つぎの 2 種類を考えよう:

- Hooke 弾性体 (**応力とひずみが比例関係**にある)[155]: 応力がひずみのみに依存すると仮定, すなわち, $p_{ij} = f_{ij}(e_{kl})$ とみなして [156], 平衡点まわりに Taylor 展開し, **ひずみの 2 次以上の項を無視**する. さらに, **等方性** (isotropy)[157] をも仮定すると, 次の構成式をうる:

$$\boldsymbol{P} = 2\mu\boldsymbol{E} + \lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{I} \tag{113}$$

  ここに, $\boldsymbol{I}$ は単位テンソル (unit tensor)[158], μ と λ は Lamè 定数 (弾性定数) である [159]. Hooke の法則の **3 次元版**に相当するので, 煩雑にみえるかもしれないが, まず, 右辺第一項に注目し, **応力 $\boldsymbol{P}$ とひずみ $\boldsymbol{E}$ の比例**関係を理解してほしい.

- Newton 流体 (**応力とひずみ "速度" が比例**する)[160]: やはり, $p_{ij} = f_{ij}(\dot{e}_{kl})$ とみなして, 同様の計算 [161] を行う:

$$\boldsymbol{P} = 2\mu\dot{\boldsymbol{E}} + \lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{v})\boldsymbol{I} - p\boldsymbol{I} \tag{114}$$

  ここに, μ は第一粘性係数, λ は第二粘性係数 [162] である [163].

ひずみテンソルとひずみ速度テンソルは, ともに, 対称テンソルである [164]:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^T, \quad \dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\boldsymbol{E}}^T, \tag{115}$$

弾性体と流体の構成方程式の類似性は, 式 (113)(114) より明らかであろう. 決定的な違いは, **圧力 p の有無**である. 注意すべきは, **弾性体は応力を変位 $\boldsymbol{u}$ (すなわち, ひずみ $\boldsymbol{E}$) と関係づけるが, 流体は応力を速度 $\boldsymbol{v}$ (すなわち, ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{E}}$) と関係づける**点にある.

[ひずみとひずみ速度] **ひずみは弾性体の静的変形**を記述する一方で, **ひずみ "速度" は弾性体の動的変形や流体の運動**を記述する [165]. **変形の速さ**を知るために, ひずみ速度の概念が重要となる. 風船と鉄を思い浮かべるまでもなく, 気体は, 固体に比べて, 速やかに変形するがゆえに [166], **変形 "率"** が重要となるからである.

とはありえない. 運動量は保存量である. 一方, Hooke の法則が正しいことは保障されない. 経験則である. これは定数係数の 2 階線形常微分方程式である. **微分方程式が線形**であることは, 極めて重要である. なぜならば, **解の重ねあわせ** (superposition) が可能だからである.
[基礎] (a) この常微分方程式の一般解 (general solution) を求めよ. (b) 一般解が 2 個の特 (殊) 解 (particular solution) から構成されること, および, **任意 "定数" を 2 個含む**ことを確認せよ. (c) **一般解と特解の違い**を復習せよ. (d) 適切な**初期条件** (initial condition) を自身で設定して, 初期値問題 (initial value problem) の解を求めよ. (e) **必要な初期条件の個数は 2 個以外にありえない**. これを確認せよ. すなわち, 1 個ならば解けないこと, 3 個ならば条件が過剰となり解が一意に定まらないことなどを考察せよ. (d) **2 階**の微分方程式だから, **2 個**の特解を有すること, および, **2 個**の初期条件が必要である. 以上をまとめよ.

[153] 実は, 等方性を仮定すると, 応力テンソルは対称テンソル (symmetric tensor) であることがわかる. しかしながら, それを考慮しても, 応力テンソルは 6 つの未知成分からなり (確かめよ), それでもなお, 方程式は閉じない.

[154] "仕方なく" 仮定すると捉えても, それは間違いではない. **微分方程式は, 解けなければ, 意味をなさない**からである. どこまでが仮定なしの議論か, ここからは, これこれの仮定をおくといったことは, つねに意識しながら式変形を進めるべきである. 漫然とした式変形をとおして, たとえ正しい解が得られたとしても, それは習得を意味しないし, さらに, 何も役立たない.

[155] 線形弾性体とよぶことがある.

[156] 添え字表記を用いないならば, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{E})$ とかける. しかしながら, 計算の途中で **4 階テンソル (弾性定数: 81 個の成分**からなる) が現れるため, 添え字を用いずに諸演算を行うのは困難である (2 階テンソルまでならば, 添え字に頼らずとも, 実行可能である).

[157] 力学特性が座標系の向き (座標系のとり方) に依存しないことを意味する.

[158] Kronecker のデルタ (delta) 記号に対応する.

[159] 実用上は, Lamè 定数よりも, **剛性率** (rigidity, ずれ弾性率) G, **Young 率** (Young modulus) Y, **Poisson 比** σ, **体積弾性 (率) 係数** (bulk modulus) K がよく用いられる:

$$G \equiv \mu, \quad Y \equiv \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma \equiv \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

[160] 線形粘性流体とよぶ書物もまれにある. なお, これは流体の**運動が線形であることを意味しない**. ひずみ速度の 2 次以上の項を含まないことを意味する.

[161] 圧力 (静水圧: hydrostatic pressure) が含まれる点のみ, 弾性体の場合と異なる.

[162] 慣習にしたがって, 式 (113 と同じ記号を用いたが, むろん意味は異なる.)

[163] 体積弾性係数 K のように, 体積粘性係数 ζ と関係づけられる:

$$\zeta \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

第一粘性係数 μ は, 単に粘性率 [ずり粘性率/粘性係数/粘度: (shear) viscosity] とよぶことが多い. 第二粘性係数 λ のかわりに, 体積粘性係数 (bulk viscosity) ζ を使うことが多い. 体積粘性係数と体積弾性係数の類似性に注目してほしい.

[164] 対称テンソル以外のものを非対称 (asymmetric) テンソルといい, そのうち, 体格成分が対称であるものを反対称テンソル (antisymmetric) という. たとえば, 流体力学の渦度 rot$\boldsymbol{v}$ は反対称テンソルである (確かめよ). テンソル表記

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad \dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ji}$$

のほうがわかりやすいだろう.

[165] 必要があれば (ひずみ速度では捉えきれないほどの高速変形を観察したいならば), ひずみ "加速度" と応力を関係づけることも, ありえるだろう.

[166] **気体は速やかに変形するが, 変形から "回復" するのは, 固体の方が速い**点に注意せよ.

kanagawa♣kz.tsukuba.ac.jp

連続体の**局所的な微小変形は, (i) 伸縮変形, (ii) せん断変形 (iii) 剛体回転の線形和**で表現できる[167]. このうち, (i) と (ii) を記述するために, ひずみテンソル $\boldsymbol{E} = \{e_{ij}\}$ と, ひずみ速度 (strain rate) テンソル $\dot{\boldsymbol{E}} = \{\dot{e_{ij}}\}$ を導入する[168]:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left[\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\right] \tag{116}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\left[\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T\right] \tag{117}$$

ここに, T は転置 (transposed) を意味する[169]. 2 階テンソルを扱う際には, 添え字表記を用いると, 数学操作が簡便になる[170].

[(例 1) Hooke 弾性体] 運動量保存則 (108) の応力 $\boldsymbol{P}$ に, 等方性の Hooke (線形) 弾性体の構成式 (113) を代入すると, 運動方程式として, Navier の方程式[171]

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\mu+\lambda)\mathrm{graddiv}\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{K} \tag{118}$$

をうる[172]. この段階では, 左辺の加速度項は速度 $\boldsymbol{v}$ で, 右辺は変位 $\boldsymbol{u}$ で, それぞれ表されていることに注意すべきである. Lamè 定数は定数であると仮定した[173].

簡単のため, (i) 密度 ρ は一定値 ρ_0 であるとして[174], (ii) **変位は微小**であると仮定し[175], (iii) 外力 (体積力) を無視する. すると, Navier の式は

$$\rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\mathrm{graddiv}\boldsymbol{u} \tag{119}$$

これは, **変位 $\boldsymbol{u}$ のみを未知** (従属) 変数とする, 2 階**線形**偏微分方程式である (確かめよ)[176]. 弾性力学の目的は, 従属変数である変位 $\boldsymbol{u}$ を時間 t と空間座標 $\boldsymbol{x}$ の関数として求めること $[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)]$ にある. 未知変数の個数は $\boldsymbol{u} = (u,v,w)$ の 3 つであり, 方程式の本数は $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ の 3 方向すなわち 3 本である. したがって, **閉じている** (closed set) ことが確認できた.

式 (119) の 1 次元定常問題の一部が, いわゆる材料力学 (strength of materials) に相当する[177]. 連続体力学の一般論から出発すると, 材料力学の弾性力学としての位置付けを見直すことができて, さらに, 流体力学と弾性力学の類似性にも気づくだろう[179].

[平面波: 縦波と横波への分割] 簡単のため, 変位 $\boldsymbol{u} = (u,v,w)$ が 1 次元空間座標 x と時間 t のみに依存する平面波 (plane wave), すなわち, 1 次元波を考える[180].

変位の 3 成分は, どのような方程式にしたがい, どのような波として伝わるのだろうか. まず, **伝播方向への変位 (縦波)** として, x 方向変位 u を考える. このとき, 式 (119) の右辺は全て残り[181],

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_P^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{121}$$

なる 3 次元波動方程式をうる. ここに, 伝播速度 a_P は

$$a_P = \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho_0}} \tag{122}$$

で与えられる. これは, **弾性体中の体積 (密度) 変化**の情報を伝える, **粗密波**の伝播を表し, **P 波** (primary wave) とよばれる縦波 (longotudinal wave) である[182].

---

[167] **伸縮とせん断は非回転の体積変形, 剛体回転は非変形の回転**である. 結果だけ述べたが, 連続体中の任意の点およびその近傍の点における変位の差をとって, 議論を進めると, この結果をうる.

[168] $\nabla\boldsymbol{u}$ はテンソル積である (積の記号を省く場合も, $\nabla\otimes\boldsymbol{u}$ と書く場合もある). ベクトルとベクトルの**内積 (スカラー積; inner/scalar product) はスカラー (0 階テンソル) を生み, 外積 (ベクトル積; outer/vector product) 積はベクトル (1 階テンソル) を生み**, テンソル積 (ダイアド積; dyadic product) はテンソル (2 階テンソル) を生む. 応力テンソル, ひずみテンソル, ひずみ速度テンソルが **9 個の成分**からなることを確かめよ. また, スカラーを用いて書き下してみよ.

[169] ひずみテンソルの定義において, 1/2 を省く場合も多い. それであっても, 応力に表式は変わらない.

[170] どの表記が好ましいという意味ではない. 添え字表記を用いる:

$$p_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\frac{\partial u_j}{\partial x_j}(= 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij})$$

$$p_{ij} = 2\mu\dot{e}_{ij} + \lambda\frac{\partial v_j}{\partial x_j} - p\delta_{ij}(= 2\mu\dot{e}_{ij} + \lambda\dot{e}_{kk}\delta_{ij} - p\delta_{ij})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

[171] この名称はそこまで浸透していないようにも見受けられる. 名称を知っていることは重要ではなく, **応力がひずみに比例する弾性体の運動量保存則**であることを理解していることの方が, 100 倍重要である.

[172] 右辺第 2 項の発散の勾配は, $\mathrm{graddiv}\boldsymbol{u} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$ あるいは $\partial^2 u_j/(\partial x_i\partial x_j)$ であり, 右辺第 1 項の Laplacian は勾配の発散であって, $\Delta = \nabla^2 = \mathrm{divgrad}$ あるいは $\partial^2/\partial x_j^2$ である. なお, 偏微分の順序交換は, u_i が連続関数であることを根拠として, 保障される.

[173] Lamè 定数は, 一般には定数ではないので, 厳密には, 空間微分の中に入れておくべきである.

[174] 本当は, 密度の変化を考えるのだが (質量保存則に頼る), 本講義では, 簡単のため密度を定数とみなす. 違和感を感じる者は, 連続体力学や弾性力学の成書で補完されたい.

[175] 微小変形理論に値するので, 有限変形 (大変形) は扱えない. なお, 変位 (displacement) と変形 (deformation) の物理的意味の差異に注意せよ.

[176] なぜ, **2 階**方程式になったのかを考えよ. 速度 $\boldsymbol{v}$ を変位 $\boldsymbol{u}$ で書き換えたのである.

[177] これは, 定常問題すなわち静力学 (statics) を意味するから, 左辺 (加速度項) は消える. さらに, 1 次元問題だから, 独立変数は 1 次元空間座標 x のみとなり, 右辺第 1 項の Laplacian, および, 第 2 項の発散の勾配[178] は, ともに $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ となる (確かめよ). 従属変数は, 変位 $\boldsymbol{u} = (u,v,w)$ の x 方向成分 u のみであり, u は x の 1 変数関数として表現される: $u(x)$. 以上より, 式 (119) は常微分方程式となる (確かめよ):

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \tag{120}$$

ここに, f は外力 (体積力) であり, 面積力ではない (弾性定数も f に含めた). これは, 非同次 (非斉次) の定数係数 2 階線形常微分方程式である (履修済). **[基礎]** 微分方程式の分類を, つぎの観点から確認せよ. 一般解を求める方法も検討せよ: **線形**と非線形, **常微分と偏微分**, **同次**と非同次, **定数係数と変数係数**, **階数**.

[179] 連続体力学の教科書においては, このように, Newton の運動の第二法則から出発して, Hooke 弾性体を仮定して, Navier の運動方程式を導き, さまざまな簡単化のもとで項を消去してゆく. その結果, 伸縮 (elongation–contraction), ねじり (torsion), 曲げ (bending), 座屈 (buckling) などの諸問題を解くことができる.

[180] y 方向変位 v と z 方向変位 w は存在するが, y 方向と z 方向への変化は無視できる ($\partial/\partial y \neq 0$ かつ $\partial/\partial z \neq 0$).

[181] Laplacian も, 発散の勾配も, 1 次元ならば, $\partial^2/\partial x^2$ となる (確かめよ. ベクトル解析を復習せよ).

[182] 地震波 (seismic wave) でいうところの, 初期微弱信号である.

kanagawa♣kz.tsukuba.ac.jp

つぎに, **伝播方向と垂直な方向への変位 (横波)** として, y 方向変位 v, および, z 方向変位 w を考える．式 (119) の右辺第 1 項は生き残るが, 第 2 項は消滅し [183],

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = a_S^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \tag{123}$$

をうる．伝播速度はつぎのとおりである:

$$a_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \tag{124}$$

これは, **せん断変形**の情報を伝えるせん断波 (ねじり波) の伝播を表し, **S 波** (secondary wave) とよばれる横波 (transverse wave) である．

弾性力学の基礎方程式を少し考察するだけで, 弾性波に関して, つぎの事実がわかった:

1. 弾性定数は正値ゆえ **P 波は S 波より速く**伝わる:

$$a_P > a_S \tag{125}$$

伝播速度の比率は, 実は, Poisson 比 σ だけを用いて書き表せる (導いてみよ):

$$\frac{a_P}{a_S} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}} \tag{126}$$

したがって, P 波と S 波の伝播速度の比率は, 密度や Young 率などには依存しない．ふつう, $a_P = 5 \sim 8$ km/sec, $a_S = 4 \sim 7$ km/sec である．

2. P 波は**密度変動**を与える縦波である [184].

3. S 波は**せん断 (回転)** を与える横波 [185] である．

[波動方程式の一般解] 式 (121) は, 2 階線形偏微分方程式であって, 一般解はつぎのように与えられる [186]:

$$\Phi(x,t) = f(x - a_P t) + g(x + a_P t) \tag{127}$$

f と g は任意変数 (関数) であり [187], 波の情報は速度 $a_P = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で伝わる．f は前進波 (right-running wave), g は後退波 (left-running wave) であって, x 軸正方向, 負方向に, それぞれ, **形を変えずに**伝播する [188].

[3 次元弾性波: 発散波と回転波] 無限媒質中の弾性波を考える．まず, 変位ベクトルを

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_P + \boldsymbol{u}_S = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{128}$$

と線形和に分割する [189].

前者の縦波は,

$$\varPhi \equiv \mathrm{div}\boldsymbol{u}_P \neq 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{u}_P = \boldsymbol{0} \tag{129}$$

を満たし (確かめよ), **変位の発散 (体積変化) $\varPhi$ に支配**される．回転がゼロで, 発散が非ゼロなのだから, 伝播方向に平行に伝わる縦波 (発散波) であり, せん断成分は存在しないことを教えてくれる．**平面波を仮定することなく**, 式 (108) に分解 (128) を代入し, 2 つの成分を独立に考える．まず, 発散波としての縦波を知るべく, 両辺の発散をとる [190]:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathrm{div}\boldsymbol{u}_P}{\partial t} = \mu\Delta\mathrm{div}\boldsymbol{u}_P + (\lambda+\mu)\Delta\mathrm{div}\boldsymbol{u}_P \tag{130}$$

波の伝播速度を a_P とおいて, 少しだけ書き換えると, $\varPhi \equiv \mathrm{div}\boldsymbol{u}_P$ に対する **3 次元**波動方程式をうる:

$$\frac{\partial \varPhi}{\partial t} = a_P \Delta \varPhi \tag{131}$$

後者の横波は,

$$\varPsi \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{u}_S \neq \boldsymbol{0}, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{u}_S = 0 \tag{132}$$

を満たし (確かめよ), **回転 $\varPsi$ に支配**される．これは, **非発散の回転波**であって, 伝播方向と垂直に伝わる横波 (回転波あるいはせん断波) として伝わる． 回転波としての横波を知りたいのだから, 回転をとると [191], $\varPsi \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{u}_S$ も, 3 次元波動方程式を満たす:

$$\frac{\partial \varPsi}{\partial t} = a_S \Delta \varPsi \tag{133}$$

これは弾性体中の横波を表し, S 波に値する．体積変化は有しない [192].

---

[183] x 方向依存性しか有しないのだから, 第 1 項の Laplacian は, 方向によらず $\partial^2/\partial x^2$ である．第 2 項の発散も, 方向によらず $\partial u/\partial x$ であるが, この**勾配がゼロになる**のである (成分を書き下して, 確かめよ)

[184] 地震波でいうならば, 震源からの微弱振動を人に速やかに伝える．

[185] 地震波でいうならば, P 波が到達後に, 建物のねじりを誘起する．せん断波 (torsional wave) とよぶこともある．

[186] d'Alembert の解とよばれる．なお, 2 階の定数係数線形偏微分方程式の**一般解**は, **2 つ**の任意**変数**を含む．[ハイレベル] 式 (121) と解 (127) が同値すなわち必要十分条件であることを確かめよ: $\xi = x - a_S t$ および $\eta = x + a_S t$ とおくならば, これは, (x,t) から (ξ,η) への変数変換を意味する．波動方程式を (ξ,η) で表現すると, すみやかに, 一般解 (127) をうる．変数変換には, 合成関数 (composite function) の微分法 (連鎖率: chain rule) を用いるのが正攻法であるが, 変数変換の Jacobian を用いると簡便である．

[187] 2 階方程式であるがゆえに, 2 個の任意性を含む．f と g それぞれを部分波 (partial wave) という．1 階の波動方程式を考えるならば, 片方しか現れない．

[188] 形を変えずに伝播するのは, 波動方程式の線形性に起因する (ハイレベル)．特性線 (characteristics) を学べば理解できる．

[189] これを, Helmholtz 分解 (**スカラーポテンシャル φ** と**ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$** の線形和で表現する) とよぶ (分解定理)．$\boldsymbol{u}_P$ は非回転 (irrotational) 速度場で発散波を招き, $\boldsymbol{u}_S$ は非発散 (solenoidal) 速度場を招く (確かめよ).

[190] ベクトル解析で学んだように, 簡単のため, $\mathrm{divgrad} \equiv \Delta$ とおいた．さらに, 密度 ρ_0 が定数であるがゆえに, 空間微分 (回転) に依存しないこと, Laplacian Δ と回転の演算の順序交換が可能であることを用いた．

[191] ベクトル解析で学んだように, $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = \boldsymbol{0}$ を使った．なお, つぎの公式を理解していない者は, 証明しておくことが望ましい: $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$.

[192] 流体力学における渦運動 (渦度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ が招く回転) と対応する．

kanagawa♣kz.tsukuba.ac.jp

[(例 2) Newton 流体 (理想気体中の音の伝播)] 運動量保存則 (108) の応力 $\boldsymbol{P}$ に, Newton 流体の構成式 (114) を代入すると, 運動方程式として, **Navier–Stokes 方程式**が導かれる:

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\mu\Delta\boldsymbol{v}+(\mu+\lambda)\mathrm{graddiv}\boldsymbol{v}+\rho\boldsymbol{K}-\mathrm{grad}p \tag{134}$$

弾性体の運動方程式との差異は, (i) 未知変数が変位ではなく速度である点, (ii) **圧力を未知変数**に含む点[193], (iii) 物質定数が異なる点, だけであって, 極めて**よく似ている**. 繰り返すが, 物理的意味は, Newton の運動の第二法則に他ならない. 右辺の煩雑な形に目を奪われてはならない. 単に, **力を面積力と体積力に分割した帰結**なのである.

圧縮性を考慮した非粘性流体の基礎方程式系を考える. 簡単のため, 外力は無視できて, かつ, 1 次元伝播[194]を考えるので, (i) 連続の式[195]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}=0 \tag{135}$$

(ii) Euler の運動方程式[196]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{136}$$

これらが流体力学の基礎方程式系である. ここに, t は時間, x は 1 次元空間座標 (波の伝播方向) であって, これらの独立変数を定めると, 従属変数 (未知変数) として, 速度 u, 圧力 p, 密度 ρ の 3 変数が定まる[197].

さて, **方程式の数が 2 本であるのに対して, 未知変数の数が 3 個**である[198]. したがって, 微分方程式は閉じていない[199]. われわれは, 方程式を解いて解を求めねばならないから, 何らかの関係式を課す必要がある.

そこで, 熱力学の状態方程式を, 構成式として持ち込む[200]. **系が理想気体**であると仮定して, **エントロピーが一定**[201] であるならば, (iii) Poisson の状態方程式

$$p=A\rho^{\kappa} \tag{137}$$

が課される[202]. 式 (135)–(137) は, 方程式の数が 3 本で, 未知変数が u, p, ρ の 3 つだから, 閉じている.

微小擾乱 (infinitesimal disturbance) を考えて, 方程式を**線形化** (linearization) すると, 波動方程式

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \tag{138}$$

が導かれる. これを丁寧に導くことと, **この先の議論が重要**なのだが, 紙数の都合上, 詳細は成書にゆずる.

[11 月 7 日実施の小テスト問題集][203]

1. 式 (104)–(107) を導け.

2. (前回の持ちこし) (i) 10 月 10 日出題の演習問題 5 で導いた

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T=T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T+V \tag{139}$$

から出発して,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T=-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p+V \tag{140}$$

を導け. さらに, これを用いて, 理想気体のエンタルピーが温度のみに依存する 1 変数関数であることを証明せよ [式 (78) に頼ることなく証明せよ]. (ii) 問題 (i) とは逆に, **式 (80) を出発点として, 式 (139)(140) に頼ることなく**, 理想気体のエンタルピーは温度のみに依存することを証明せよ.

3. (前回の持ちこし) 理想気体の冷却条件および逆転温度を与える式を導け. それぞれ, 式 (87) と (88) を利用せよ.

4. 空気を理想気体とみなす. 温度が 35°C (真夏) と −15°C (真冬) を比較して, 音速の値の差異を計算せよ. 空気の比熱比を 1.4, 分子量を 29 g/mol, 一般気体定数を 8.31 J/(mol · K) とする[204].

---

193 重要な点である. このため, 運動方程式だけでは微分方程式が閉じない. **未知変数の数が 4 個, 方程式の数が 3 本**だからである.

194 **音波 (sound/sound wave) は縦波**であるから, 伝播方向 (propagation direction) を x 軸とすると, 波面 (wavefront) は x 軸に垂直で, **振動方向は x 軸に平行**である. 1 次元問題であるから, 速度の回転から導かれる渦度 (vorticity) はゼロとなり (確かめよ), 渦 (vortex) を伴わない渦なし流れ (irrotational flow) である.

195 質量保存則の偏微分方程式による表現である. 連続体力学ならば, いつでも成立する. 弾性力学でも使える. もっというと, 力学において, (たとえ明示されなくとも) 質量保存則が破られることはありえない. **なぜ, 弾性体の例では, 連続の式を考慮せずに調べることが可能だったのか. なぜ, 流体では, これを考慮するのか. 方程式と未知変数の数の過不足を確認せよ.**

196 非粘性流体に対する運動量保存則の偏微分方程式による表現を指す.

197 **熱力学の状態変数の圧力と, 流体力学の圧力は, その定義が異なる** (振り返る). 前者を熱力学的な圧力というならば, 後者は 2 階の等方性テンソル (垂直応力) を根拠とする力学的な圧力である. 圧縮性流体力学では, これらを同一視する. 実は, 両者の一致を証明することができるのだが, そのためには, エネルギー方程式 (エネルギー保存則の偏微分方程式による表現) に深く踏み込む必要がある.

198 このようなことは, 試験の問題文などで要求されているか否かにかかわらず, **常に確かめる**ことを習慣づけるべきである. **閉じていない方程式を調べるほどに無駄な労力はない**からである.

199 これは, 圧縮性流れ特有の問題である. 非圧縮性流れであれば, この時点で必ず閉じる.

200 構成式に対して, 保存則は, 上述の式 (135)(136) である.

201 一様エントロピー (homentropic) 流れとよぶ (書物によって定義が異なる). 等エントロピー (isentropic) 流れあるいは断熱流れという術語も存在するが, 本質的なのは, **エントロピーが時間的にも空間的にも不変 (定数)** とする仮定にある.

202 このように, 圧力が密度だけによって定まる流れを, 順圧流れ (barotropic flow) とよぶ. 順圧流れには, 断熱変化のほかにも, 等温変化 (圧力と密度が比例関係) や, 密度が定数である非圧縮性流れなどが挙げられる (確かめよ).

203 諸記号の定義は, 講義資料で述べたものと同じである. 回答にあたっては, 講義資料に掲載の全ての数式と, 偏微分係数に関する諸公式を, 証明せずに既知のものとして使ってよい.

204 温度を絶対温度 (absolute temperature) に変換して代入せよ.

kanagawa♣kz.tsukuba.ac.jp