応用数学中間試験 (エシス—環境 & エネ, H29 春 ABC, 3 単位, 金川) 2017 年 6 月 7 日 8:40–11:25

注 意 事 項

注 1) 不正行為には学群学則で定める厳罰が課される.

注 2) 鉛筆 (シャープペンシルおよび替え芯), 消しゴム, 時計, ペットボトル飲料 1 本 (包装不可), 無地ハンカチもしくはハンドタオル 1 枚, 無地下敷きのみ机上においてよい. 電卓, 筆箱, 定規は使用不可. 携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまう. 鞄のチャックをしめて床におく.

注 3) 12:10 まで延長解答可. 10:30 より提出退室を認める. 10:30 以降はトイレなどの途中退室不可.

注 4) 答案用紙 4 枚の全てに記名. 足りなければ挙手のこと. 使わなかった答案用紙も提出のこと. 答案用紙右肩に **1/4, 2/4,** $\cdots$ のように計何枚中何枚目かを明記のこと.

注 5) 考え方の筋道, 式変形の根拠, 途中計算を, 論理的かつ正確に略さず記述のこと. 最後の答えだけが正しくとも得点にはなりえない. 日本語での説明中に数式を挿入する形で解答のこと. 問題文中に与えられていない記号を用いる際には定義のこと. 記号の誤用からは減点する.

注 6) ある問題の解答において, 導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 導出や証明を繰り返すことなく自由に用いてよい. 独立採点とするので, 問題文中の数式も用いてよいが, 引用の際は, 答案の式番号と問題文中の式番号を区別のこと.

注 7) 以下の公式や定理を証明せずに用いてよい. ただし, どの公式をどこでどのように用いたのかを明記のこと. これ以外の公式や定理を用いるのならば証明を略さないこと.

(a) 三角関数の直交関係式, (b) 偶関数や奇関数の積に成立する関係, (c) Euler の公式, (d) Laplace 変換の線形性, (e) 部分積分法など高校数学で既習の公式 (境界線が不明な場合は挙手のこと).

1. [計 40 点] 実変数 x 依存の実数値関数 $f(x)$ の Fourier 級数が, 全ての x に対して $f(x)$ に収束する. $f(x)$ をつぎの 4 通りに分類する.

(i) $f(x)$ が周期 2π の周期関数である場合:

1) [8 点] 実 Fourier 係数 a_0, a_n, b_n のそれぞれを $f(x)$ の定積分から与える公式を導け. ここに, n は自然数である. (注意) $f(x)$ は絶対可積分かつ項別積分可能である.

2) [8 点] $f(x)$ の実 Fourier 級数を, 複素 Fourier 級数の形に書き換えると同時に, 複素 Fourier 係数 c_n を, 実 Fourier 係数を用いて定義せよ. さらに, c_n を $f(x)$ の定積分から求める公式を導け.

(ii) $f(x)$ が周期 $2L$ の周期関数である場合 (L は正の実定数):

3) [4 点] $f(x)$ の複素 Fourier 級数の総和記号による表式, および, 複素 Fourier 係数 c_n を $f(x)$ の定積分から与える公式をそれぞれ導け.

(iii) $f(x)$ が非周期関数である場合:

4) [12 点] (ii) の結果を発展させて, Fourier 変換 $\mathcal{F}[f(x)](k) = F(k)$, および, 逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}[F(k)](x) = f(x)$ を定積分で表現する式をそれぞれ導け. ここに, $F(k)$ は実変数 k 依存の複素数値関数である. (重要) 非周期関数を数式で表現かつ議論せよ.

(iv) $f(t)$ が実変数 $t \geq 0$ で定義される場合 (慣例に倣い独立変数を x から t に変更した):

5) [8 点] Fourier 変換の定義に即して, Laplace 変換 $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ の定義式を導け. さらに, 逆 Laplace 変換 $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t)$ を複素積分の形で与える公式を導き, 積分経路を複素数平面に図示せよ. ここに, $F(s)$ は複素関数である (s は複素変数).

2. [18 点] 次式を示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{A}$$

さらに, (A) を利用して, 次式も示せ.

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right](k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \tag{B}$$

ここに, x と k はともに実変数である.

(注意) 変数変換やそれに伴う積分範囲の変更の根拠を詳述せよ. 極限 $x \to \infty$ および $x \to -\infty$ におけるふるまいも詳述せよ.

3. [14 点] 実変数 $t\,(\geq 0)$ 依存の実数値関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対して成立する次式を示せ.

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s) \tag{C}$$

ここに, s は複素変数であり, $*$ は Laplace 変換に関する合成積 (たたみこみ) を意味する.

(ヒント) Jacobian を用いることが望ましい.

4. [計 28 点] 固有角振動数 ω のバネマス系の共振現象は

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 f(t) = A \sin \omega t \quad (t \geq 0) \tag{D}$$

によって記述される. 平衡点からの変位 $f(t)$ を与える解は無数に存在するが, ここでは,

$$f(0) = X, \quad f'(0) = V \tag{E}$$

を満たすものを求めたい. ここに, $f(t)$ は実変数 t に依存する実数値関数, A, X, V, ω はいずれも実定数, 記号 $'$ は t に関する微分演算を意味する. 次式を既知として用いてよい.

$$\mathcal{L}[\cos \omega t](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[\sin \omega t](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{F}$$

1) [3 点 (完答), **答えのみ書け**] 問題「(D)(E) を数学的に説明せよ」に対して, 金川君が

1 階非線形定数係数斉次 (同次) 偏微分方程式の初期値境界値問題

と誤答した. 下線部に潜む金川君の誤りの全てを正せ (**完答採点ゆえに注意深く答えよ**).

2) [7 点] 導関数 $\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}t^2$ の Laplace 変換を, 複素変数 s, $\mathcal{L}[f(t)](s)$, 式 (E) のみを用いて表す式を導け. また, その式が成立するための条件を, 理由も含めて述べよ.

3) [15 点] Laplace 変換を用いて, 式 (D)(E) を満たす解を導き, その解が $t \to \infty$ において発散すること (共振) を示せ.

(注意とヒント) (i) Laplace 変換以外の解法は不可. (ii) 定積分計算は最後まで実行せよ. 積分記号を含む形は不可. (iii) 計 4 項からなる形を得たならば, 正解であろう.

4) [3 点] 求めた解が, 式 (E) を満たしていることを, 計算によって示せ.

以上