応用数学 小テスト [3][†1]

実施: 2017 月 5 月 10 日 (水) 8:40–9:10 (適宜延長)

(注意) Euler の公式, 偶関数と奇関数の定義, 三角関数の直交関係式などの基礎事項は, 証明せずに用いてよい. 証明が必要か否かの線引きが不明な場合には, 挙手し質問のこと.

問 1. 実変数 x に依存する実数値関数 $f(x)$ が, 実 Fourier 級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

に展開できて, 全ての x において $f(x)$ に収束する場合を考える. このとき, 各係数は,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,...) \tag{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,...) \tag{4}$$

と表される. ここに, a_n と b_n はともに自然数 n についての実数列 (実 Fourier 係数) である. いま, (1) を

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx} \tag{5}$$

なる複素 Fourier 級数へと書き換えたい. ここに, c_n は複素 Fourier 係数 (複素数列) である. 以下の順序にしたがって, 書き換えを遂行する.

1) [10 点] 次式をそれぞれ示せ.

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\quad \sin nx=\frac{i(e^{-inx}-e^{inx})}{2} \tag{6}$$

2) [60 点] 式 (1) から出発して式 (5) までを導け.

3) [10 点] c_n を定義せよ. すなわち, c_n の実部と虚部を, a_n と b_n を用いて表せ.
(注意) 本設問 3) の解答は前設問 2) に含めても構わない.

4) [20 点] 次式を導け.

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x\quad(n=0,\pm1,\pm2,...) \tag{7}$$

問 2. [任意] 満点取得の場合に, 氏名を manaba に掲載「されたくない」場合は「×」と書いてください. 早く終わった場合は, 講義の感想や疑問点を書いてください.

以上

[†1] 100 点満点で採点し, 前半の総得点中 8 点に換算する.