応用数学 小テスト [2][†1]

実施: 2017 月 5 月 1 日 (月) 8:40–9:05 (適宜延長)

(注 1) 前回は, 根拠不足, 乱雑な記述, イージーミスではない致命的な計算ミスが目立った. **第三者に一通りに伝わる**ように, 日本語での説明中に数式を挿入する形で, 論理的に解答のこと. 途中計算や式変形の根拠を省略しないこと.

(注 2) おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと. 問題文中に書かれていない記号を用いる場合は, 定義を略さずに述べること.

(注 3) 答案用紙の不足時や, 証明不要で用いてよい公式の線引きが不明な場合などは, 挙手のこと.

(注 4) 解答時に, 式を引用する際には, 式番号をつけるとよい. その際に, 問題文中の式番号 (1)(2) と混同しないこと.

問 1. [80 点] 実変数 x に依存する実数値関数 $f(x)$ を考える. 全ての x に対して, $f(x)$ の実 Fourier 級数が $f(x)$ に収束する場合, すなわち,

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

なる等式が成立する場合を考える. ここに, c は実定数, a_n と b_n はともに自然数 n についての実数列 (定数列) である. 次式を導け.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

(注 1) n に関する総和記号と x に関する積分記号の順序交換が可能であるとする.

(注 2) 三角関数の積の積分に関する公式 (直交関係式) を証明せずに用いてよい. ただし, **どの式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと.

問 2. 以下の設問に答えよ.

1) [5 点, **答えのみでよい (理由など不要)**]
複素指数関数 e^{ix} を実三角関数で表す Euler の公式を書け (x は実変数, i は虚数単位).

2) [15 点] 実正弦関数 $\sin x$ を複素指数関数を用いて表現する式を導け.

問 3. [任意] 満点取得の場合に, 氏名を manaba に掲載「されたくない」場合は「×」と書いてください. 早く終わった場合は, 講義の感想や疑問点を書き, 裏面を読んでください.

以上

[†1] 100 点満点で採点し, 前半の総得点中 6 点に換算する.

応用数学第3回 (5/1/2017) レジュメ[†2]

- 前回まで:

  1. 実 Fourier 級数の伏線: 三角関数の直交関係式, 偶関数と奇関数の定義, 周期関数.
  2. 周期 2π の**周期関数** $f(x)$ を, あらゆる三角関数の重ね合わせ, すなわち,
  $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
  で表現するという, 画期的な**無限級数展開**である Fourier 級数を導入した.
  3. **Fourier 係数 (実数数列)** a_n **と** b_n **の重要性**を述べ, これらを $f(x)$ を用いた定積分として与える公式を導いた.
  4. 問題 5 の解説: a_0 を別途計算する必要性. $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$ なる基礎関係. $n = 2k-1$ への置き換え. **Fourier 係数の減少を確認**.
  5. 余談レベルで, Taylor 級数と Fourier 級数の比較に触れた.
  6. 複素 Fourier 級数への拡張の伏線: Euler の公式を天下りに導入した.

- 今回—— 小テスト問 2 を解説しながら §2.1.3 (前回配布) までを復習. §2.1.4 は天下りに受け入れ, 口頭説明に留め, 板書はしない. §2.1.5–2.1.6 を簡単に解説. **重要極まりない §2.2 を詳細に解説 (複素 Fourier 級数と係数)**. 今回配布の §2.3 (複素 Fourier 級数が実 Fourier 級数に戻るのか?), および, 時間があれば, 演習問題を 1 題程度解説[†3].

- 次回小テスト (5 月 10 日 (水))—— **(2.34)(2.35) の導出を出題 (それ以外出題しない)**[†4]. したがって, pp. 41–44 の計算を, 確実にフォローのこと.

- 次回 (5/10) および次回以降 (5/17, 24, 31) のスケジュール:

  – 本日, §2 のやり残しが生じれば解説するが, 全問題を解くことはしない.
  – §3 (Fourier 級数の性質) は省略 (講義資料は manaba に掲載済)[†5].
  – 早期に, 最重要といえる Fourier 変換 (§4) に入る.
  – Laplace 変換 (§5) は, 5/24, 5/31(前半最終回) で, 1 回から 1.5 回程度を費やして, 簡単に触れるに留める.
  – 6 月 7 日 (水) 8:40–11:25 中間試験 (配点 50 点 (前半総得点 100 点満点中))

- 連絡事項—— アンケートの未提出者は manaba から提出のこと (加点の可能性がある).

[†2] あくまでも要点のみをまとめたものであって, 講義内で事細かに解説は行わない. 原則, 講義資料に沿って板書する.

[†3] §2 には, 複数の問題が載っているが, 時間の制約上, 全てを解くことはしない. 自主学習としてほしい.

[†4] GW だからである. 次々回以降は, 親切には指示しない可能性が高い. ただし, 本日の進度によっては進めない可能性もあるので, 範囲変更の連絡 (口頭, 板書, manaba のいずれかもしくは複数) を見落とさないこと.

[†5] 難易度, 進度, 重要性などを鑑みて, 一旦省略するが, 講義時間に余裕が生まれた場合は, 最終回などで解説する可能性がある. 小テストからも出題範囲外とする. 単位が欲しいだけの者は, §3 の学習は省略して, その分, 試験範囲の学習への集中をすすめる. 深く学びたい者, Fourier 級数がどのような場面で使えるのかに踏み込みたい者は, §3 の独学を強くすすめる.