

応用数学 小テスト [6]^{†1}

実施: 2017 年 5 月 31 日 (水) 8:40–9:05 (適宜延長)

注意事項 (よく読んでから解答のこと)

1. 日本語での説明中に数式を挿入する形で, 論理的に解答のこと. 途中計算や式変形の根拠を省略しないこと.
2. 根拠不足, 乱雑な記述, イージーミスではない致命的な計算ミスからは大幅に減点する.
3. おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと.
4. 問題文中に書かれていない記号を用いる場合は, 定義 (意味) を略さずに述べること. ただし, $\pi, e, i, \infty, d, \partial, \int, \sin, \cos, \tan, \arctan, \ln, \mathcal{F}, \mathcal{L}$ などといった, 市民権を得ている数学記号の説明は不要である.
5. 既知として用いてよい公式や定理の線引きがわからない場合は挙手のこと.

問 1. [10 点, 答えのみ書け]

実変数 $t \geq 0$ に対して定義される実数値関数 $f(t)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ の定義式を書け. 問題文中に与えられていない記号を用いる場合には, 簡潔な説明を添えよ.

問 2. [40 点] 実変数 t に依存するつぎの実数値関数を考える.

$$f(t) = 1 \quad (\text{A})$$

Laplace 変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ を計算せよ. また, $\mathcal{L}[f(t)]$ が収束するための条件を求めよ.

問 3. 2次元直交座標 (x, y) から平面極座標 (r, θ) への変数変換を考える.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (\text{B})$$

1) [20 点] r と θ をそれぞれ x と y だけを用いて表せ ($\theta = \dots$ の形に解け).

2) [30 点] 変数変換の Jacobian $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ が r となることを, 計算によって示せ.

問 4. [50 点 (ボーナス問題)] 次式を示せ (x は実変数).

$$\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{C})$$

注 1) 微分係数 (導関数) の定義から出発しなくてもよい.

注 2) $\arctan x$ を \tan^{-1} と書いてもよい.

注 3) 逆関数の導関数. 正接関数の導関数. 逆三角関数の定義. 定義に忠実に従う.

問 5. [記入任意] 150 点あるいは 100 点取得の場合に, 氏名を manaba に掲載「されたくない」場合は「×」と書いてください. 講義や小テストの感想や疑問点を書いてください.

以上

^{†1} 150 点満点で採点し, 前半の総得点中 12 点に換算する. すなわち, 4 点分はボーナス点であって, 前半総得点が 100 点を超える者が出る可能性がある. 4 点分のボーナス点が取れなかったからといって, 不利にはならない.