応用数学 (前半) 講義資料

担当教員: 金川哲也

3F305 教員室, 内線 5254

kanagawa♣kz.tsukuba.ac.jp

1. 「応用数学」とは工学システム学類の造語であって,「物理数学」や「工業数学」などという書物も多い[†1][†2]. ここでの応用[†3]とは, 1 年次よりも具体的で, 物理そしてその先にある**工学に直結する (応用される) 数学**[†4]を意味する.

2. シラバスを眺めると,「**"波動"**方程式」や「**"熱伝導"**方程式」[†5]という名前に気づく. 本科目で, ようやく, **物理現象が方程式の名前に現れる**[†6]. また, Fourier 変換とは, データの解析において欠かせない道具である[†7].

3. 本科目を基礎にして, 2 年次以降の力学や工学の講義が展開される[†8]. したがって, 選択科目ではあるが, **履修および習得を必須**と考えるべきである[†9][†10].

[†1] たとえば複素関数や解析学 III を「応用数学」と名付ける科目の範囲に含める大学もある.

[†2] 工学システム学類とは異なり, 数学類では,「応用数学」とは, 純粋数学の対義語として, 確固たる術語として用いられる. 数学者の研究分野にも,「応用数学 (純粋数学を自然科学や社会科学に応用する分野」がある.

[†3] 本科目は, **数学の「応用問題」を解くものではない**. 問題集の「基礎問題」と「応用問題」という意味合いと混同してはならない. そもそも,「基礎」が簡単だとか,「応用」が難しいとは限らない. ここでの「応用」とは, 具体的, すなわち, 現実の現象や工学に近い意味である. 反面,「基礎」とは, 抽象的, すなわち, 実際の応用までは距離があるが, 普遍的な真理の探究にある, と解釈するとよい. 基礎が難しいこともあるし, 応用が簡単なこともある.

[†4] 本科目は, 解析学 I, II, III の延長線上に位置づけられる. 1 年次の数学を, 文句なしに楽しめたと回答できる学生よりも, (一部の数学好きな学生を除き) 少なからず苦しんだ学生の方が多いと推測される. このような感情は, 工学を志して入学した学生なら普通の感情と考えるが, 1 年次で学んだ数学は, 本科目を含め全科目の基礎であるから, これを避けて通ることはできない.

[†5] これらは, **偏微分方程式** (partial differential equation) といい, 偏導関数すなわち多変数関数の微分を含む方程式である (解析学 III で学んだ常微分方程式よりも発展的かつ応用に近い). その中でも, 波動方程式や熱伝導方程式は, 最も基本的かつ, 最も簡単に解ける方程式に属する.「応用数学」の講義 (特に後半) のゴールも, これらを解けることにある.

[†6] これらは, **物理からの要請で数学が確立した方程式**に属する. すなわち, 数学を物理に応用する通例とは逆であって, われわれが学ぶ必然性も理解できるだろう.

[†7] 微分方程式が解けない技術者や大学院生がまれにいるが, Fourier 変換できない者はいない. この意味で, 必須のスキルである.

[†8] たとえば, システム制御工学, 振動工学, 伝熱工学, 流体力学などが挙げられるが, これらは一例に過ぎないし, 本学類のカリキュラムに限らず研究などでも必須の道具となる.

[†9] 3 年次の本講義時間帯は専門実験 (必修) と重複しているので, 4 年次以降に再履修する他ない.

[†10] **数学関連の講義は 2 年春で終わり**である (応用数学と並行して履修中の確率統計と複素関数を

4. 前半 (4 月 19 日初回から **6 月 6 日中間試験**までの計 8 回) を金川が, 後半 (中間試験後から期末試験まで) を京藤敏達先生が, それぞれ分担担当する. 前半は教科書の 2 章まで [Fourier (フーリエ) 級数, Fourier 変換, Laplace (ラプラス) 変換] を [†11], 後半は 3 章 (偏微分方程式) をそれぞれ講述する.

5. 前半と後半を, それぞれ 100 点満点で評価する. 計 200 点満点中 **120 点 (6 割) 以上の者が単位取得可能 (シラバス記載)** である. 以下では, 前半の講義に対して, 評価方針と講義内容を述べる.

6. 前半の成績評価は以下の 100 点満点である:

   (a) アンケート: 5 点 [manaba で要回答, **4/28 (木) 締切**]

   (b) レポート: 5 点 $\times$ 3 回 $=$ 15 点

   - 4/19 出題 (4/25 締切), 4/26 出題 (5/2 締切), 5/10 出題 (5/16 締切)[†12]
   - 講義の復習 [†13], および, 本講義の前提事項 (解析学) の復習を課す.
   - 提出方法や採点基準: 本日配布する別途配布資料を参照

   (c) 試験: 80 点

   1) 5 月 10 日 (12:15–12:45)[†14] 小テスト (Fourier 級数): 10 点
   2) 5 月 24 日 (12:15–13:30)[†15] 中テスト (Fourier 級数と変換): 25 点
   3) 6 月 6 日 (12:15–15:00) 中間試験 (全範囲): 45 点

   - **持ち込み不可**, 相談等不可
   - **冒頭に実施 (12:15 に問題配布) するので, 遅刻しないこと** [†16].

含め). したがって, 2 年秋以降に学ぶ工学に活かすためにも, 数学が嫌いあるいは不得手な学生も努力してほしい.

†11 たとえば Taylor のカタカナ表記が, 書物によって “テイラー” と “テーラー” のように異なることを避ける意味で, 本資料では数学者の名前を英字で記すが (他の理由もある), もちろんカタカナでもよい.

†12 次回の講義の前日を締切とするが, **火曜講義日の 5 月 2 日 (月)** に限り講義当日 (5/2) を締切とする (土日を挟むため).

†13 「復習」とは最低限以下の事項に答えられるかを指す: **定義を理解しているか. 定義から出発して公式を導けるか. 定理を証明できるか. 公式や定理を適切に運用できるか. 数学的役割と物理的意味を理解しているか.**

†14 これは厳密な時間設定ではない. 解答状況に応じて, 適宜, 解答時間を延長するので, 素早く解ける必要もないが, **勉強して来なかった者がその場でいくら考えても正答できない**.

†15 5/10, 5/24 の両日は, テストで終わりではなく, テストの後に講義を行う.

†16 [注意] 本試験に対する追試験は原則行わないが, **公欠による正式な欠席届が各試験日の 12:15 以前に提出**された場合に限り, 実施を検討する (同じ問題は出題しない).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

- 前半の講義は, Fourier 級数, Fourier 変換, Laplace 変換の 3 単元に大別され, この順序で講述する †17. 各単元の終了時にテストを行い, 理解度を評価する. 積み重ね型の基礎科目であるので, **中テストには小テストの範囲を含めるし, 中間試験は全範囲から出題**する. この意図で, 各試験の配点が変則的となっている †18.
- レポートの出題意図が, 数学の習得に欠かせない復習の習慣化であることに対して, 試験とは理解度と到達度の客観的評価を目的として行うものである. 必然的に, **試験の採点基準の方が厳しい**.

7. 進め方: 本資料に沿って板書で解説する. 図表は板書する †19. 講義内容は, 教科書に原則準ずるが, 第 2 章までの 122 ページ全てを中間試験までの 7 回で講述することは現実的ではない上に, 枝葉の項目も多い. そこで, 抜粋したものが本資料である. 教科書の演習問題の数も膨大であり, 解答が付いていない意味で, これを全て解くことも目指さない †20. 単位取得のためには, **本資料の事項を「理解」した上で, レポート等の問題が解ければよい**. 演習は, 講義内でも適宜行うが, 時間の制約上, 主にレポート課題とする.

8. 前提知識: 前半の範囲は, 「数式変形 "だけ"」を眺めると †21, **高校数学 (三角関数) の微積分の知識で「8 割方」は閉じている**ことに気づくだろう. これは理解と習得が容易であることを意味しない. 応用数学という科目名から想像がつくように, **物理的意味の理解と工学応用**が重要となるからである †22. 初

---

†17 [注意・講義順序] 教科書の第 2 章から講述する. 第 2 章のゴールの **Fourier 変換を学んだ後の方が, 第 1 章の Laplace 変換の位置付けが理解しやすい**からである (後にわかるだろう).

†18 [重要] この配点に即して, **小テスト, 中テスト, 中間試験の順に, 問題量が増えて, 難易度も上げる**予定である.

†19 本単元の理解には, 図を描くことが必須だが, 本資料には, 原則, 図表は載せない. そもそも, **図表とは諸君が描くべきもの**だからである.

†20 解きたい者は解いてもよい. 採点や添削の依頼には, 随時対応する. さほど重要ではない類題も多く, 最重要なポイントさえ押さえれば枝葉の知識が多い.

†21 **[重要]** 多数の積分記号に目を奪われて, 一見, 公式が多い分野だと勘違いしがちであるが, 整理すれば, 実は, **「Fourier 級数が何か」さえ知っておれば Fourier 変換も Laplace 変換も全て再現できることに気づく**. **三角関数の微積分で閉じている**といっても過言ではない.

†22 したがって, 数式変形は難しくはないが, 概念の理解は容易ではないことを意味する.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

等関数[†23]の微積分 (解析学 I) や重積分の計算 (解析学 II) は前提とする[†24][†25]. また, 「複素関数」の知識[†26]を用いる箇所が一部あるが, これを並行履修中であることから, 必要事項は, 適宜, 本講義内で補う.

9. 復習: とくに数学の講義では, 復習が必須である[†27]. すなわち, 本資料内で行われている計算の全てを, 各自のノートなどに書き下し, 何も見ずに再現できるまで[†28], 訓練を積むことが重要である[†29]. **復習を怠るとあっという間についてゆけなくなる**[†30].

10. manaba を使う[†31]: 聴講にあたっては, 丸写しにならないように留意してほしい. **書くこと, 聴くこと, 理解することが同時にできる**ためには, 前回の講義内容の復習が必須であるが, それでもなお, 容易に身に付けることはできない. これを助ける意図で, **manaba で板書の画像を公開**するので, 積極的に活用してほしい[†32].

---

†23 初等関数 (elementary function) とは何か. また, 特殊関数 (special function) の例を挙げよ.

†24 解析学 III の知識もあるとよいが, 本講義には, 解析学 III で学んだ常微分方程式の解法を一新させるという重要な目的もある (Laplace 変換) ので, 全て復習しなくとも理解は可能である.

†25 このように, 1 年次の数学 (とくに解析学) の単位を取得済み, かつ, その講義内容を習得済みという前提のもとで講義をすすめるが, 実は, その多くを直接用いるわけではない. 履修者の理解度を観察しつつ, 随時, 解析学の復習を取り入れてはゆくものの, 自助努力を期待している.

†26 とくに, Laplace 変換 (第 1 章) を数学的に厳密に学ぼうとすると, 複素関数の知識を多用するのだが, これを並行履修中であることと, たとえ複素関数を前提としなくとも形式的には学べることから, これに深入りすることはしない. 厳密に扱いたい者には, 脚注提示する補足を活用するとよいし, 「複素関数」を学び終えた後に本講義を振り返ることも望ましい.

†27 **[単位の定義] 150 分の講義の単位取得のためには, 150 分の予習および 300 分の復習が前提となるが**, 本科目の場合, 予習は不要であって, 450 分の復習を期待する.

†28 これは解法や公式の暗記を意味しない.

†29 これを怠ると, たとえ理解した「気」になっても, 単位は取得できない. **たとえ当たり前と思えるような (脳内でできるような) 式変形であっても, その 1 行 1 行を自身で紙に書き下して愚直に確かめる作業が重要**である.

†30 これを防ぎ, 復習の助けの意味で, あえて**毎回**レポートもしくは小テストを実施し学習の習慣化を図る. 本科目に限らず, 基礎科目とは積み重ね科目であって, 復習抜きに講義についてゆけることはありえない.

†31 昨日 4 月 18 日時点での履修申請者は, 既に manaba の当該コースに登録しましたが, 未申請者は各自でご登録ください.

†32 板書よりも, むしろ, 教員の話の要点を書き写すことを期待している (丸写しだけならば, 友人に借りるか, 後で manaba を見ればよい). 金川が話す予定の事項を (雑談なども含め), 可能な限り脚注に記すようにしたが, 思いつきで話すことも多いであろう. 本資料をよく読んでほしい.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

11. 講義内容の概観:

11–1) キーワード [†33]

- Fourier 級数: 三角関数の無限級数による**周期関数**の近似 [†34]
- Fourier 変換: Fourier 級数の**非周期関数**への拡張
- Laplace 変換: Fourier 変換の**複素数**への一般化

つまり, ストーリー性があるので, **「Fourier 級数が何か」さえ知っておけば**, 公式をあれこれ記憶せずとも, Laplace 変換というゴールまでたどり着ける. 大雑把にいうと, 「三角関数をうまく使うこと」が講義の主題である [†35].

11–2) 解析学 III に続き, 「微分方程式を解けること」が目標である.

- 常微分方程式 (1 変数関数): 前半の講義のゴールにある Laplace 変換を学ぶ最大の目的は [†36], **常微分方程式を解析学 III よりも系統的に (賢く, 効率よく, 少ない計算量で) 解く手段** [†37] の習得にある [†38].
- **偏微分方程式** (多変数関数)[†39†40†41]: Fourier 変換あるいは Laplace

[†33] 現時点ではわからないだろうが, この 3 つが要点である (厳密な定義ではない). **Fourier 級数, Fourier 変換, Laplace 変換の順序で学ぶのが**, 数学的に自然な流れであるばかりでなく, 応用へのつながりも見えやすいので, 教科書の順序から変更する.

[†34] 大雑把に言って, **Fourier 級数とは, Taylor 級数 (解析学 I) よりも適用範囲が広く強力な**級数である.

[†35] Fourier (フーリエ) や Laplace (ラプラス) といった, 小難しそうな人名にとらわれる必要はない.

[†36] [後述] Laplace 変換については, これ自体が主目的ではなく, これを上手く利用することが狙いである.

[†37] [発展] 正確には, **「常微分方程式の "初期値" 問題」**の系統的解法を学ぶ. たとえば, システム制御工学 (2 年秋) はこれに支配される. なお, Fourier 変換は, 「常微分方程式の "境界値" 問題」の解法に役立つ.

[†38] 多様かつ多数の常微分方程式の解法に注力した解析学 III とは指向が異なる.

[†39] 常微分方程式よりも発展的かつ実用的な微分方程式であって, 全ての現象が偏微分方程式の解として定まるといって過言ではない. これは, 後半の講義の主題であるが, その解法において前半の知識が前提となる. **偏微分方程式を独学することは厳しいので (難易度と時間の両面で), 事実上の必修**といえる.

[†40] 常微分方程式は, 独立変数が 1 つである. これは, 物理現象でいうならば, 独立変数が時間あるいは 1 次元空間座標だけの問題にしか応用できない. いうまでもなく, そのような工学応用先は極めて限定される (基礎としては重要だが). 工学応用を目指すべきわれわれにとって, 時間と空間の双方を扱うことは必須であるがゆえに, 偏微分方程式の解法への習熟は避けられない. [前提] 多変数関数に対する微分法 (偏微分) と積分法 (重積分) の理解が基礎となる.

[†41] [発展] 偏微分方程式を手計算で解けること (厳密解: exact solution) は稀であって, たいていの

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

変換を用いて解くことができるので [†42][†43], 前半の講義はそのための準備でもある．とくに, **Fourier 変換は微分方程式の解法にとどまらず, 各種データの解析と関連が深く** [†44], Fourier 変換それ自体への理解から避けて通ることはできない [†45].

12. 学習の指針:

    12–1) いくら勉強しても, 試験が終わって数週間も立てば忘れてしまう．これは仕方がない．大学で学ぶことはそれほどに膨大かつ広範．だから, 忘れることを否定的に考える必要はない [†46].

    12–2) したがって, 知識を重視しない．**公式を暗記して数字を代入するだけの出題はありえない** [†47][†48].

    12–3) 最終的に活きるのは, **公式の成立過程や定理の証明を理解**しているかである [†49].

    12–4) この考え方は, 応用の立場からはとくに重要である．なぜならば, 公式の成立過程に現れる考え方や公式の成り立ちそのものが, 理工学の研究の場でもそのまま活用されるからである [†50].

    12–5) 公式には, それを使えるか否かという仮定 (制約) がある．これを理解

場合, コンピュータによる数値解法に頼ることとなるが, どの解法を用いるかの判断を迫られた際に, いかに厳密解に習熟しているかが判断基準となりうる.

[†42] [発展] Fourier 変換は無限空間 $-\infty < x < \infty$ の変換に, Laplace 変換は半無限空間 $0 \le x < \infty$ あるいは時間 $0 \le t < \infty$ の積分変数変換に応用される.

[†43] 時間に対しても, 空間に対しても, 有限領域を扱うならば, 変数分離法 (後半の講義) が常套的な解法である.

[†44] 実験データの統計解析や信号処理などで欠かせない．研究でも用いられる変換であって, とりわけ, 高速 Fourier 変換 (FFT: Fast Fourier Transform) が挙げられる.

[†45] これに対して, Laplace 変換は, 微分方程式への応用を主目的とする「道具」といえる.

[†46] それよりも, **どの本のどこに書いてあったかが分かること**が重要で, また, **2 度目の学習のときには, 1 度目よりも早く理解できること**が重要である.

[†47] このような作業ならば, コンピュータでもできるので, 人間が行う意味がない.

[†48] [余談] 実は, コンピュータは微積分ができない (基本的には)．コンピュータが得意とするのは四則演算であって, この能力において人間は到底叶わないが, **微積分ばかりは, コンピュータの力も及ばず, 人間にしかできない数学**なのである.

[†49] 数学者でなくとも, これらを一度は学んでおかないと, 数学で最も重要な論理的思考力を身に付けることはできない.

[†50] 研究の場で数字を公式に代入するだけということはありえない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

しておかねば, その公式が正しいのかすらわからず, **公式の適用範囲を逸脱して使ってしまう**という最悪の事態が想定される †51†52.

12–6) だからこそ, **実用的なものほどブラックボックスにしてはならない**. 成立過程を理解した経験が必須となる †53.

12–7) 以上の意味で, 本講義では,

- **公式の成立過程や定理の証明**を重視する †54†55.
- 定義だけは知らねばならないが, ほぼ全ての定義は, 定義の背景から理由づけられるので, **定義は理解した上で記憶**することが望ましい.
- 多数の類題を解くことよりも, 少数の問題を精確に解く †56.

†51 [重要] 「いま, 公式 A が使えるのか, 使ってよいのか」の判断においては, いくらコンピュータが進化しても, 機械任せにはできない. **人間の頭で判断するより道はない**.

†52 たとえば, 初めに学ぶ **Fourier 級数の理論は周期関数にしか適用できない**という重要な制約がある.

†53 公式の適用範囲を超えて設計および製造されたモノは速やかに壊れるだろう.

†54 しかし, 数学者を育成するための講義ではない理由から, 厳密性に立ち入りすぎることはしない. もちろん, 厳密性を重視する姿勢は大いに歓迎するし, 最低限の厳密性は必要であるので随時述べる.

†55 「応用数学」なので, もちろん, 物理的意味や工学応用にも触れる.

†56 アイデアは原則問わない. 勉強すればできるし, しなければできないような出題および評価方針とする. したがって, テクニックが重要な受験数学とは程遠い.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 1 Fourier 級数

“Fourier”級数展開というと難しい響きにも聞こえる. これは, 「**“三角関数”**展開」とも言い換えられ, 周期関数を三角関数の無限級数和で表現する操作が, Fourier 級数に他ならない. そこで, 三角関数の性質を眺めることからはじめる [†57].

§ 1.1 三角関数の直交関係式

三角関数 [†58] の**積の積分**には, 興味深く重要な性質がある. たとえば,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x \, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.1}$$

のように, ある正弦関数 (sine function) と**「異なる」正弦関数を掛けて**, 周期 2π すなわち $[-\pi, \pi]$ [†59] で定積分すると, **ゼロになる**. これは, 余弦関数 (cosine function) についても同様であるし,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 7x \, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.2}$$

また, 正弦関数と余弦関数も「違う」関数だから, 積の積分はゼロとなる:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.3}$$

このように, 関数 f と関数 g の積の定積分がゼロとなるとき, ベクトルの用

---

†57 [重要] 計算過程は高校レベルなので退屈かもしれないが, 実は, **Fourier (フーリエ) 級数の全てさらには Fourier 変換までが, 高校数学レベルの三角関数の性質に支配される**といっても過言でない. 計算自体は容易であっても, 理解と応用は容易とはいえない.

†58 正接関数 $\tan x$ は除外する. 理由は後にわかるだろう.

†59 [記号・不等式] 積分範囲 $[a, b]$ とは $a \leq x \leq b$ を, (a, b) とは等号を含まない $a < x < b$ を意味する. 表記の簡潔さゆえに, 本資料ではこの記号を用いる (諸君が解く際には用いなくてもよい). 今の場合, $[-\pi, \pi]$ とは, $-\pi \leq x \leq \pi$ あるいは $|x| \leq \pi$ である. たとえば, $[a, b)$ ならば $a \leq x < b$ と読む. [補足] 等号付き不等号には, $\leq$ と $\leqq$ のいずれを用いてもよいが, $\leqq$ は日本人特有の記号という傾向が強いので, 本資料では $\leq$ を用いる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

語にちなんで[†60][†61][†62], f と g は**直交**しているという[†63]. 今の場合, $\sin x$ と $\sin 2x$, $\cos 2x$ と $\cos 7x$, $\sin x$ と $\cos x$ は, それぞれ直交関数である.

その一方で, **「同じ」関数の 2 乗**ならば, 積分値が π となる[†64].

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 3x \,\mathrm{d}x = \pi, \quad \cdots \tag{1.4}$$

すなわち, $\sin x$ と $\sin x$ は「直交していない」[†65].

基礎 1. 三角関数の基本公式 (1.5)–(1.8) を用いて[†66][†67], (1.1)–(1.4) を証明せよ.

[†60] [現時点では「直交」という用語の重要性は低いが補足] ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ について, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, すなわち, 2 つのベクトルの **"内積" がゼロ**になることと, 2 つのベクトルが「直交」することは同値であった. 「直交」関数という言い回しは, これにならったものである. 直交関数としては, 三角関数にとどまらず, もっと広範の関数が存在する.

[†61] [発展 1] 極座標あるいは円筒座標で有用な Bessel (ベッセル) 関数や (Fourier–Bessel 級数), 球座標で重要な Legendre (ルジャンドル) 関数 (Fourier–Legendre 級数) などの特殊関数 (special function) は, 代表的な直交関数である.

[†62] [発展 2] より一般的に学びたい者は, 無限次元のベクトルと関数の類似性, 一般的な直交関係式と関数の内積, ノルムの定義などを調べてみよ.

[†63] [用語] この性質を**直交性** (orthogonality) という. f と g は**直交関数** (orthogonal function) である. (1.1)–(1.3) のそれぞれを直交関係式をいう.

[†64] [記号] 本資料では, $\cos(2x)$ を単に $\cos 2x$ と書く. 混乱を招く場合を除き, 括弧は省くことが多い.

[†65] [イメージ] これは当たり前と言える. ベクトルの用語を借りれば, 2 つの同じベクトルは平行であって, 直交するはずがないからである.

[†66] [復習] 三角関数の加法定理 (addition theorem of trigonometric function) より,

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{1.5}$$

であるがゆえに,

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)], \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \tag{1.6}$$

[†67] [復習] 余弦関数の加法定理 (1.5) において $\alpha = \beta$ とおくと,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{1.7}$$

をうる (2 倍角の公式). これを変形すればよい (復習してみよ):

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{1.8}$$

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

基礎 2. 微分の定義 [†68] にしたがって, 三角関数の導関数公式を示せ [†69]:

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x, \quad \frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x \tag{1.10}$$

基礎 3. 三角関数の加法定理 (1.5) を証明せよ.

§ 1.1.1　一般化: 三角関数の直交関係式

(1.1)–(1.4) のような関係式は**無数に考えられる**. だからこそ, 一般化を目指すのが自然な感情である. 任意の**自然数** n と m に対して [†70], 次式が成立する:

三角関数の直交関係式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.13}$$

被積分関数をみると「**異なる関数を掛けるとゼロで (直交), 同じ関数を掛けると** π **になる**」ことがわかる [†71][†72].

---

†68 [基礎] 微分可能な関数 $f(x)$ の 1 階導関数 (first-order derivative) あるいは微分係数 (differential coefficient) は以下で定義される:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{\mathit{\Delta} x \to 0} \frac{f(x+\mathit{\Delta} x) - f(x)}{\mathit{\Delta} x} \tag{1.9}$$

†69 使いこなすことの方が重要な公式に属するが, それでも, 一度は確かめておくべきである.

†70 **[重要]** 自然数に限らずとも, 負の整数を含めてもよいように思うだろうが, $\sin(-nx) = -\sin nx$ のように, 負の整数 $-n$ も自然数 n に置き換えられるため, **自然数だけで事足りる** (後に詳述).

†71 **[重要]** (1.11)(1.12) の**積分記号の前の** $1/\pi$ **は, もちろん, (1.4) との対応も踏まえて右辺においてもよいが**, 前に書いておけば, 以後の議論とくに Fourier 係数を与える式 (1.30)(1.31) の理解がすすむ.

†72 [発展: Kronecker (クロネッカー) のデルタ] (1.11)(1.12) は, 次式のようにも書ける:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \delta_{nm}, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \delta_{nm} \tag{1.14}$$

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

問題 1. 自然数 n と m に対して (1.11)–(1.13) を示せ. [証明] 以下 (1.11) を示す [†73].

(i) $n \neq m$ (すなわち**異なる関数**) の場合:

$$
\begin{aligned}
\text{(LHS)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}[\sin(n-m)x - \sin(n+m)x]\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\underbrace{\frac{\cos(n-m)x}{n-m}}_{n=m\text{ で発散}} + \frac{\cos(n+m)x}{n+m} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1-1}{n-m} + \frac{1-1}{n+m} \right) = 0 = \text{(RHS)}
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

素直な計算ではあるが, いくつかの注意を脚注に列挙する [†74†75]. 分母の $n-m$ の存在こそが, **別に $n = m$ の場合を考えねばならない動機**である [†76]. そこで,

(ii) $n = m$ の場合 (すなわち**同じ関数**)[†77]:

$$
\begin{aligned}
\text{(LHS)} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2\pi} \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x}{2\pi} - \frac{\sin 2nx}{4n\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi - (-\pi)}{2\pi} - \frac{0-0}{4n\pi} = 1 = \text{(RHS)}
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

ここに, δ_{nm} は Kronecker のデルタ記号とよばれ

$$
\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}
\tag{1.15}
$$

で定義される. この記号は, 本講義に限らず様々な科目で多用されるので, 知っておくとよい. [注意] Kronecker のデルタ記号を, Dirac のデルタ関数 (後で学ぶ) と混同してはならない.

†73 (1.12)(1.13) についても, 同様に, 三角関数の公式に基づいて証明せよ.

†74 [記号] 式中の (LHS) は左辺 (Left-Hand Side), (RHS) は右辺 (Right-Hand Side) のそれぞれ略記であり, よく使われる.

†75 [(1.16) の補足] (i) $n \neq m$ と仮定したのだから, 括弧内第一項の分母は $n - m \neq 0$ であって, 発散しない. (ii) n も m も自然数だから, $n \neq -m\,(<0)$ が成立し, 括弧内第二項の分母もゼロではない. この意味で, **“整数 (負も含む)” ではなく “自然数” に制限した**のである. (iii) n と m が自然数なのだから, $(n+m)$ も $(n-m)$ も整数であって, $\pi(n+m)$ も $\pi(n-m)$ も 2π の倍数である. [厳密には] $(n+m)$ は自然数だが, $(n-m)$ は自然数とは限らず, n と m の大小に応じて, ゼロもしくは負となる可能性がある. しかし, これは計算結果には影響しないので (確かめよ), 気にする必要がない.

†76 **[あるいは] ここまで変形して, はじめて $n = m$ の場合分けが必要であることに気づき**, 自身で証明を正してもよい.

†77 [(1.17) の補足] 分母 (denominator) の n は, 自然数 (natural number) すなわち正の整数 (positive integer) だから, $n \neq 0$ であって, 分母に注意を払う必要はない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 1.1.2　偶関数と奇関数

偶関数 (even function) とは, 全ての x に対して †78,

$$g(-x) = g(x) \tag{1.18}$$

を満たす関数であって, 偶関数のグラフ $y = g(x)$ は y **軸に関して対称**である.

いっぽう, 奇関数 (odd function) の定義は,

$$h(-x) = -h(x) \tag{1.19}$$

であって, グラフ $y = h(x)$ は y **軸に関して反対称**である †79.

この定義にしたがうと, 正弦関数 $\sin x$ や 2 次関数 x^2 は偶関数で, 余弦関数 $\cos x$ や 1 次関数 x^1 は奇関数である (確かめよ)†80.

本講義では, **偶関数と奇関数の積について成立する次の関係を多用する** †81.

$$\text{偶関数} \times \text{偶関数} = \text{偶関数} \tag{1.20}$$

$$\text{奇関数} \times \text{奇関数} = \text{偶関数} \tag{1.21}$$

$$\text{偶関数} \times \text{奇関数} = \text{奇関数} \tag{1.22}$$

問題 2. (1.20)–(1.22) を証明せよ.

[証明] (1.20) を証明する. 偶関数の定義 (1.18) の成立を示すことが方針である. 偶関数 f_1 と偶関数 f_2 を考えると, 偶関数の定義 (1.18) より,

$$f_1(-x) = f_1(x), \quad f_2(-x) = f_2(x) \tag{1.23}$$

---

†78 [記号] 表記の簡潔さの意味で,「全ての x」を「$\forall x$」と書くことがある. これは, 全ての (任意の: Arbitrary) の A にちなんで, これを逆さにした記号である.

†79 [用語] 非対称 (asymmetric) と反対称 (anti-symmetric) は異なる. 非対称とは, 対称の対義語であって, 全く対称でもなんでもない. 一方, “反対称”は, 奇関数の定義 (1.19) や, 行列の成分が $a_{12} = -a_{21}$ を満たすことなどで言い回される (これは厳密な「反対称」の定義ではない).

†80 **[重要]** 定義から出発するのではなく, **具体的なグラフを描いて考察し, (1.18)(1.19) の形に抽象化する方法論**があってもよいだろう. [重要] このような考え方こそが「定義の創成」といえる. 他人の定義の丸暗記ではなく, 自身で定義するとは, 数学における本質的作業に他ならない.

†81 **[重要・例示]** べき関数 (power function) x^n を考えると, x^2 や x^4 (指数が偶数) は偶関数の定義を満たし, x^1 や x^3 (指数が奇数) は奇関数の定義を満たす. 指数 n に対応づけると, 偶関数と奇関数の積の関係を簡便に理解できる. つまり, 偶関数と偶関数の積は, $x^2 \times x^4 = x^{2+4} = x^6$, すなわち偶関数となるが, この事実は「偶数と偶数の**和 (積ではない!!)** は偶数」なる関係に対応している. 同様に, 奇数と奇数の和は偶数 (奇関数と奇関数の積は偶関数) であるし ($x^1 \times x^3 = x^4$), 偶数と奇数の和は奇数である ($x^2 \times x^1 = x^3$). 以上は, **証明ではないが記憶には便利**である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

である．ここで, 積 $f_3 \equiv f_1 f_2$ を考えると,

$$f_3(x) \equiv f_1(x)f_2(x) \underbrace{=}_{\text{偶関数の定義}} f_1(-x)f_2(-x) \underbrace{=}_{f_3\text{の定義}} f_3(-x) \tag{1.24}$$

2 つ目の等号では偶関数の定義 (1.18) を用いて, 最後の等号では f_3 の定義を用いた．したがって, f_3 は偶関数の定義 (1.18) を満足する．[証明終][†82]

基礎 4. 次の関数は, 偶関数か, 奇関数か, どちらでもないか．それぞれ, グラフを描いて説明せよ: x, $|x|$, x^2, e^{-x}, $e^{-|x|}$, e^{-x^2}, a (a は定数)

基礎 5. 偶関数 $g(x)$ と奇関数 $h(x)$ の積分に関する次式を示せ (L は正の定数)[†83].

$$\int_{-L}^{L} g(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^L g(x)\mathrm{d}x \tag{1.25}$$

$$\int_{-L}^{L} h(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1.26}$$

基礎 6. 偶関数と奇関数の積の性質 (1.22), および, 奇関数の積分に関する性質 (1.26) を使って, 三角関数の公式に頼ることなく, (1.13) の成立を簡便に証明せよ [†84].
[証明] 簡単である:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin nx}_{\text{奇関数}} \underbrace{\cos mx}_{\text{偶関数}} \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} (\text{奇関数})\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.27}$$

基礎 7. ここまでに現れた全ての定積分において, 積分範囲を, $[-\pi, \pi]$ から $[0, 2\pi]$ に置き換えても, 全く同様の結果が得られる．これを確かめよ [†85].

§ 1.2　周期関数 (periodic function)

$\sin x$ のグラフを描けば, 周期が 2π であることがわかるが, このとき, $2\times(2\pi) = 4\pi$, $3\times(2\pi) = 6\pi$, $\cdots$ も同じく周期となることが重要である．このように, 三角関数の周期は, 任意の自然数 $n = 1, 2, \cdots$ を用いて, 一般に $2n\pi$ とかける．

[†82] (1.21)(1.22) も同様に証明できる．

[†83] [重要] この公式の**価値は, (1.25) の積分範囲下限のゼロ, および, (1.26) 右辺のゼロ**にある．計算が著しく容易になる．

[†84] 厳密な意味での「証明」は, 三角関数の積分計算を行うべきである．

[†85] 本資料の以降の部分でも同様である．Fourier 級数の類書では, $[0, 2\pi]$ で議論を進める場合も, $[-\pi, \pi]$ を好むものもある．三角関数の周期は 2π であるがゆえに, 簡単に確かめられる．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

全ての実数変数 x に対して定義される関数 $f(x)$ が, 正の定数 L に対して,

$$f(x) = f(x+L) = f(x+2L) = \cdots = f(x+nL) \tag{1.28}$$

を満たすとき, $f(x)$ を**周期 L の周期関数**という [†86]. もちろん, 周期 $2L$ や $3L$ の周期関数などといってもよい. **周期関数の周期は無限個**あるが, その中でも最小の周期である L を基本周期 (fundamental period) という.

たとえば, $\sin x$ や $\cos x$ の基本周期は 2π である [†87]. $\sin x$ も $\cos x$ も, **位相 (phase) が $\pi/2$ だけずれている点を除けば** [†88]**, 形 (波形) は全く同じ**である [†89].

定数関数 $f(x) = 1$ も, (1.28) を満たすがゆえに, 周期関数である [†90].

基礎 8. 次の関数の基本周期を求めよ [†91].

$$\text{(a)}\ \sin 2\pi x, \quad \text{(b)}\ \cos nx\ (n\ \text{は自然数}), \quad \text{(c)}\ \sin x \cos 2x, \quad \text{(d)}\ \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$$

§ 1.3 Fourier 級数

最重要事項であるので, 証明等は後回しにして, 結論からいおう: Fourier 級数の考え方とは「**周期関数を三角関数の重ね合わせで表現する**」ことにある. 以下に数式表現する. 周期 2π の [†92] 周期関数 $f(x)$ が与えられたとき, 定積分

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.29}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{1.30}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{1.31}$$

---

†86 [実例] **周期関数 (周期現象) はわれわれの日常にありふれている**. 時計の針, 気温の変化, 株価, 生活サイクルなどはもとより, 理工学に関連したものでは, 振動や波など, 枚挙に暇がない.

†87 だからこそ, 直交関係式 (1.11)–(1.13) でも, 区間 $[-\pi, \pi]$ すなわち周期 2π で積分したのだし, 以後の部分でも, 周期 2π の周期関数を扱うので, $[-\pi, \pi]$ に関する定積分に支配される.

†88 もちろん, $3\pi/2$ のずれなどということもできる.

†89 この点が, Fourier 級数の理論において重要な役割を演ずる.

†90 $f(x) = 1$ の周期は任意の実数である.

†91 [答](a) 1, (b) $2\pi/n$, (c) 2π, (d) 12π. なお, (c) と (d) は計算過程も述べるべきである.

†92 [一般の周期] Fourier 級数の理論は, 周期 2π の関数に制限されず, 一般的な周期 L に対しても適用できる. その拡張は容易である反面, 計算が著しく煩雑になるので, 当面は周期 2π で議論する.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

が定まるとする．ここに, a_n と b_n は **Fourier 係数**とよばれ, 自然数 n に対する**数列**である[†93].

定まった a_n と b_n を用いて計算できる[†94],

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1.32}$$

のことを $f(x)$ の Fourier 級数という[†95].

Fourier 級数は**無限級数** (infinite series) であるので[†96], 収束するとは限らない．しかしながら, 工学に現れるほとんどの関数 $f(x)$ においては, $f(x)$ は, その Fourier 級数に収束することがわかっている．実際に, **本講義でも Fourier 級数に収束する関数だけを扱う**．そこで, 現時点では収束性に気を留めることなく, 大胆にも, $f(x)$ とその Fourier 級数を

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1.33}$$

と等号 $=$ で結ぶし, 以後, 諸君も等号で結んでよい[†97]. すなわち, 左辺の $f(x)$ は, その Fourier 級数 (右辺) に収束するとみなす[†98].

さて, 現時点では, 数式 (1.29)–(1.33) は意味不明に違いないが, 以下を読めば, その本質は, 驚くほどに単純であることに気づくだろう[†99].

[†93] **[自然数 n の中に実質的に負も含む]** 実は, $\sin(-2)x=-\sin 2x$ のように, **負の整数 $-n$ に対する三角関数も既に自然数 n を介して集約済**である.

[†94] [厳密には] 本当は逆である．後述のように, Fourier 級数 (1.33) を前提にして, Fourier 係数を与える公式 (1.29)–(1.31) が得られる．逆に, 具体的な Fourier 級数を求めたいときには, まず, 係数を (1.29)–(1.31) の積分計算から求めて, それを (1.33) に代入して級数を作る.

[†95] [用語] Fourier 級数展開, あるいは単に Fourier 展開ともいう．また, 三角関数の一次結合 (線形結合) などということも可能だろう．あまりにも自明なときには, Fourier を略して, 単に, 係数, 級数という.

[†96] (1.32) の**総和の上限が無限大**であることを忘れてはならない.

[†97] 収束するかは, もちろん, 関数に依存する．一般論を重視する書物においては, 等号 $=$ ではなく, 近似記号 $\sim$, $\approx$, $\simeq$ などを用いることも多い.

[†98] [注意] このような立場は, 純粋数学の観点からは好ましいとはいえないし, 諸君の中にも受け入れがたい者もいるだろう．もちろん収束性は重要であるが, Fourier 級数を学び始めた初学者が, 数学的に難解かつ厳密な収束性の議論にも同時に飛び込むことは, とくに応用上, 得策ではないのである．後述する具体的な例題を解きながら理解することが望ましいし, 収束性に関する一般論も後にまとめて述べる (§ 3.1).

[†99] 以下で詳述する成り立ちを読めば, 何も覚える必要がないことに気づく．そもそも, 公式 (1.29)–(1.33) を単に覚えても意味はないし, 得点にもつながらない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 1.3.1　Fourier 級数の考え方

$-\pi \leq x \leq \pi$ で定義される 1 次関数 $y = x$ を, 定義域の外側 ($x < -\pi$ および $x < \pi$ の区間) にも, 周期 2π ずつ拡張して描いてみよう †100. すると, 周期 2π の周期関数が作られる †101. これを $f(x)$ とおく †102.

同じく周期 2π の三角関数を用いて, $f(x)$ を近似表現できないだろうか. たとえば, $y = \sin x$ の波形は, $f(x)$ の原点付近の **“平らな”部分**にどことなく似ている. いっぽうで, $y = \sin 100x$ のような鋭い波形は, $f(x)$ の $x = \pm\pi$ といった **“尖った”部分**を表現するに適していそうである. この直観に基づき, 以下の発想が浮かぶ.

いろんな (全ての) 三角関数を使えば, 周期関数を表現できるのではないか?

実際に, 全ての三角関数を書き出してみよう:

$$c,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x, \cdots\cdots,\ \sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \cdots\cdots \tag{1.34}$$

ただし, 定数 c も三角関数に含めた †103†104. これらは全て周期 2π の周期関数であるから †105, **周期関数 $f(x)$ の周期 2π とも整合**する. そこで, 全ての三角関数の**線形結合**を考える †106. すなわち,

$$f(x) = c + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots \tag{1.35}$$

とかく [c, a_n, b_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は全て**定数**]. 総和記号を使うと,

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.36}$$

---

†100 図は板書する. これは, のこぎり波とよばれることがある.

†101 この操作を周期的拡張という. なぜこの操作が必要なのかを § 1.4 で後述する.

†102 この場合は奇関数でもある (奇関数の定義を満たすか確認せよ).

†103 もちろん, 厳密には, 定数 c と三角関数は異なるが, $\cos 0 = 1$ のように, 定数は三角関数の一部に含まれるとイメージできる. なお, 1 という特定の数字にこだわる必要はない (1 を定数倍すればいかなる数字も表現できる). 以下では, 定数 c を定数関数とよぶことが多い.

†104 **[定数関数の周期]** $f(x) = c$ は, 周期関数の定義 (1.28) すなわち $f(x) = f(x + L)$ を満たすので, **周期関数であるし, その周期として 2π を選んでよい**.

†105 たとえば, $\sin 2x$ の基本周期は π であるが, この自然数倍すなわち 2π なども周期となる.

†106 **[重要]** ここでの線形結合 (1 次結合: linear combination) とは, 重ね合わせ (superposition) ともよばれ, **おのおのの三角関数に定数係数を掛けて足し合わせたもの**を意味する. 一般に, **関数 f と関数 g の線形結合は $af + bg$ と書ける (a と b は定数)**.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

と総和の上限 ∞ を明示できて, 無限級数であることがわかりやすく伝わる [†107].

(1.35)(1.36) の右辺こそが Fourier 級数であり, a_n と b_n が Fourier 係数である. a_n と b_n は, それぞれ, $\cos nx$ と $\sin nx$ に掛かっているので, **余弦関数と正弦関数の各成分 (n 成分) が $f(x)$ の中にどの程度含まれているか**を表してくれる [†108].

Fourier によるこの画期的な発想は, ここで例示した $f(x)$ に留まらず, **いかなる周期関数 $f(x)$ をも三角関数の無限級数として表現可能とする**ものである [†109].

問題 3. $f(x)$ が [すなわち (1.36) の右辺が], 周期 2π の周期関数であることを示せ [†110]. [方針] 各項が (1.28) を満たすことを示す.

§ 1.3.2　Fourier 係数の導出

2 つの異なる周期関数が, ひとたび Fourier 級数で表されたならば, 両級数の差異は, 級数内のそれぞれの三角関数の成分の割合を表す **Fourier 係数 a_n と b_n の違いだけに集約**される. その意味で, a_n と b_n を求めることは最重要である [†111].

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.36}$$

と表現されたとする [†112]. ここで, 以下の 2 点を仮定するが, 現時点では気にしなくても問題はない (いまは, Fourier 係数 a_n と b_n を求めることに注力する)[†113]: (i)

[†107] **[重要]** いきなり総和記号を用いた表現 (1.36) を覚えてしまうと, Fourier 級数の本質が見えなくなるだろう. 慣れるまでは, **面倒でも (1.35) のように全て書き下す方が理解が進む**.

[†108] **[重要例]** $a_2 = 5$ ならば, $5\cos 2x$ のように $f(x)$ の中で成分 $\cos 2x$ が占める割合は小さくて, $b_{50} = 300$ ならば, $300\sin 50x$ のように $f(x)$ において $\sin 50x$ という成分が相当に大きな割合を占めることが読み取れる (もちろん, 重要なのは数字ではなくて相対的な比率 (割合) である).

[†109] [例] 三角関数といわれると, 波や振動といった物理現象だけを思い浮かべるかもしれないが, 実は, 熱の伝導や物質の拡散なども, Fourier 級数の考え方にしたがって扱うことが可能である.

[†110] この結果を拡張すると, 周期 L の周期関数の重ねあわせは, 同じく周期 L の周期関数といえる.

[†111] [重要] よく「Fourier“級数”は重要」と連呼される. 級数が重要なのではなくて, **「Fourier“係数”」が重要**なのである. 事実, この先に学ぶ Fourier 変換も, Fourier“係数の”延長線上に位置づけられるものである.

[†112] (1.33) では初項 (定数) は $a_0/2$ と書かれていたが, 実はこれが c の正体であることが明らかになる.

[†113] [方針] Fourier 級数の理論に現れるさまざまな仮定—— 項別積分と項別微分, 収束性 (一様収束, 各点収束, 平均収束), 不連続性, 絶対可積分など——は, 言うまでもなく重要であって, これらの妥当性を常に検証しながら式変形することが理想である. しかしながら, これは容易とはいえないし, 実は, 具体的な問題の解が得られてから検証しても遅くはない. そもそも, まだ $f(x)$ の

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

$f(x)$ が $[-\pi,\pi]$ で絶対可積分であること [†114], (ii) 無限級数 (1.36) が $[-\pi,\pi]$ において項別積分可能であること [†115].

級数 (1.36) に含まれる多数の (無限個の) 項を眺めて, 嬉しく感じる者などおらず, 誰しもが「可能ならば**項を少なくしたい**」と望む. 実は, 学んだばかりの**直交関係式 (1.11)–(1.13) はこれを叶えてくれる**強力な道具なのである. すなわち, **ある三角関数に出会ったとき, それと異なる三角関数を掛けて積分すれば, ゼロに "できる"** 性質を利用する.

(1.36) 右辺第 2 項の括弧内第 1 項の余弦関数 $\cos nx$ を見て, 両辺にこれと異なる余弦関数 $\cos mx$ を掛けて [†116], $[-\pi,\pi]$ で定積分 [†117] しようと発想する. まずは右辺を変形する:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\left[c+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\mathrm{d}x\\
&\underbrace{=}_{\text{項別積分}}\ c\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\mathrm{d}x}_{\text{1 周期積分}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x}_{\text{場合分け (直交関係)}}+b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,\mathrm{d}x}_{\text{ゼロ (直交関係)}}\right)\\
&=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x}_{\text{ひとまとめに考える}}\\
&=\pi a_m
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

具体的な形 (関数形という) すら与えていない現時点において深入りすることは得策でもなく, 初学者である諸君の混乱を招くことが危惧される. だからこそ, 「現時点では」気にしなくてよいと述べた (決して, このような細部を一切気に留めなくて良いことは意味しない). 妥当性の検証を後回しにする立場とは, 数学的厳密性を無視するものではないことも強調しておく.

[†114] [発展 (絶対可積分)] 関数 $f(x)$ が $[-\pi,\pi]$ で絶対可積分であるとは, 積分が有限値, すなわち

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty \tag{1.37}$$

をいう. このとき, 次の不等式が成立して, 係数 a_n は発散せずに確定する (b_n も同様):

$$|\pi a_n|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty \tag{1.38}$$

[†115] [発展 (項別積分)] 積分と総和の順序交換が可能であることをいう.

[†116] [理由] 直交性を使えそうだからである.

[†117] [理由] 周期が 2π だからである.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

2 行目において[118], 第 1 項は $\cos mx$ をその周期 2π で積分するのだからゼロになるし, **第 3 項は正弦と余弦の積の直交関係式 (1.13) よりゼロ**になる[119]. 3 行目から 4 行目に至る式変形の詳細を, 総和記号を用いずに以下に書き下す[120]:

$$\underbrace{a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos mx\,\mathrm{d}x}_{n=1}+\underbrace{a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos mx\,\mathrm{d}x}_{n=2}\underbrace{+\cdots}_{n=3,4,\cdots,m-1}+\underbrace{a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos mx\,\mathrm{d}x}_{n=m}+\cdots$$
$$=a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,\mathrm{d}x=a_m\pi \tag{1.40}$$

$n=m$ の場合 (同じ関数の積) のみ積分値が π となり, それ以外はゼロとなる点に注意する[121]. これで右辺の変形は終了した.

いっぽうで, (1.36) の左辺に $\cos mx$ を掛けて $[-\pi,\pi]$ で積分すると

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x \tag{1.41}$$

となる. ようやく, Fourier 係数 a_n を与える次式をうる (**m を n におきかえた**)[122]:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad \underbrace{(n=1,2,\cdots)}_{\text{自然数}} \tag{1.30}$$

同様に, (1.36) の両辺に $\sin mx$ を掛けて[123], 係数 b_n の表式を導いてみよ:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.31}$$

まだ, 定数項 (定数関数) c を求める作業が残っている. 級数 (1.36) の総和には

---

[118] 項別積分が可能であると仮定した. 先述のように, この妥当性の検証は後回しとする.

[119] **[基礎]** 第 1 項の c, 第 2 項の a_n, 第 3 項の b_n は, 全て x 積分に関与しない定数であるから, 積分記号の外に出した. ただし, a_n と b_n は n の総和に関与するので, 総和記号の外に出してはならない.

[120] [重要] **この項は「ひとまとめに考える」ことが重要**である. なぜならば, n と m が等しいか否かを考えるとき, **積分のみならず係数 a_n の添え字 n も連動して変化してしまうから**である.

[121] $n=m$ の以外の場合はゼロとなり, 寄与がないので, **総和記号が消えた**のである.

[122] **[重要・注意]** 最後に m を n におきかえたことに違和感を感じるかもしれない. **Fourier 係数 (1.30) とは, 数列 (sequence) であって, その両辺の項の番号を明示する記号は何でもよい.** それゆえ, 元々の記号の n に整えただけのことである (深く考えすぎると混乱するかもしれない). ついでながら, Fourier 級数 (1.36) の和の範囲を定める記号 n も, m や ℓ など何でもよい.

[123] この動機も明快である. 級数に含まれる $\cos nx$ や $\sin nx$ と**「異なる関数 $\sin mx$ を掛けて余計な項を消したかった」**のである.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

周期 2π の三角関数が含まれているので, 単純に, 周期 $[-\pi, \pi]$ で積分すれば三角関数の全てが消えてくれる. これを実行する:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} c\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x}_{\text{項別積分してゼロ (三角関数の 1 周期積分)}}\right)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} c\,\mathrm{d}x = 2\pi c \tag{1.42}$$

したがって,

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.43}$$

以上で, 係数 c, a_n, b_n の全てが得られたが, 自然数 $n\,(\geq 1)$ に対して定義された a_n [式 (1.30)] において, あえて $n = 0$ とおいてみると, $\cos 0 = 1$ より

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 2c \tag{1.44}$$

であることがわかる. 記号は少ない方が簡潔にすむので, a_n に c を含めて,

$$c \equiv \frac{a_0}{2} \tag{1.45}$$

と定義してしまおう [†124].

最後に, Fourier 係数 a_n と b_n だけを用いた Fourier 級数 $f(x)$ の表現 (1.33), および, Fourier 係数 a_n と b_n を $f(x)$ から求める式 [†125] をまとめておく [†126]:

[†124] a_n の定義を拡張して, $n = 0$ の場合も a_n に含めることは何の問題もない. しかし, 具体的な計算を行う上では, a_0 は別途考えることとなる (後述).

[†125] [用語] 教科書では, これを「Euler の公式」と呼んでいるが, 本資料では特に名前をつけない. この言い回しはほとんど使われない上に, 後述の極めて重要な「Euler の公式 (2.4)」との混同を防ぐためである.

[†126] **[重要]** Fourier 級数が**無限級数**であることと, Fourier 係数が**数列**であることを強調しておく. なお, (1.29)(1.30) は**定積分なのだから, 係数の各項 (a_0, a_1, a_2, $\cdots$) は定数**である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

周期 2π の周期関数の Fourier 級数展開と Fourier 係数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1.33}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.29}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.30}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.31}$$

(1.29)(1.30) を見ると,「せっかく (1.30) に $n=0$ も含めたばかりなのに, なぜ分割するのか」と思うだろう. もちろん, (1.30) の適用範囲に $n=0$ を含める操作に誤りなどない [†127]. しかしながら, **具体的な $f(x)$ に対して, $n\geq 0$ に対する Fourier 係数 a_n を実際に計算してみると, 分母に n が現れ, $n=0$ で a_n は発散に至る**のである (少なくとも本資料で解く全ての問題では). そこで, $n=0$ の場合は除外して, 予め $n=0$ とおいた (1.29) にしたがって計算することとなる [†128][†129].

つまりは, **$n=0$ の場合を (1.29) から, $n\geq 1$ の場合を (1.30) からと, 常に場合わけして計算**することが正攻法であるが, 実際に計算を行わねばわかるはずもないので, 次節 § 1.4 の問題を解きながら, この事実を具体的に確かめよう [†130].

問題 4. 周期 2π の周期関数 $f(x)$ が, Fourier 級数 (1.33) に展開できるとき, その Fourier 係数を与える式 (1.29)–(1.31) を導出せよ.

§ 1.4 計算例

$f(x)$ にいくつかの代表的な関数形を与えて, その Fourier 級数を求めよう. Fourier 級数を求めるとは, Fourier 係数 a_n と b_n を求めることなので, 公式 (1.29)–

[†127] 事実, $n\geq 1$ に対する a_n の公式 (1.30) に $n=0$ を代入すると, $\cos 0=1$ ゆえに, (1.30) は $n=0$ の場合つまり a_0 を包含する. 三角関数の理論には反しない.

[†128] [自身で気付くことが重要] (1.29) の右辺の積分には, どこにも n を含まないがゆえに, 積分結果にも n が現れるはずがない. つまり, 初めから記号 n を除外できる.

[†129] a_0 は, a_n $(n\geq 1)$ と無関係な, 単なる記号とみなしてもよい. しかし, a_n と関連づけることが可能なので, 全く無縁に思える記号 c よりはわかりやすい記号 a_0 を使っただけと思ってよい.

[†130] [考え方] 以上の論理が受け入れがたいかもしれないので, 別の説明を挙げておこう: $n=0$ の場合も公式 (1.30) に含まれると仮定し, 実際に a_n を求めた結果, $n=0$ の場合を別に考える必要性に迫られたならば, そのときはじめて, a_0 を与える (1.29) に頼って計算すればよい. 逆に, $n=0$ に対する不都合がなかったならば, それを $n\geq 0$ に対する a_n としてよい.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

(1.31) にしたがって積分計算を行えばよいだけに見えるが, 実は, その計算は容易とはいえない [†131]. いくつかの例題を解きながら理解を深める.

§ 1.4.1　方形波

問題 5. [方形波 **1**][†132] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された関数 [†133]

$$\begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases} \tag{1.46}$$

を周期 2π の周期関数となるように, x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく [†134][†135]. $f(x)$ の概形を描き [†136], その Fourier 級数を求めよ.

[†131] a_0 の場合に対して注意を払わねばならなかったように, これに類する箇所が多く現れる. 決して, 公式に代入するだけの単調な作業ではないことに気づく.

[†132] [例] 方形波 (square wave), 方形パルス, 矩形波などとよばれる. 方形波は, デジタル信号として最もよく使われている波形であり, テレビや携帯電話といった電化製品の中を走り回っている. 「方形」とは, 長 "方形" や正 "方形" に由来し, 直角の波形を意味する.

[†133] 定義域を, $(-\pi < x < 0)$, $(0 < x < \pi)$ のように, $x = 0$ や $x = \pm\pi$ で定義されないように定める書物もあるので混乱するかもしれない. 関数それ自体を眺める上では, もちろん, この定義域の差異に注意を払うべきである. しかしながら, 周期関数に拡張して Fourier 級数に展開してしまえば, 実は, この軽微な差異は問題とならないことに気づく (後述). したがって, **$<$ と $\leq$ の差異に過敏になる必要性は低い**.

[†134] **[周期的拡張 (§ 1.3.1)]** この操作を, 周期 2π での周期的拡張という. なぜ周期的拡張が必要なのかを以下で説明する: とくに応用上は, **関数とは, $0 \leq x \leq L$ のような長さ L の有限の区間だけで定義される (与えられる)** ことがふつうであって, 無限の領域 $-\infty < x < \infty$ で定義される非現実的な関数を扱うことは稀である. しかし, **有限の区間だけで定義された関数であっても, それが周期関数となるように, その外側へ (x 軸全体に) 拡張することができる**. これを $f(x)$ とおく.

[†135] †134 の操作の意味も意義も, わかりやすいとはいえないだろう. 本資料では, 「周期的拡張」という略語には頼らず, 「 ⋯ で定義された ⋯ という関数を周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に拡張し ⋯ 」というくどい表現を積極的に採用する. 実は, 周期的拡張は 1 通りに限らないこともあるので, その都度このように書けば, 誤解を招く恐れもない.

[†136] 周期的拡張によって作られる $f(x)$ は次式で与えられることを確かめよ (数式表現ではわかりづらく, 図を描く方が理解しやすいことに気づく. 図表は, 本資料では割愛し, 板書にゆずる):

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \cdots\cdots,\ [-5\pi, -4\pi),\ [-3\pi, -2\pi),\ [-\pi, 0),\ [\pi, 2\pi),\ [3\pi, 4\pi),\ \cdots\cdots \\ 1 & \cdots\cdots,\ [-4\pi, -3\pi),\ [-2\pi, -\pi),\ [0, \pi),\ [2\pi, 3\pi),\ [4\pi, 5\pi),\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{1.47}$$

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

[解] 自然数 $n \geq 1$ に対する Fourier 係数 a_n を, (1.30) に従って計算する [†137][†138]:

$$
\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} 0 \times \cos nx \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} 1 \times \cos nx \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{\sin n\pi - 0}{n} = 0
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

§ 1.3.2 で述べたとおり, やはり**分母に n が現れた**. それゆえ, (1.30) に $n = 0$ の場合の a_0 を含めてはならず, そもそも記号 n を排除した公式 (1.29) にしたがって, **初項 a_0 を別に求めねばならない** [†139]. これを実行する [†140]:

$$
\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x = [x]_0^{\pi} = \pi \tag{1.49}
$$

両辺を π でわって, 初項 a_0 と a_n をうる [†141]:

$$
a_0 = 1, \quad a_n = 0 \ (n = 1, 2, \cdots) \tag{1.50}
$$

つぎに, $n \geq 1$ に対して, b_n は, (1.31) より,

$$
\begin{aligned}
\pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= -\left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{-(\cos n\pi - 1)}{n} = \frac{1 - (-1)^n}{n}
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

である. ここに,

$$
\cos n\pi = (-1)^n \tag{1.52}
$$

[†137] [コツ] 積分記号前の $1/\pi$ は邪魔であるだけでなく, 計算ミスを招くので, 予め両辺に π を掛けるとよい (ただし, 最後に π で除し忘れてはならない). この意味で, **「πa_n」を Fourier 係数とみなす考え方**もあるだろう.

[†138] [基礎] 自然数に限らず, いかなる整数 n に対しても, $\sin n\pi = 0$ が成立する.

[†139] [重要] **分母に n が現れる**という事実は, 後の問題でも同じである (その都度確かめよ). このように, $f(x)$ に具体的な関数形を当てはめずに, 抽象的な議論を行っている際には, 一見うまく行くように思っても, 実際に具体的な計算を行ってみると, 案外, 矛盾が生ずるのである. このような意味で, 小難しい抽象論をあえて後回しに我慢して, 具体的な問題を解きながら検討する方針は, (とくに Fourier 解析の習得においては) 有効となる.

[†140] もちろん, まず a_0 から計算してもよい. n が確かに分母に現れて, $n = 0$ のときは (1.30) が適用できないことを実感してもらう意図で, あえて, 先に計算した.

[†141] [記号] 本資料では, 文脈に応じて, "$n \geq 1$" と書くことも, "$n = 1, 2, \cdots$" と書くこともある. 同様の意味で, 定義域を示す記号 $[a, b]$ と $a \leq x \leq b$ も併用するが, 混乱の心配はないであろう.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

はよく使う重要な関係式であって (確かめよ), n の偶奇によって値を変えることがわかる. これより, b_n がゼロとなる場合が出てくる:

$$b_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ 2/(\pi n) & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \tag{1.53}$$

したがって, Fourier 級数 (1.33) に, 求めた係数 a_0, a_n, b_n を代入すると

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi n} \sin nx \tag{1.54}$$

となる [†142]. 総和記号の中に着目すると, a_n は全ての n に対してゼロとなり, b_n は全ての偶数 $n = 2, 4, 6, \cdots$ に対してゼロとなる. この書き方はいささかわかりづらい. 要するに, 奇数項 ($n = 1, 3, 5, \cdots$) のみが残るのだから, **偶数項を省いた表現に書き改める方が級数を解読しやすい**. そこで, 新しい自然数 k を導入して

$$n = 2k - 1 \quad (k = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1.55}$$

とおくと, $k = 1$ が $n = 1$ に, $k = 2$ が $n = 3$ に, $k = 3$ が $n = 5$ に対応する [†143].

結局, Fourier 級数は, 次式に書き改めることができる [†144]:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x \tag{1.56}$$

総和記号による表現は簡潔かつ美しい反面, 級数のふるまいを具体的につかみづらいので, 以下のように, **第 3 項程度を書き下すことも習慣づける**べきである [†145]:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x \underbrace{+\cdots}_{\text{必ず書く}} \tag{1.57}$$

すると, **Fourier 係数のふるまいが具体的に見えて, $2/\pi$, $2/3\pi$, $2/5\pi$ と, どんどん小さくなってゆく**傾向がわかる. 逆に, 係数が大きくなってゆくのならば, 収束

[†142] 総和記号の中の分母の π は n の総和に無関係であるため, 勿論総和記号の外に出してもよい.

[†143] [重要] 確かめよ. 以後も**この置き換えを多用する**. 同じ級数であっても, その**表現がわかりやすく読み取りやすいに越したことはないので, 拘る価値がある**.

[†144] [注意] 級数の表記は人それぞれであって, もちろん (1.54) 最右辺の表現でも正しい. しかしながら, 級数を, より的確かつわかりやすく書き改める作業は本質の一つであるので, 試験でも問う.

[†145] [まとめ] 以下の双方が重要である: **(i) 総和記号を用いて一般的に表現し, (ii) 数項を具体的に書き出して傾向をつかむ**.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

せずに発散に至るのだから, この傾向は, 収束する無限級数を考える上で当然といえる[†146]. そもそも, 本問題で利用した **Fourier 係数を与える公式 (1.29)–(1.31) は, 級数 (1.33) の等号成立 (収束) を前提として導かれたのだから, 発散するはずがないではないか**[†147].

問題 6. [方形波 2] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された関数

$$\begin{cases} -1 & (-\pi \le x < 0) \\ 1 & (0 \le x < \pi) \end{cases} \tag{1.58}$$

を周期 2π の周期関数となるように, x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく[†148]. $f(x)$ の概形を描き, その Fourier 級数を求めよ.

[方針と解] 問題 5 と大して違いがないと思ってはならない. **$f(x)$ が奇関数であることに気づくことが重要**である. これによって**計算量が大幅に軽減**されるからである[†149]. 奇関数を, y 軸対称な区間 $[-\pi, \pi]$ で積分すれば, 初項は $a_0 = 0$ となり, 奇関数と偶関数 $\cos nx$ の積も奇関数[†150] であるから, $a_n = 0\,(n \ge 1)$ もわかる. ゆえに, 求めるべきは b_n だけであって, 奇関数の積分公式 (1.26) をうまく使えば[†151][†152]

$$\begin{aligned} \pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = -2 \left[\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{-2(\cos n\pi - 1)}{n} = \frac{2[1-(-1)^n]}{n} \end{aligned} \tag{1.59}$$

---

†146 [基礎] もしも, Fourier 係数が大きくなったならば, 計算ミスの存在を逆算して疑うとよい.

†147 **[重要]** Fourier 級数の収束性の詳細について, まだ議論してはいない. 理由はさておき, $f(x)$ の Fourier 級数が, $f(x)$ に収束するという前提 (それゆえ, 等号で結んだ) のもとで話を進めており, 事実, (1.29)–(1.31) も収束を前提に導かれた. つまり, 現時点では, 収束性の一般的理論に踏み込むことは重要ではないが, **収束を仮定して議論が成立していることへの意識は重要極まりない**.

†148 [用語] これも方形波とよばれる (どちらかというと, 方形波とは, この波形を指すことが多い).

†149 [重要] 実際に, Fourier 級数の対象の関数の多くは, 偶関数か奇関数かのどちらかである.

†150 [重要] **偶関数と奇関数の積の性質は, 覚えるのではなく, その場で再現する**ことをすすめる. べき関数 $x^n x^m = x^{n+m}$ を思い起こして, n と m が, それぞれ奇数か偶数かを, その都度判断する方が, 誤りがない.

†151 (1.26) に頼り, 積分範囲が y 軸対称であることをうまく利用する.

†152 [コツ] やはり, あらかじめ両辺に π を掛けておいた.

したがって, Fourier 級数は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n} \sin nx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x \quad (n = 2k-1) \tag{1.60}$$

となる [†153]. やはり, 3 項程度を書き下し, 級数のふるまいを観察する:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x \underbrace{+\cdots}_{\text{省略不可}} \tag{1.61}$$

問題 5 と同様に, Fourier 係数は減少してゆくことがわかった.

問題 7. [基礎] 問題 6 において, 偶関数と奇関数の性質に頼ることなく, 積分計算によって, $a_0 = 0$ および $a_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を確かめよ.

問題 8. **[発展: 無限級数としての Fourier 級数の有限項での打ち切り]**[†154] 問題 6 で求めた Fourier 級数 (1.60) を, (i) 第 2 項 $(k = 2)$ までで打ち切った部分和, (ii) 第 12 項 $(k = 12)$ までで打ち切った部分和, それぞれのグラフをコンピュータを用いて描け [†155]. $f(x)$ と (i) と (ii) の 3 者を比較して, 以下の特徴を確認せよ:

(特徴 1) 打ち切った項の数の増加に伴って, 部分和は $f(x)$ に近づいてゆく [†156].

(特徴 2) $x = 0$, $x = \pm\pi$ などの不連続点の近傍には, 強い振動がみられる [†157].

問題 9. **[発展: 不連続点における収束]** 問題 6 において, $f(x)$ の不連続点である $x = 0$ に注目しよう. このとき, 定義式 (1.58) によれば, $f(x)$ の値は $f(0) = 1$ である. それゆえ, $f(x)$ の Fourier 級数 [(1.60) の最右辺あるいは (1.61) の右辺] の値も 1 となるように思える. しかしながら, 級数 (右辺) に $x = 0$ を代入すると, 奇

[†153] 最右辺では, 奇数の $n = 1, 3, 5, \cdots$ のみを表現できるように, 新しい自然数 k を導入して書き改めた (問題 5 と同様).

[†154] 無限級数を有限項で打ち切ったならば, 当然, 無限級数ではなくなる. このようにして得られる有限項からなる級数を, Fourier 級数の**部分和**という (後述). 現実には, **無限級数のグラフを描くことは不可能**であるので, グラフを描きたいと思ったならば, 有限項で打ち切った部分和に妥協するより道はない.

[†155] 何らかのプログラミング言語でも, Excel でも, 何を用いてもよい.

[†156] [重要] この事実から, **部分和の項数を増やせば, すなわち $k \to \infty$ と無限項 (無限級数) を考えれば, $f(x)$ の Fourier 級数が $f(x)$ に近づいてゆく**ものと推測される (もちろん, 単なる推測に過ぎず, 厳密な証明でもなんでもない).

[†157] [発展] これを, Gibbs (ギブス) の振動という. 不連続点では収束が一様でないことが (§ 3.1), Gibbs の振動の原因である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

妙にも, ゼロという値が対応してしまう. この事実は, 他の全ての不連続点である $x=\pm n\pi$ (n は自然数) においても同様である. 結局, Fourier 級数 (1.60) の**等号は「不連続点を除いて」成立**すると結論づけられる [†158]. 以上を, 自身で確かめよ [†159].

以上の問題のように, 不連続な関数であっても Fourier 級数に展開できる場合は多い [†160]. これは, 既習の Taylor 級数と Fourier 級数の著しい差異である. **Fourier 級数とは, Taylor 級数よりもはるかに収束しやすく**, その意味で, 工学応用の立場からは欠かせない強力かつ有用な道具である [†161][†162].

§ 1.4.2　べき関数

不連続関数の議論は一旦休止して, ここでは連続関数を眺める. 1 次関数と 2 次関数の Fourier 級数を計算してゆこう.

問題 10. [1 次関数 (1)—§ 1.3.1 の答え—] 区間 $[-\pi,\pi)$ で定義された 1 次関数 x を, 周期 2π の周期関数となるように, x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく. $f(x)$ の Fourier 級数が

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = 2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\cdots \tag{1.62}$$

---

†158 [発展]「不連続点を除いて」といっておきながら等号を用いているではないか, と思うかもしれない. これは決して「細かなこと (不連続点) は気にしない」という大雑把な態度ではない. Fourier 級数の一般的理論では, $[-\pi,\pi]$ の中の有限個の (たかだか数個の) 点で一致しない関数を同じ関数とみなすことがある. この理論にしたがって, 以後も, 等号を用いる.

†159 **[重要・発展 (§ 3.1)]** Fourier 級数は, **不連続点において「右極限値と左極限値の平均値に収束」**するという重要な性質がある. 実際に, この場合も, $(-1+1)/2=0$ という平均値に収束しており, この性質を先取りする意図で出題した. [補足] 右極限とは正方向 $x\to+0$ からの極限, 左極限とは負方向 $x\to-0$ からの極限である.

†160 [発展 (§ 3.1)] 精密にいうと, **「区分的に滑らかな関数」ならば**, Fourier 級数に展開できて, その級数は, 不連続点を除いて元の関数に一致する.

†161 [発展 (§ 3.1)] **Fourier 級数は導関数 (微分) を含まない. それゆえに, 不連続点の存在をも許容**してくれる. これは, 昨年度 Taylor (テイラー) 級数に慣れ親しんだ初学者の立場からは驚くべき事実といえる. そもそも, Taylor 級数は, 無限階微分可能であることを前提とする. Taylor 級数から見れば不連続関数など門前払いである. いま, Fourier の考え方に従った結果, **不連続関数の無限級数展開に成功したことは注目に値する**. Fourier 級数の収束性に関する条件は, Taylor 級数に関するそれよりもはるかに緩い.

†162 [注意] 連続と不連続, 微分可能性, Taylor 級数などと聞いてピンと来ない者は, 解析学の総復習を強くすすめる. **本科目に限らず全ての科目が理解できなくなる恐れがあるからである**.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

となることを示せ[†163]. [ポイント 1] どのような波形になるかの予想を立てるべく, やはり, $f(x)$ の概形を描いた後に[†164], Fourier 係数を計算せよ:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \ (n = 1, 2, \cdots), \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \tag{1.63}$$

[ポイント 2] 初項から第 3 項程度を書き下して, Fourier 係数の**絶対値**の減少を確かめることが重要である[†165].

問題 11. [1 次関数 (2)] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された関数

$$|x| = \begin{cases} -x & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x < \pi) \end{cases} \tag{1.64}$$

を周期 2π の周期関数となるように, x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく. $f(x)$ の Fourier 級数が次式で与えられることを示し, 4 項程度を書き下して Fourier 係数の絶対値の減少を確かめよ.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \tag{1.65}$$

[方針] $f(x)$ の概形を描き[†166], 部分積分法[†167] を用いて, a_0, a_n, b_n を計算する:

$$a_0 = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] \ (n = 1, 2, \cdots), \quad b_n = 0 \tag{1.68}$$

[†163] これが, § 1.3.1 で初めに例示した関数 $f(x)$ の Fourier 級数展開に他ならない.

[†164] 図を描けば, $f(x)$ が**奇関数**であることがわかる. すると, $a_0 = 0$ と $a_n = 0$ の予想もつく.

[†165] [注意] この場合, **Fourier 係数が正値も負値もとる** (一般的性質) ので, "絶対値" とかいた.

[†166] この場合は, $f(x)$ は偶関数であるので, $b_n = 0$ の予想もつく.

[†167] [復習] 部分積分 (partial integral) の公式を万一忘れても, 一瞬で再現できる. すなわち,

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{1.66}$$

のように積の微分を行い, $[a, b]$ で両辺を定積分すると

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x \tag{1.67}$$

ここに, ダッシュ記号 ($'$) は微分演算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ である. [注意] 本資料では, 微分操作を意味するダッシュ記号は用いずに, **「どの変数で微分するのか」を明示すべく**, $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ と書くことの方が多い. 面倒でも, これに慣れることは重要であって, 多変数関数に支配される後半の講義までゆけば, その意義が理解できるだろう.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

a_n **の分子を注意深く見れば, 問題 5 と問題 6 と同様に** n **の偶奇によって場合分けの必要性**を感じる. そこで, $n = 2k - 1$ と置き換えて, 題意 (1.65) に整えよ.
[注意] このように, **同じ 1 次関数であっても, 周期的拡張の方法によって, その Fourier 級数は大きく異なる**のである [†168].

問題 12. [2 次関数] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された関数 x^2 を, 周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に拡張して作られる関数を $f(x)$ とおく. $f(x)$ の Fourier 級数が

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \tag{1.69}$$

となることを示し, ふるまいを論ぜよ. [方針] 概形を描いた後に係数を求めると

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \ (n = 1, 2, \cdots), \quad b_n = 0 \tag{1.70}$$

となる. 問題 10 と同様に, 偶奇で場合分けする必要はない [†169].

§ 1.4.3 まとめ

Fourier 級数には多数の性質がある. 1 つ, 例題形式で調べておく.

問題 13. [級数の初項の意味] 命題「周期 2π の周期関数 $f(x)$ の**平均値は, その Fourier 級数の初項** $a_0/2$ **に等しい**」を示せ [†170]. [証明] 平均値は, Fourier 級数 (1.33) の両辺を $[-\pi, \pi]$ で積分し, 1 周期 2π で割ることで得られる. すなわち,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \mathrm{d}x \tag{1.71}$$

右辺を項別積分し [†171], 三角関数が周期関数であることを思い返すと, 題意に至る:

$$(\mathrm{RHS}) = \frac{1}{2\pi} \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x + \frac{b_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \tag{1.72}$$

[†168] [重要] その本質は, 奇関数, 偶関数のいずれとなるように拡張するかにある.

[†169] **[重要]** つまりは, $(-1)^n - 1$ のような項があるときのみ, 場合分けして, 簡潔な表現に整理すればよい. この場合は, 全ての自然数 n に対して級数の項が対応する.

[†170] [簡単な例] 三角関数 $\sin x$ と $\cos x$ の平均値はゼロであるし, その Fourier 級数の初項もゼロであるから (計算によって確かめよ), 三角関数について, この命題 (proposition) は正しい.

[†171] [注意] 繰り返すが, 項別積分の妥当性の検証は後回しとする. この意味で, 本問題文を「**項別積分可能な関数** $f(x)$ の ⋯ 」と書き換えてもよい.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

本章を終えるにあたって, 本質的な事項や軽微な計算テクニックを, 以下に列挙しておこう:

- **周期関数を三角関数の重ね合わせ (線形結合) として表現する**のが Fourier 級数 (無限級数) であって, その特徴は, Fourier 係数 a_0, a_n, b_n に集約される.
- 有限の区間で与えられた関数を, 周期的に拡張して周期関数を作る.
- 展開したい関数が, 偶関数か, 奇関数か, いずれでもないかを観察する [†172].
- a_0 と a_n $(n \geq 1)$ は別々に積分計算せねばならない.
- (1.29)–(1.31) の積分記号の前の $1/\pi$ は邪魔なので, 積分計算の前に両辺に掛けておくと, ミスを防ぎやすい [†173].
- $\cos n\pi = (-1)^n$ を使いこなし, $\sin n\pi$ に注意する.
- Fourier 係数を求めた結果, n の偶奇に応じて多数の項がゼロになる場合は, 新しい自然数 k を用いて $n = 2k - 1$ と置き換えるとよい [†174].
- **Fourier 係数には, n の増加にともなって減少する**性質がある [†175].
- 部分和の項の数を大きくしてゆくと, 部分和は元の関数へと近づく.
- **不連続関数であっても Fourier 級数に展開できる (Taylor 級数からみれば, 不連続関数は門前払い**である). 工学応用上, 極めて有用な級数といえる.
- 項別積分の妥当性や, Fourier 級数の収束定理などは, まだ触れていない [†176].

[†172] 積分計算がラクになる可能性がある.

[†173] ただし, **最後に π で割ることを忘れてはならない** (言われるまでもないと思うかもしれないが, 当の金川も, よく間違える).

[†174] これは必然ではないが, 級数を簡潔かつ的確な表現に書き換えるという意味において重要であるため, 試験においても出題する.

[†175] いいかえれば, 分母に n を含むのである. **この観点からの検算を怠らなければ, 計算ミスは自ずとゼロへと収束する**.

[†176] 現時点では気にしなくても問題はない (§ 3.1 で詳述).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 2　複素 Fourier 級数

小難しげな複素数 [†177] をあえて持ち込む理由はどこにあるのか [†178]．数学的に便利であるばかりでなく, 物理的意味が見えやすくなるからである [†179]．複素数を導入する意義は以下の 2 点である: (i) **三角関数の面倒な計算が著しく容易になる** [†180]. (ii) Fourier 級数を複素形式に拡張しておけば, **「複素 Fourier 係数」の延長線上にある「Fourier 変換」**がすぐさま理解できる [†181]．これらの意味で, 複素数への拡張とは, 複素数の復習に時間を割いても惜しくないほどの価値がある [†182].

[†177] [注意] 以下で現れる "複素関数" という用語は,「複素関数」の講義で現れる "複素関数" と同一である．もちろん,「複素関数」の知識は前提とせず, 本資料内で補う．

[†178] 教科書 (2.5 節) での扱いは小さいが, とくに**応用を考える上では極めて重要な本質**といえる．

[†179] [発展] 複素 Fourier 級数のすぐ先にある Fourier 変換も Laplace 変換も, 複素数の値をとる．したがって, その物理的意味にも, 複素数が介入する．

[†180] sin や cos の微積分の際に, ± 1 が現れることに神経を払う労力から解放される．

[†181] **[重要] 複素 Fourier 係数という離散的な (飛び飛びの値をとる) 数列 c_n が, Fourier 変換という連続的な関数 $F(k)$ に対応する**．天下りでも, 表式を眺めて類似性を見出そう:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x}_{\text{同じ}}, \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x}_{\text{同じ}}$$

c_n は n に対する数列だが, $F(k)$ は k に対する関数である．飛び飛びの $n = 1, 2, \cdots$ ではなく, 全ての n を考える関数こそが Fourier 変換である．積分範囲にも違いがある (後述)．なお, 係数の差異は, 本質とは程遠い (記号の定義などは後述)．[補足] n や k は周波数や波数 (波長の逆数) に対応づけられる．

[†182] **[復習 (全て確かめよ)]** 複素数 (complex number) の基礎事項を, 高校レベルも含め列挙する: (i) 複素数 z は, 実数 x と実数 y および虚数単位 $i \equiv \sqrt{-1}$ を用いて, $z \equiv x + iy$ と定義される (x と y は定数でも変数でもよいが, これらが**ともに変数のとき z は複素変数**となる). (ii) 第 1 項 x を実部 (real part), 第 2 項 iy を虚部 (imaginary part) という．(iii) 実部を $\mathrm{Re}[z] = x$ とかき, 虚部の i の係数を $\mathrm{Im}[z] = y$ とかく (i を含まない虚部の表現)．この表記によって, **複素数 z から, 2 つの実数 $\mathrm{Re}[z]$ と $\mathrm{Im}[z]$ を取り出せる**．(iv) $z_1 = z_2$ ならば, $\mathrm{Re}[z_1] = \mathrm{Re}[z_2]$ かつ $\mathrm{Im}[z_1] = \mathrm{Im}[z_2]$ である (複素数の相当)．(v) $y = 0$ のとき $z = x$ すなわち実数となるし, $x = 0$ のとき $z = iy$ すなわち純虚数 (pure imaginary) となる．(vi) 複素数には, 2 つの実数 x と y を, 複素数 $x + iy$ という**「1 つの数」に集約する**意義がある．(vii) z の虚部の符号を変えたものを, **複素共役 (共役複素数)**(complex conjugate) といい, $\overline{z} \equiv x - iy$ と定義される．[注意] 複素共役を明示する記号は, 書物によって異なる (z^* など)．(viii) **複素数とその複素共役の積 $z\overline{z}$ は複素数の大きさの 2 乗 $|z|^2$ に等しい**: $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. (ix) 積の共役は共役の積に等しい: $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 2.1　複関数の基礎から Euler の公式へ

§ 2.1.1　用語——実数値関数, 複素数値関数, 複素関数——

本講義 (のとくに以下の部分) で扱う関数は, その取る値が実数であったり複素数であったりと混乱の恐れがあるので, 以下の 3 通りの関数を導入する [†183][†184].

1) 実数値関数: 実変数 x と実変数 y の関係を対応づける [†185]:

$$y = f(x) \tag{2.1}$$

すなわち, **「1 つの実変数に対して 1 つの実変数が対応」**する [†186].

2) 複素数値関数: 実変数 x と複素変数 w の関係を対応づける:

$$w = f(x) \tag{2.2}$$

すなわち, **「1 つの実変数に対して 1 つの複素変数が対応」**するが, 複素数は $w = u + iv$ と, 2 つの実変数 u と v を用いてかけるため [†187], 「1 つの実変数に対して 2 つの実変数を対応」づけるものとも言い換えることも可能である [†188].

3) 複素関数: 複素変数 z と複素変数 w の関係を対応づける:

$$w = f(z) \tag{2.3}$$

---

†183 大まかに言って, これまで諸君が用いてきたのが実数値関数で, 本講義で用いるのが複素数値関数である. 複素関数は用いないが, 複素数値関数との差別化の意味合いがある (なお, 逆 Laplace 変換において複素関数が現れるが, 本講義ではここに踏み込まない).

†184 [注意] 実数値関数, 複素数値関数, 複素関数とは, 差別化のための用語に過ぎず, 難しく考える必要もないし, 用いなくともよい. また, 以下の説明では, 変数と変数の対応関係 (関数あるいは写像) を表す記号に, 区別せずに f を使う.

†185 [用語] このような言い回しにおいて, 指定する側である x を独立変数 (independent variable), 関数 f に放り込んで出力される y を従属変数 (dependent variable: 未知変数) という. さらに, x のとる範囲を定義域 (domain), y のとる範囲を値域 (range) とそれぞれよぶ.

†186 「1 変数の実数値関数」ともいう.

†187 [用語] 実変数と実定数では意味合いが異なるように, 複素変数と複素定数も異なる (複素定数というならば, 実部も虚部も定数でなければならない). ただし, 「複素数」という大きな表現に, 変数と定数を区別せず, 複素変数も複素定数も集約してしまうことも多い. 用語が重要なのではなく, **1 つ 1 つの記号が変数か定数か, また, 複素数か実数かを区別**することだけが重要である. [補足] そもそも, 定数を変数の一部 (特殊な場合) に含めてもよい.

†188 虚部が $v = 0$ のとき, w は実数になるので, **実数値関数は複素数値関数の一部**である. それゆえ, この拡張はごく自然といえる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

すなわち,「1 つの複素変数に対して 1 つの複素変数が対応」するが, やはり, 複素変数 $z = x + iy$ は 2 つの実変数 x と y を用いてかけるし, $w = u + iv$ も u と v に分解できるので,「2 つの実変数に対して 2 つの実変数を対応」づけるものとも言い換えられる †189.

以上より, 注意すべきは, **「複素数値関数と複素関数の決定的な差異」** †190 にあることがわかる. 複素数を考えたとしても, 虚部がゼロになれば, 複素数は実数に帰着する [†182 の (v)]. 以降の議論において,「一般に複素数値関数を考える」と振りかぶることが多いが, 本資料の範囲では, 実は, 虚部がゼロになることが判明し, 実数値関数に帰着することがほとんどである.

§ 2.2 で学ぶ複素 Fourier 級数において, 複素数値関数を取り扱う †191.

§ 2.1.2　Euler の公式

つぎの極めて便利な指数関数 e^{ix} を**定義する** †192:

$$e^{ix} \equiv \cos x + i \sin x \tag{2.4}$$

定義なのだから**記憶が必須**である. x は実変数であり, e^{ix} はその右辺を見ればわかるように複素数値関数である †193. (2.4) は Euler の公式 †194 とよばれ, **われわれに馴染み深い三角関数を用いて, 複素数に拡張した指数関数を定める**ものであ

---

†189 [注意] こう聞くと, 2 変数関数 (解析学 II) と同一視しかねないが, **複素関数と多変数関数は全く異なる**. 1 つの複素変数と 1 つの複素変数を対応づける複素関数は, 1 変数関数といえる.

†190 [注意] これを勘違いする者は極めて多い. ただし,「複素関数」が市民権を得た数学用語である一方で,「複素数値関数」という表現は使わないことも多い.「いくつの実数 (複素数) に対していくつの実数 (複素数) が対応するか」だけを注視すればよい.

†191 しかし, 本題は, 複素 Fourier 係数からの自然な拡張として定義される, Fourier 変換と Laplace 変換である. Fourier 変換, 逆 Fourier 変換, Laplace 変換, 逆 Laplace 変換は, それぞれ, 実数値関数, 複素数値関数, 複素関数のいずれか. 学んだ後に振り返ってみるとよい.

†192 e^{ix} を複素指数関数ということもある (使わないことも多い).「力学」ですでに天下りに学んだと聞いているが, 本講義でも天下りの立場をとらざるを得ない.

†193 1 つの実変数 x に対して, 1 つの複素数値関数 $\cos x + i \sin x$ が対応している.

†194 公式とよばれるのだから, 実は, 定義ではなくて結果である. しかしながら,「複素関数」を学んでいない状況下では, 定義とみなすよりないのである. [発展] 複素変数 z に対する指数関数 e^z の定義が前提となる. ここに, e^z は複素関数であって, 複素数値関数 e^{ix} ではない. 複素関数 e^z において, z の実部がゼロとみなせる場合が, 複素数値関数 e^{ix} に相当する.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

る[†195][†196][†197][†198]. ここに, i は次式で定義される**虚数単位**である[†199][†200]:

$$i \equiv \sqrt{-1} \quad (i^2 = -1) \tag{2.9}$$

(2.4) は, 成り立ちよりも**使いこなすことが (本講義ではとくに) 重要**である[†201].

---

†195 **[解析学の既習範囲で説明する]** (2.4) の証明は複素関数の講義にゆずるが, 今すぐに理解したい者は, 次の手順にしたがえば「なんとなくは」納得できる: (i) 実変数 x に対する (実数値関数としての) 指数関数 e^x の Maclaurin 展開を書き下す ($0! \equiv 1$ および $1! = 1$ に注意):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.5}$$

(ii) 三角関数 $\sin x$ および $\cos x$ の Maclaurin 展開を書き下す:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2.6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{2.7}$$

(iii) (2.5) で, 実数 x を純虚数 ix とおき, 実部と虚部にわけて, 実部に (2.7) を, 虚部に (2.6) を, それぞれ代入すると, (2.4) の等号が “納得” できる.

†196 [用語] Maclaurin (マクローリン) 展開とは, $x = 0$ まわりでの Taylor 展開のことである. 原点 (力学的にいえば, 平衡点) 周りの場合, いちいち「$x = 0$ まわりの Taylor 展開」と書く面倒を避けて, Maclaurin 展開と簡潔にいうことができるが, この用語を用いなくともよい.

†197 [発展] †195 は, 証明ではなく, あくまで説明にすぎない. なぜならば, **(2.5) は実数値関数に限定して定義される指数関数 e^x であるがゆえに, 実数 x を純虚数 ix とおく操作は (厳密な意味で) 許されるはずがない**. その意味で「なんとなく」と書いたのである.

†198 [発展] 「複素関数」で学ぶように, 複素変数 $z (= x + iy)$ に関する (複素関数としての) 指数関数 e^z の Maclaurin 展開は, 実は, (2.5) と同様の表式となる:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{2.8}$$

ここで, $z = x$ すなわち実部のみを考えると, (2.8) は (2.5) に帰着する. すなわち, (2.8) とは (2.5) を包含する. 逆にいえば, (2.5) を複素数まで一般化したものが (2.8) といえる. ここに, 指数関数を, わざわざ, 実数値関数から複素数値関数さらには複素関数まで拡張する意義がある.

†199 [補足] 電気工学や制御工学では, 虚数単位 (imaginary unit) に, 記号 i ではなく j を使うことが多い. 電流 (current) に記号 i を使うからといわれる.

†200 [補足] 2 乗の $i^2 \equiv -1$ を定義と思ってもよい.

†201 定義と言われたのだから覚えるしかないともいえるが, たとえ定義の背景に違和感を感じたとしても, 暗記を推奨するほどに頻用する公式なのである.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 2.1.3　三角関数の指数関数による表現

Euler の公式 (2.4) にしたがって, e^{ix} とその複素共役 e^{-ix} を書きだしてみる:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{2.10}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{2.11}$$

これらを組み合わせると, 三角関数の複素指数関数による表現をうる [†202][†203]:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{2.12}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{i(e^{-ix} - e^{ix})}{2} \tag{2.13}$$

右辺の i を見て, 右辺が複素数値関数であると勘違いしてはならない. **左辺が実数値関数なのだから, これと等号で結ばれる右辺も実数値関数**に他ならない [†204].

問題 14. (2.12)(2.13) を導け.

§ 2.1.4　導関数と定積分

複素指数関数について, 実指数関数と同様につぎの導関数公式が成立する [†205][†206][†207]:

$$\frac{\mathrm{d}e^{Dx}}{\mathrm{d}x} = De^{Dx} \tag{2.15}$$

---

†202 [用語] (2.12)(2.13) を de Moivre (ド・モアブル) の公式とよぶことがあるが, 本資料では, これらも Euler の公式とよぶ. 実質的には, Euler の公式 (2.4) そのものといえるからである.

†203 [重要] 複素 Fourier 級数の伏線となる.

†204 **[重要]** 複素数 e^{ix} と複素数 e^{-ix} の和が実数 $2\cos x$ となる. Euler の公式 (2.4) を用いて右辺を変形すれば, 虚部の全てが消えて, 実数 (左辺) に帰着することを確かめよ. [注意 1] 虚数単位が含まれているからと言って, それだけで安易に複素数と判断してはならない. [注意 2] **複素数と複素数の和が実数になることはあっても, 実数と複素数が等号で結ばれることはありえない.**

†205 本章の計算において多用する. これも, (現時点では) **使いこなすことの方が重要**といってよい.

†206 複素定数 D が実定数の場合 $(D = A)$, 純虚数の場合 $(D = iB)$ には, それぞれ,

$$\frac{\mathrm{d}e^{Ax}}{\mathrm{d}x} = Ae^{Ax}, \quad \frac{\mathrm{d}e^{iBx}}{\mathrm{d}x} = iBe^{iBx} \tag{2.14}$$

となる. 前者は実指数関数の導関数公式と全く同じであって, 後者は**純虚数に拡張されている (よく使うのはこれである)**.

†207 [注意] 複素変数 $z = x + iy$ による微分 $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ ではなく, 実変数 x による微分 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ であることに注意を要する. 前者は複素関数の講義で学ぶ (本講義では用いない).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

ここに, $D=A+iB$ は複素定数 (複素数の定数) であって, A と B は実定数 (実数定数) である. 積分についても, 次式が成立する:

$$\int_a^b e^{Dx}\mathrm{d}x=\frac{1}{D}\left[e^{Dx}\right]_a^b \tag{2.16}$$

すなわち, D が実定数の場合と全く同じに微積分を行ってよい†208†209.

問題 15. (2.15) を示せ†210. [証明] Euler の公式 (2.4) を使うと複素指数関数 e^{Dx} は

$$e^{Dx}=e^{Ax+iBx}=e^{Ax}e^{iBx}=e^{Ax}(\cos Bx+i\sin Bx) \tag{2.17}$$

と書ける. もはや, 虚数単位 i 以外は複素数を含まない形に変形できたので, 実数値関数としての指数関数に対する微分公式 (既習) を用いるだけである:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e^{Dx}}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{Ax}(\cos Bx+i\sin Bx)\\&=Ae^{Ax}(\cos Bx+i\sin Bx)+e^{Ax}B(-\sin Bx+i\cos Bx)\\&=(A+iB)e^{Ax}(\cos Bx+i\sin Bx)=De^{Ax}e^{iBx}=De^{Dx}\end{aligned} \tag{2.18}$$

§ 2.1.5　複素数の意義 (1)——簡便な微分演算——

あえて, 複素数で表現する意義の 1 つ目は, 微分の演算にある. 実数値関数 $e^{-ax}\sin kx$ の 2 階導関数を求めたいとする (a と k は実数定数). 積の微分公式を用いて実直に計算してもよいが, いささか計算量が多く, 計算ミスも懸念される.

そこで, Euler の公式 (2.4) から逆算して, $e^{-ax}\sin kx$ に対応する複素数値関数 $e^{-ax}e^{ikx}$ を考えてみる†211. これを微分するのである:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-ax}e^{ikx}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{(-a+ik)x}=(-a+ik)e^{(-a+ik)x} \tag{2.19}$$

†208 この意味でも, e^{ix} の定義 (2.4) に矛盾がないこと, あるいは, この定義の正当性が予想される.

†209 [発展] 複素数が現れているからといって, これを,「複素関数」で学ぶ複素積分と安直に勘違いしてはならない. 複素積分とは, 複素変数 z の関数 $f(z)$ に対して, $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ と計算されるものである (C は積分経路). すなわち,「**複素数** z **で積分**」するのである. (2.16) は, D に虚部は含むけれども,「**実数** x **で積分**」**しているのだから実積分に他ならない**. [発展]「応用数学 (前半)」の最後に扱う "逆 Laplace 変換" は複素積分に他ならないのだが,「複素関数」を並行履修中のため, 深入りは避ける.

†210 複素関数の講義の範囲ではあるが, 事実上の必修である.

†211 $e^{-ax}\sin kx$ は実数であるが, $e^{-ax}e^{ikx}$ は複素数である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

指数関数の微分はたやすい．2 階微分も，同様に $(-a+ik)$ が掛かるだけである[†212]:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}e^{ikx} = (-a+ik)^2 e^{(-a+ik)x} \tag{2.20}$$

ここで止めずに，実部と虚部にわけてみよう[†213]:

$$\begin{aligned} &= [(a^2-k^2) - i(2ak)](\cos kx + i\sin kx)e^{-ax} \\ &= [(a^2-k^2)\cos kx + 2ak\sin kx]e^{-ax} + i[(a^2-k^2)\sin kx - 2ak\cos kx]e^{-ax} \end{aligned} \tag{2.21}$$

もともと求めたいものは，$e^{-ax}\sin kx$ の 2 階導関数，すなわち，

$$e^{-ax}e^{ikx} = e^{-ax}\cos kx + ie^{-ax}\sin kx \tag{2.22}$$

の虚部に隠れていたことを思い返すと[†214]，(2.21) の虚部が答えに他ならない[†215][†216]:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}\sin kx = [(a^2-k^2)\sin kx - 2ak\cos kx]e^{-ax} \tag{2.24}$$

このように，解析的にというよりも，代数的に計算できてしまう[†217]．複素数は道具として有効に活用しているだけにすぎない．求めたいものは，あくまで実数値関

[†212] より一般化するならば，n 階の導関数も，$(-a+ik)^n e^{(-a+ik)x}$ と求まる．二項定理 (binomial theorem) を使えば，係数 $(-a+ik)^n$ を具体的に展開できる．実三角関数 sin と cos のままではどうだろうか．そもそも，n の偶奇を考えることすら億劫ではないか．

[†213] [重要] 「それなりの計算量があるではないか」と思うかもしれないが，2 次の公式と分配法則 (中学数学) だけで閉じている．もはや，高校数学 (三角関数) すら使わない．計算量ではなくて「微分が容易か否か」が重要なのである．

[†214] より詳しく書くと，以下の β が (2.24) に他ならない:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}e^{ikx}}_{\text{求めたもの (計算容易)}} \underbrace{=}_{\text{Euler}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}\cos kx + i\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}e^{-ax}\sin kx}_{\text{知りたいもの (計算困難)}} = \alpha + i\beta \tag{2.23}$$

[†215] ここで，決して虚数単位 i を答えに含めてはならない．求めたいものは，あくまで実数，すなわち虚数単位の係数である．

[†216] この計算を複素数に頼ることなく実行し，(2.24) との一致を示し，計算量を比較してみよ．

[†217] [発展] 複素数の方法が本領を発揮するのは，もっと高階の導関数においてといえる．試しに，4 階までの導関数を求めるための計算量が，複素指数関数に頼った場合と頼らない場合で，どれほどの差が出るだろうか．書き下してみよ．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

数であって, きちんと実数に戻ること [式 (2.24)] が重要である [†218][†219].

これを叶えてくれた Euler の公式 (2.4) の重要性を改めて強調しておく [†220].

§ 2.1.6 複素数の意義 (2)——物理的意味——

一言でいうならば, 「指数関数にひとまとめにする」, すなわち,

$$\underbrace{e^{-ax}}_{\text{減衰}}\underbrace{(\cos kx + i\sin kx)}_{\text{波}} = \underbrace{e^{(-a+ik)x}}_{\text{広義の「波」}} \tag{2.25}$$

である [†221]. これまで, われわれは, 三角関数を眺めた際には波 (振動) をイメージし, 指数関数 e^{-ax} を見たときに減衰を思い浮かべてきた [†222]. **両者を切り離して理解してきた**. そして, 指数関数と三角関数の積とは, 減衰振動 (振幅が減少してゆく振動) などに対応した [†223].

指数関数を複素数まで拡張したことで, **指数関数を「広義の波」とみなすこと**が可能となった. したがって, 以後, 指数関数を眺めたときに, 広い意味の波とみなしてよい [†224]. **「複素数値の指数関数 = 実数値の指数関数 + 実数値の三角関数」**

[†218] 繰り返すが, 複素数は目的ではない. **実数の計算を便利にする案内役以上ではない**. そもそも, われわれの世界に, 複素数などという概念はありえない.

[†219] [重要] もし, $e^{-ax}\cos kx$ の 2 階導関数も知りたくなったら, (2.21) の**実部を取ればよい**. したがって, 実は, **サインとコサインを同時に微分していた**ことになる. われわれが日常生活で用いない 1 つの複素数 $e^{(-a+ik)x}$ の中に, **われわれが使いたいと望む 2 つの実数 (実部と虚部) がきちんと含まれている**ことが重要である.

[†220] [まとめ] 三角関数の微積分とは, 負号の有無や正弦と余弦の移り変わりに神経を使う一方で, 指数関数の微積分は, e^{-ax} の $-a$ だけを見ておればよい. したがって, 三角関数から逃れて, **三角関数よりも微積分が容易な指数関数に頼りたくなる**のは自然な発想といえる. **三角関数が指数関数に変換してくれる公式 (2.4) によって, 三角関数の微積分は極めて容易になる**.

[†221] [注意] 減衰の場合は $a > 0$ である. 連想しやすい「減衰」を引き合いに出したが, もちろん, (振幅などの) 減衰の逆, すなわち, (振幅などの) 増幅を意味する $a < 0$ であってもよい.

[†222] イメージで済まさず, 実際に, 三角関数と指数関数のグラフを描いて復習することが望ましい. 三角関数の波形を見れば振動や波を表すことがわかるし, 指数関数とは何かの増幅や減衰を表すものであることも理解できる.

[†223] [例] 声 (音波: 空気の振動) は減衰振動である. 近くの者には声が届くが, 遠くの者には届かない. [例] コンクリート壁中を伝わる音では, 音が進むにつれて振幅が減衰する (**音が小さくなる**).

[†224] 本科目以外にもさまざまな科目で現れる. 振動工学や電気工学は代表例であるが, 量子力学では, そもそも, 虚数単位の存在こそが波を表すともいわれる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

と思ってよい[†225][†226].

§ 2.2　複素 Fourier 級数

§ 2.2.1　実 Fourier 級数から複素 Fourier 級数を導く

2π の周期をもつ実数値の周期関数 $f(x)$ に対する実 Fourier 級数 (1.33)[†227][†228]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.33}$$

が与えられたとき, 右辺の三角関数に Euler の公式 (2.12)(2.13)[†229] を代入すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}}_{\text{実部}} + \underbrace{b_n\frac{i(e^{-inx}-e^{inx})}{2}}_{\text{虚部}}\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

ここまで変形したところで, 具体的に数項を書き下そう[†230]:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{a_1 - ib_1}{2}e^{ix} + \frac{a_1 + ib_1}{2}e^{-ix} + \frac{a_2 - ib_2}{2}e^{2ix} + \frac{a_2 + ib_2}{2}e^{-2ix}\cdots \\ &= \cdots + \frac{a_2 + ib_2}{2}e^{-2ix} + \frac{a_1 + ib_1}{2}e^{-ix} + \frac{a_0}{2} + \frac{a_1 - ib_1}{2}e^{ix} + \frac{a_2 - ib_2}{2}e^{2ix} + \cdots \end{aligned} \tag{2.27}$$

[†225] [重要] 指数関数を複素数に拡張したことで, **三角関数は指数関数の一部**となった. したがって, 以後, **指数関数を見たときには, 増幅や減衰のみならず, 振動や波を連想**する必要がある. そして, 指数関数は微積分が容易であるがゆえに, **波の物理的表現も簡単になる**のである.

[†226] [補足] 本節では空間を思わせる記号 x で e^{ikx} を述べたが, むろん, 時間 t に置き換えてもよい. その場合, 波数 $k = 2\pi/\lambda$ のかわりに (λ は波長), 角振動数 ω を用いて, $e^{i\omega t}$ などと書く.

[†227] [用語] 複素 Fourier 級数との混同を避けるべく, 以後, **Fourier 級数を「実 Fourier 級数」, Fourier 係数を「実 Fourier 係数」**とそれぞれよぶ.

[†228] 当たり前のように総和記号で表現したが, まだ理解していないならば, いきなりこれを書き下すのではなく, いちいち, 実 Fourier 級数の成り立ちすなわち三角関数の線形結合の根拠 (§ 1.3.1) にまでさかのぼって書き下すことを強くすすめる.

[†229] [コツ] これはその場で導くことをすすめる. 数秒で出来るし, 覚えようとすると, 虚数単位 i と負号の位置を間違える恐れがある. **Euler の公式 (2.4) だけ覚えればよい**のである.

[†230] 書き下すと, 本来は $1 \leq n < \infty$ のはずが, 一見 $-\infty < n < \infty$ のように見えてしまうことが重要である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

2行目のように項の順序を入れ替えて, 指数関数 $e^{\clubsuit ix}$ の $\clubsuit$ に注目すれば, $\cdots$, -2, -1, 0, 1, 2, $\cdots$ と規則的に並んでおり, 差異は係数の分子の $a_n \pm ib_n$ だけである. そこで, 実 Fourier 係数 a_n と b_n を振り返る必要性に気づく. すなわち, **「正の $n \geq 0$ で定義した実 Fourier 係数を, 負の整数 $n \leq -1$ まで拡張できないか」**と思い立つ [†231]. (1.30)(1.31) において, n を $-n$ とおいてみると,

$$a_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(-n)x\,\mathrm{d}x = a_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.28}$$

$$b_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(-n)x\,\mathrm{d}x = -b_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.29}$$

がわかる [†232]. $a_n = a_{-n}$ と $b_n = -b_{-n}$ を (2.27) に代入すると,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cdots + \frac{a_{-2} - ib_{-2}}{2}e^{-2ix} + \frac{a_{-1} - ib_{-1}}{2}e^{-ix} \\ &\qquad + \frac{a_0 - ib_0}{2}e^{0ix} + \frac{a_1 - ib_1}{2}e^{ix} + \frac{a_2 - ib_2}{2}e^{2ix} + \cdots \\ &= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}}_{-\infty\text{ から}} \frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned} \tag{2.30}$$

この最右辺を**複素 Fourier 級数**という [†233†234]. 複素 Fourier 係数 c_n は複素数列であって, 最後の等号のとおりに, 実 Fourier 係数 a_n と b_n すなわち2つの実数列を

[†231] **[重要] 実 Fourier 級数の総和の範囲は $n \geq 1$ であるがゆえに, 実 Fourier 係数 a_n と b_n も $n \geq 1$ に定義を制限しただけである.** 単なる数列とみなすならば, $n < 0$ を妨げるものなど何もない. [注意] "Fourier 係数" という用語に捉われすぎると, 「勝手に拡張してよいのか」と思うかもしれない. a_n も b_n も単なる数列を意味する記号であって, n は数列の項の番号を表すものに過ぎない. 数列を単に再定義しただけと思えばよい.

[†232] [重要] この置き換えにしたがって, $n \geq 1$ に限って定義されていた係数 a_n と b_n が, $n \leq 0$ にまで拡張された. とくに, $n = 0$ の場合, a_0 は (1.29) のとおりで, b_0 はゼロであり (2.29) にきちんと含まれている (確かめよ). このゼロに意味があることにも, すぐに気づく.

[†233] [発展] 厳密には, $n = -\infty$ なる書き方は不適切で (**無限大とは, 概念であって数値ではない**), あくまで $-\infty$ に近づける極限であるので, 例えば, $f(x) = \lim_{N\to-\infty}\sum_{n=N}^{\infty} c_n e^{inx}$ と書くこともある.

[†234] [重要] 実 Fourier 級数の初項を, 先に確かめた $b_0 = 0$ と $(\sin 0x = 0)$, $e^0 = 1$ なる性質を用いて,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{a_0 - ib_0}{2}e^{0ix} \tag{2.31}$$

と書き換え, 総和記号を用いて, 他の項と同様の形に整理した.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

用いて定義される [235]:

$$c_n \equiv \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \underbrace{(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)}_{\text{全ての整数}} \tag{2.32}$$

虚部 $ib_n/2$ が含まれているのだから, もちろん c_n **は複素数**である [236][237].

問題 16. 周期 2π の実数値関数が実 Fourier 級数に展開可能であるとする. (1.33) から出発して, 複素 Fourier 級数の形 (2.30) まで変形せよ.

問題 17. [複素 Fourier 級数の簡単な例] $\cos x$ の複素 Fourier 級数を求めよ.
[解] Euler の公式 (2.4) によって [238]

$$\cos x = \frac{1}{2}e^{-ix} + \frac{1}{2}e^{ix} \tag{2.33}$$

である [239]. この場合, $n = \pm 1$ 以外の項は全てゼロで, 無限級数ではなく, 2 項からなる有限項の級数である [240].

問題 18. 問題 17 と同様に, 次式 (複素 Fourier 級数の表式) を証明せよ [241].

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}(e^{-4ix} - 4e^{-2ix} + 6 - 4e^{2ix} + e^{4ix}) \tag{2.35}$$

---

[235] c_n は, (2.28) において, $n \leq 0$ に拡張した a_n と b_n を用いて定義したのだから, c_n も $n \leq 0$ で定義されるのは当然である.

[236] [記号] 複素数の表記を用いると, $\mathrm{Re}[c_n] = a_n/2$, $\mathrm{Im}[c_n] = -b_n/2$ である. この表記では, 虚数単位 i を含まないことに注意せよ.

[237] [疑問] $f(x)$ **が実数なのに** c_n **が複素数でよいのか**と思うかもしれない. よいのである. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ は, たしかに実数となってくれる (§ 2.2.3 で後述).

[238] 呆気にとられるかもしれない. つまりは, **Euler の公式も複素 Fourier 級数に他ならないの**である. この意味でも, 複素形の Fourier 級数の重要性が理解できる.

[239] [注意] 右辺に虚数単位が現れているが, もちろん右辺全体は実数である (確かめよ).

[240] たとえ有限項であっても, Fourier 級数とよんでよい. [補足] 実 Fourier 級数についても, 同様のことが言える. たとえば, 2 倍角の公式から導かれる次式も, 2 項からなる実 Fourier 級数である:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{2.34}$$

[241] [ヒント] sin の 4 乗を実数の範囲で計算するのはいささか面倒である. そこで, **Euler の公式を用いて,** $\sin x$ **を** e^{ix} **で表現しておけば, 4 乗程度の計算は何ら困難はない**. 実三角関数の公式を用いて, 膨大なべき乗計算を行う労力を割く意味でも, 複素指数関数 e^{ix} の意義と有用性が理解できるだろう. **あえて複素数に拡張することで, 一見ややこしくも感じるが, 計算がはるかに易しくなる**のである. [注意] やはり, 右辺が実数であることを確かめよ.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 2.2.2 複素 Fourier 係数の導出

実 Fourier 係数 a_n と b_n を $f(x)$ の定積分から与える公式 (1.30)(1.31) を, 複素 Fourier 係数 c_n に対しても導く.

a_n と b_n を求めるための面倒な三角関数の積分計算から逃れたいのが, 複素 Fourier 級数への拡張の動機の 1 つであった. しかし, (2.32) は, 複素 Fourier 係数 c_n を [†242], a_n と b_n を用いて定義する式であって, 複素 Fourier 級数展開したい関数 $f(x)$ に出会ったときに, その c_n を与えてくれるものではない [†243]. そこで, 書き換える必要があるが, これは易しい. 単に, a_n と b_n を与える式 (1.30)(1.31) を, (2.32) に代入するだけで [†244]

$$\begin{aligned}
2\pi c_n &= a_n - ib_n \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{[\cos(-n)x + i\sin(-n)x]}_{\text{Euler の公式を使えるように変形}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{2.36}$$

のように, あっという間に計算できた. 得られた結果をまとめておこう [†245][†246].

周期 2π の実数値関数 $f(x)$ の複素 Fourier 級数と複素 Fourier 係数 c_n

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{2.37}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.38}$$

[†242] [応用] 諸君も聞いたことがあるかもしれないが, 理工学では, c_n を**スペクトル** (spectrum) ともよぶ. [発展] スペクトル分解とは何か.

[†243] a_n と b_n を求めるための面倒な三角関数の積分計算が必要ならば, c_n の恩恵など何もない.

[†244] [コツ] 実 Fourier 係数の積分記号の前の $1/\pi$ が邪魔なので, あらかじめ左辺に π を掛けて, c_n の定義式 (2.32) の分母の 2 とあわせて, 2π とした.

[†245] **複素 Fourier 係数 c_n まで来れば, 目標とする Fourier 変換の一歩手前**である. ゴールは近い.

[†246] [注意] 実 Fourier 係数と異なり, **分母が $1/\pi$ ではなく $1/(2\pi)$ であることに注意**を要する. この「2」には意味がある. Euler の公式 (2.4) や総和の下限 $-\infty$ などの観点から考察してみよ. また, 複素 Fourier 級数の総和の下限が $-\infty$ であることを忘れてはならない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

“複素”Fourier 級数といわれたからといって, 安直に (2.37) の右辺が複素数だと思ってはならない. 左辺が実数値関数なのだから [†247], これと等号で結ばれている**複素 Fourier 級数は実数に他ならない** (§ 2.2.3 で詳述)[†248]. § 2.1.5 と § 2.1.6 で述べたように, e^{inx} などを見て, 三角関数を含んだ指数関数, すなわち「あくまで波を表しているのだ」とみなすことが重要である [†249].

問題 19. 周期 2π の実数値関数の複素 Fourier 係数 c_n を与える公式 (2.38) を, 実 Fourier 係数 a_n と b_n を与える公式 (1.30)(1.31) を利用して導け.

問題 20. 複素指数関数に対する三角関数の直交性を証明せよ (n と m は整数)[†250]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\mathrm{d}x = \delta_{nm}, \quad \left(\text{あるいは}, \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\mathrm{d}x = \delta_{nm} \right) \tag{2.39}$$

問題 21. 周期 2π の周期関数の複素 Fourier 係数を与える公式 (2.38) を, 複素 Fourier 級数 (2.37) から直接導出せよ. すなわち, 問題 19 の方法に頼らず, 直交関係式 (2.39) を利用して導け [†251].

§ 2.2.3　実 Fourier 級数にきちんと戻るのか

§ 2.2.1 では, 実数値関数の実 Fourier 級数を, 複素 Fourier 級数へと書き換えることに成功した. したがって, 複素 Fourier 級数から出発して, 実 Fourier 級数に戻ることは [†252], 当然といってよいだろう. しかしながら, その計算過程には, 重要な考え方や計算テクニックを数多く含むので, 問題の形式で確かめておこう [†253].

---

†247 [発展] 実は, $f(x)$ は, 実数値関数に限らず, 複素数値関数に対しても適用できる (後述).

†248 [用語] Fourier 級数の「複素表示」や「複素形式 (教科書)」などということもあったりと, 言い回しは書物によってさまざまである.

†249 複素数が現れたことで, 徐々に数学が一人歩きしているように感じるかもしれない. 複素数をあえて使うことで, より便利にしようとしているのである.

†250 †72 で述べたように, δ_{nm} は Kronecker のデルタ記号である.

†251 [方針] 実 Fourier 係数の導出 (§ 1.3.2) と同様の手順を用いよ. すなわち, 問題 4 のように, 複素 Fourier 級数 (2.37) の両辺に e^{-imx} を掛けて, 項別積分を実行せよ. また, **複素数に拡張したことで, 計算量が, 実 Fourier 係数の導出の場合よりも著しく軽減される**ことを確かめよ.

†252 すなわち, (i) 虚部が消えて, (ii) 総和の範囲が正の範囲に戻る, ことをいう.

†253 [補足] § 2.2.1 では実 Fourier 級数から出発したのは, 単純に計算が容易であるからでもあった. 実は, 本節の論法で, 複素 Fourier 級数を導入する書物の方が多いように見受けられる (すなわち, 複素 Fourier 級数を既知として, 実 Fourier 級数との関係を探る手法).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

問題 22. 周期 2π の実数値関数 $f(x)$ の複素 Fourier 級数を実 Fourier 級数に書き換えよ．すなわち，次式を示せ[†254]:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \underbrace{=}_{\text{題意}} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.40}$$

[証明] c_n の定義式 (2.32) と Euler の公式 (2.4) を複素 Fourier 級数に代入する[†255]:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n}_{\text{複素}} \underbrace{e^{inx}}_{\text{複素}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\overbrace{a_n}^{\text{実}} - i \overbrace{b_n}^{\text{実}}}{2} (\underbrace{\cos nx}_{\text{実}} + i \underbrace{\sin nx}_{\text{実}}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)}_{\text{(Re)}} + \underbrace{\frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)}_{\text{(Im)}}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

(準備 1) 三角関数の基本的関係:

$$\cos nx = \cos(-n)x, \quad \sin nx = -\sin(-n)x \tag{2.42}$$

(準備 2) 実 Fourier 係数を負の項まで拡張した関係 (2.28)(2.29)[†256]:

$$a_n = a_{-n}, \quad b_n = -b_{-n} \tag{2.43}$$

[†254] 実 Fourier 級数から複素 Fourier 級数への変形は解決済みである．そうではなく，**複素 Fourier 級数から実 Fourier 級数への変形，すなわち，題意の等号を左から右に示すこと**を問うている．

[†255] **[重要・式変形の方針]** (i) 1 行目から 2 行目: c_n と e^{inx} はともに複素数である．これらを**「実数に戻したい」**という動機を思い返す．そこで，複素数 c_n と e^{inx} を実数 a_n, b_n, $\cos nx$, $\sin nx$ と関係づける式を代入した．(ii) 2 行目から 3 行目: **「虚部は消えるはず」**という動機を思い返す．だからこそ，実部と虚部に分割すべきという発想に至る．(i) も (ii) も，動機付けを言われれば当たり前の変形に思えるだろうが，果たしてヒントなしに独力で可能だろうか．

[†256] これは，実質的に (2.42) と等価といえる (理由を考えよ)．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

(準備 3) $-\infty$ から ∞ までの総和に関する記号を, 3 通りに分割する [†257]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=0}^{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \tag{2.44}$$

$f(x)$ **は実数値関数なのだから, 当然, 虚部は消える**はずである. この予想を基に, 虚部をまず変形してゆこう. 虚部 (Im) において, $i/2$ の係数部分は,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) = \left(\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}}_{\text{(iii)}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{0}}_{\text{(i)}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}}_{\text{(ii)}}\right)(a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{2.45}$$

と 3 項に分割できる (総和が 3 通り). (i) $n = 0$ のときはゼロとなる [†258]. (ii) $n \geq 1$ の場合はそのままに留めておく:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{2.46}$$

(iii) $n \leq -1$ の場合が重要であって, 以下のように,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{-1}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \underbrace{[-a_{-n} \sin(-n)x + b_{-n} \cos(-n)x]}_{\text{(2.42)(2.43) を利用}} \\ &= \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty}(-a_\ell \sin \ell x + b_\ell \cos \ell x)}_{-n\equiv\ell\text{とおいた}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)}_{\text{もう一度 }\ell\equiv n\text{ とおく}}\end{aligned} \tag{2.47}$$

[†257] [注意] もちろん, これは解説のための形式的な数式である. 和をとる対象もなしに, 総和記号だけが単独で存在してはならない.

[†258] $\sin 0 = 0$ かつ $b_0 = 0$ ゆえにである. **後者が重要**である (当たり前と思わずに理由を振り返ってみよ).

最右辺では, $\ell = -n$ のおきかえに伴い †259, 総和の範囲が正値となる †260†261.

(i)(ii)(iii) をまとめて (2.45) に戻すと, 虚部 (Im) は, 綺麗さっぱり消滅する:

$$\frac{i}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx - b_n \cos nx) + 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)\right] = 0 \qquad (2.48)$$

虚部が消えたことで仕事の 7 割は終わったが, まだ安心してはならない. **実部の総和の範囲が実 Fourier 級数と異なるし, それゆえに総和記号の中に隠れている初項** $a_0/2$ **を抜き取る作業**も残っている. その式変形の処方箋は, 虚部のそれと何ら変わらないので一気に実行しよう:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=0}^{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\right)(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}[a_{-n}\cos(-n)x - b_{-n}\{-\sin(-n)x\}] \underbrace{+a_0}_{\text{残る!!}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\left[\underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty}(a_\ell \cos \ell x + b_\ell \sin \ell x) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}_{\text{同じものが 2 つ}}\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

したがって, 複素 Fourier 級数は実 Fourier 級数に帰着し, 題意は示された †262.

問題 23. 実数値関数の複素 Fourier 係数 c_n は,

$$\overline{c_n} = c_{-n} \qquad (2.50)$$

---

†259 [補足] 最後に ℓ を n とおきかえる操作は何の問題もない. n とは単に項の番号を明示するためのものでしかないからである. **わかりにくければ, あるいは, 違和感を感じるならば,** ℓ **とも** n **とも違う記号, たとえば** m **を新しく導入すればよい**.

†260 **[確かめよ]** 総和の範囲が, $-\infty < n \leq -1$ から $1 \leq \ell < \infty$ に変換された ($\ell = -n$ とおき, -1 を掛けただけである).

†261 脳内で出来る者も, 一度は書き下してやっておくべきである.

†262 本問題の要点は以下の 2 点に集約される: (i) 虚部の消去, (ii) **負の総和を正の総和に取り込む**.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

を満たさねばならない[†263]. これを示せ. [証明]

$$(\text{LHS}) = \overline{c_n} \equiv \overline{\frac{a_n - ib_n}{2}} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} \equiv c_{-n} = (\text{RHS}) \tag{2.51}$$

複素共役の定義にしたがい, 実数値関数の実 Fourier 係数が満たすべき性質 (2.28)(2.29) すなわち $a_n = a_{-n}$ と $b_n = -b_{-n}$ を代入した. [証明終][†264†265].

§ 2.3　計算例

いくつかの関数に対して, 実際に, 複素 Fourier 級数を求めよう.

問題 24. [重要・準備] 以降の計算で多用する次式を示せ (n は任意の整数)[†266].

$$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = \overline{e^{in\pi}} = \cos n\pi = (-1)^n \tag{2.52}$$

[略解] 容易であるが, 自身の手で確かめるべきである[†267].

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n \tag{2.53}$$

$$e^{-in\pi} = \cos(-n)\pi + i \sin(-n)\pi \, (= \cos n\pi - i \sin n\pi) = (-1)^n \tag{2.54}$$

$$\overline{e^{in\pi}} = \overline{\cos n\pi + i \sin n\pi} = \cos n\pi - i \sin n\pi \, (= e^{-in\pi}) = (-1)^n \tag{2.55}$$

[†263] [注意] 式 (2.50) に対する解釈と証明は, 書物によって異なることが多い. その意味で, 何か 1 つの方法で証明できればよい. [補足] 複素共役を表す記号は $*$ などもある (書物に依存).

[†264] **[重要・意義] 実数値関数の複素 Fourier 級数は, もちろん実数**である. 問題 22 を解き終わったわれわれにとっては, これを「当たり前だ」といえるが, そのための前提はどこにあったか. それは, **実 Fourier 係数の項番を負値まで拡張する関係 (2.28)(2.29) の成立**に他ならない (実数値関数の実 Fourier 係数は, そもそも, 自然数 n に対して定義されていたことを思い返そう). 複素数としての複素 Fourier 係数 c_n を用いれば, **それほどまでに重要な (2.28)(2.29) を 1 つの式に集約できる**. 2 つの実数を用いるよりも, 1 つの複素数を用いる方が便利極まりない.

[†265] [注意] 「実数値関数の ⋯ 」や「複素 Fourier 級数に ⋯ 」といった, くどくて細かな言い回しを必要以上に厳密に感じて, 使うことを恐れてしまうかもしれない. 複素数は道具に過ぎずゴールでもないが, **複素数を有効に Fourier 級数へと活用し, その先にある Fourier 変換までをも目指す立場からは, 複素数としての係数 c_n の形に整理しておくことは必須**である. 本質が (2.28)(2.29) にあることを知っていればたやすい. 読み流して理解できるほど容易ではないが, 決して難しくはなく, 事実, **式変形はたった 1 行で済んでいる**ことに注目しよう.

[†266] [注意] これは, π という特殊な数値 (数字) に対して成立するものであって, $e^{in\pi}$ は, 関数ではなく, n に対する数列である. **関数 (あるいは関数列) e^{inx} と数列 $e^{in\pi}$ を混同してはならない (数値 π と変数 x は**, 意外とうっかり間違えやすいので軽視しない).

[†267] [復習] $\cos n\pi = (-1)^n$ と $\sin n\pi = 0$ を思い返す (ここでは n を自然数に限定する必要がない).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

問題 25. [問題 10 の複素版] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された実数値の 1 次関数 x を, 周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に周期的に拡張して作られる関数 $f(x)$ の複素 Fourier 級数を求めよ. [解] 複素 Fourier 係数 c_n は, (2.38) を用いて †268†269,

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\mathrm{d}x = \left[x\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\mathrm{d}x$$

$$= i\frac{\pi}{n}(e^{-in\pi}+e^{in\pi}) \underbrace{+\frac{1}{n^2}(e^{-in\pi}-e^{in\pi})}_{\text{(2.52) より実部消滅}} = i\frac{2(-1)^n\pi}{n} \tag{2.56}$$

となる †270. したがって, **本問題の場合, 複素 Fourier 係数 c_n は純虚数となった** †271:

$$c_n = i\frac{(-1)^n}{n} \tag{2.57}$$

実 Fourier 係数の場合と同様に, 分母に n が現れたので, $n=0$ の場合の c_0 を別途計算せねばならない †272. そのために用いる公式は, (2.38) に $n=0$ すなわち $e^{0x}=e^0=1$ を代入した次式である:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \tag{2.58}$$

本問においては, 奇関数の周期 2π での積分だから, 速やかに $c_0=0$ がわかる:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}x = 0 \tag{2.59}$$

†268 **[重要]** 周期的拡張にともなって, 関数の定義域が, $[-\pi,\pi]$ から, x 軸全体すなわち $(-\infty,\infty)$ となるのだから, 積分範囲も $(-\infty,\infty)$ に変わると安易に判断するのは, 典型的な誤答である. なぜならば, Fourier 係数を与える公式は, 三角関数の直交関係式, すなわち周期 2π での積分を根拠に導かれているからである. このように, "応用"数学といっても, **最低一度は公式を導いておかねば致命傷に至る (まさに, 公式の適用範囲を超えて用いるという最悪の事態である)**. 逆にいえば, それさえ怠らなければ, このような勘違いは自ら正すことが可能だろう.

†269 [コツ] やはり, 両辺に 2π をかけておけば, 記述量が軽減できる.

†270 $-1/i = -i/i^2 = i$ などの基本的な計算を怠らないこと.

†271 [重要] これは, $f(x)$ **が奇関数であるがゆえに**である. [補足] 純虚数とは, 実部がゼロの複素数をいう. 複素数と純虚数を同一視しない.

†272 [重要] すなわち, $-\infty < n \le 1$, $n=0$, $1 \le n < \infty$ の**計 3 通り**を考えるのである. **実 Fourier 係数とは異なり, n が負値をとる**ことに注意を要する.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

求めた係数 c_n を用いて, 複素 Fourier 級数は, 以下で与えられる:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}=i\underbrace{\sum_{n=-\infty\,(n\neq 0)}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}}_{n=0\ \text{を除外}} \tag{2.60}$$

実 Fourier 級数の場合と異なり, $n\neq 0$ に注意せねばならない†273†274.

さて, 具体的に 6 項程度を書きだしてみよう:

$$f(x)=i\left[-\underbrace{(e^{ix}-e^{-ix})}_{\text{対称}}+\underbrace{\frac{1}{2}(e^{2ix}-e^{-2ix})}_{\text{対称}}-\underbrace{\frac{1}{3}(e^{3ix}-e^{-3ix})}_{\text{対称}}+\cdots\right] \tag{2.61}$$

このように, $n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ と対称的に書きならべておくことが重要である†275. 実 Fourier 級数と同様に, 係数の絶対値の減少もわかる.

問題 26. [実 Fourier 級数への帰着を確認] 複素 Fourier 級数 (2.60) と実 Fourier 級数 (1.62) は, 複素数を用いるか否かの違いこそあれど, 同じ実数値関数 x の三角級数展開なのだから, 等価に違いない. すなわち, (2.60) の虚部は消えて, 総和の範囲も正に整理され, (2.60) は (1.62) に帰着せねばならない. これを確かめよ.

[証明] Euler の公式 (2.4) を用いて, ie^{inx} を実部と虚部にわけると,

$$f(x)=-\sum_{n=-\infty\,(n\neq 0)}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx+\underbrace{i\sum_{n=-\infty\,(n\neq 0)}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx}_{\text{消えるはず}} \tag{2.62}$$

---

†273 [復習] そもそも, 実 Fourier 級数における n とは, 自然数 n であって, $n=0$ を考える必要すらなかった. もちろん, **初項は a_0 だが, これは n に含めずに別途計算するものであって, あくまで $n\geq 1$ であった.**

†274 [注意] $n=0$ の場合は $c_0=0$ と求まったので, 総和記号下に $n\neq 0$ の注意書きは不要ではないかと思うかもしれない. **これは必須である.** 複素 Fourier 級数 (2.37) の総和の表記は, 「$-\infty$ から ∞ まで 1 ずつ足し合わせる」以上を, 残念ながら指示しない. 総和記号を使いながら, 第 0 項 $n=0$ の除去の明示は, (基本的には) できない. そこで, (2.60) のように, **仕方なく総和記号の下などに $(n\neq 0)$ と書くよりない.** ここが総和記号の表現の泣き所なのだが, (2.61) のように具体的に項を書き下せば, この悩みからは解放される.

†275 以下のように整理した. こう書けば後で役立つのである:

$$\begin{aligned}f(x)&=\cdots+(\text{第}-2\text{ 項})+(\text{第}-1\text{ 項})+(\text{第 }0\text{ 項})+(\text{第 }1\text{ 項})+(\text{第 }2\text{ 項})+\cdots\\&=(\text{第 }0\text{ 項})+(\text{第 }1\text{ 項}+\text{第}-1\text{ 項})+(\text{第 }2\text{ 項}+\text{第}-2\text{ 項})+\cdots\end{aligned}$$

今の場合は第 0 項がゼロとなったが, 一般には存在する.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

負の n の総和を正の n の総和に取り込むべく, 総和記号を分割する [†276]:

$$\sum_{n=-\infty\,(n\neq 0)}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \tag{2.63}$$

以降の式変形の処方箋は問題 22 と同じである. 次式のように虚部は消滅する [†277]:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\right)\frac{(-1)^n}{n}\cos nx &= \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{-\ell}}{-\ell}\cos(-\ell)x}_{n=-\ell\text{とおいた}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx \\ &= -\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{\ell}\cos\ell x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos nx = 0\end{aligned} \tag{2.64}$$

(2.64) を理解できれば, 実部の総和の範囲の整理など, たやすい [†278]:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{-\ell}}{-\ell}\sin(-\ell)x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx \tag{2.65}$$

これら (2.64)(2.65) を, (2.62) に戻すと, 実 Fourier 級数 (1.62) に帰着する:

$$f(x) = \underbrace{-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx}_{\text{このままでもよいが}\cdots} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx}_{(1.62)\text{ の形に整理}} \tag{2.66}$$

[†276] いまは, $n \neq 0$ なので, もちろん $n = 0$ は対象外である.

[†277] [基礎] 整数 ℓ に対して成立する $(-1)^{\ell} = (-1)^{-\ell}$ を用いた. [証明] 両辺に $(-1)^{\ell}$ を掛ければ, すぐさまこの等号成立が理解できる. ℓ に適当な整数を当てはめると簡便に理解できるだろう.

[†278] $\sin\ell x = -\sin(-\ell)x$ を用いるに過ぎない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

問題 27. [複素数への拡張によって計算量はどれほど低減されたか] 問題 25 で求めた複素 Fourier 係数 c_n を, $f(x)$ の定積分から求める公式 (2.38) に頼ることなく, 実 Fourier 係数 a_n と b_n を用いて c_n を定義する式 (2.32) から再導出せよ (すなわち, 実三角関数の面倒な積分計算を行う). 結果が (2.57) と等しいことを確かめよ †279.

問題 28. [問題 11 の複素版] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された実数値関数 $|x|$ を, 周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に周期的に拡張して作られる関数 $f(x)$ の複素 Fourier 級数を求めよ. [解] まずは複素 Fourier 係数 c_n を求める †280:

$$\begin{aligned}
2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{0} -xe^{-inx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} xe^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2(-1)^n - 2}{n^2} + \frac{\pi(-1)^n}{in} - \frac{\pi(-1)^n}{in} = \frac{2(-1)^n - 2}{n^2} \\
\iff \quad & c_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

やはり, 分母に n が現れたので, c_0 を別に計算する †281:

$$2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{0} -x\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi^2 \quad \iff \quad c_0 = \frac{\pi}{2} \qquad (2.68)$$

本問題の場合は, 係数 c_0 と c_n は実数となった †282. 複素 Fourier 級数は

$$\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}}_{(n\neq 0)\ \text{不要}} = c_0 + \underbrace{\sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{\infty} c_n e^{inx}}_{(n\neq 0)\ \text{必要!!}} \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=-\infty\ (n\neq 0)}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} e^{inx} \qquad (2.69)
\end{aligned}$$

である. ここで終えてもよいが, さらに整理できそうである. すなわち, 最右辺第 2 項の分子は, n が奇数の項のみ $(n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots)$ -2 という値をもつため, **新**

---

†279 [意図と方針] 問題 10 ですでに導いた a_n と b_n を, (2.32) に代入すればよい. そこで, a_n と b_n を求めるための計算量を振り返ってみよ. その結果, c_n を求める計算法として, (2.38) を用いた場合, (2.32) を用いた場合, どちらが簡便か, 容易か, 有用かなどを比較検討してみよ.

†280 [基礎・重要] x は奇関数であったが, $|x|$ は偶関数であること (示してみよ) に注意を要する.

†281 偶関数の積分公式を用いるとより簡便である.

†282 [復習] 定義式 (2.32) より明らかに, **複素 Fourier 係数は一般には複素数**である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

しい整数 $k\,(=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ を用いて [†283], $n=2k-1$ とおく [†284][†285]:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}e^{i(2k-1)x} \tag{2.70}$$

具体的に 5 項を書きだしてみよう [†286]:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}e^0-\frac{2}{\pi}\underbrace{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}_{k=1,\,0}-\frac{2}{9\pi}\underbrace{\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)}_{k=2,\,-1}-\underbrace{\cdots\cdots}_{k=3,\,-2,\,\cdots} \tag{2.71}$$

やはり, $\pm n\,[=\pm(2k-1)]$ での対称性, および, 係数の絶対値の減少が観察される.

問題 29. 問題 28 で求めた複素 Fourier 級数 (2.69) が, 問題 11 で求めた実 Fourier 級数 (1.65) と一致することを示せ [†287][†288].

問題 30. [**係数 c_n は実数か純虚数か**] 周期 2π の実数値関数 $f(x)$ の複素 Fourier 係数 c_n を考える. $f(x)$ が偶関数ならば c_n は実数となる. $f(x)$ が奇関数ならば c_n は純虚数となる. これらを証明せよ [†289]. [略解] c_n を与える (2.38) の e^{inx} をばらす:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\underbrace{\cos nx}_{\text{偶}}\,\mathrm{d}x+i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\underbrace{\sin nx}_{\text{奇}}\,\mathrm{d}x \tag{2.72}$$

[†283] [注意] **複素 Fourier 級数の場合は**, 負の整数 $k<0$ も考えるので, k **は自然数ではない**.

[†284] [確かめよ] $k=-2$ のとき $n=-5$, $k=-1$ のとき $n=-3$, $k=0$ のとき $n=-1$, $k=1$ のとき $n=1$, $k=2$ のとき $n=3$ などとなり, きちんと奇数の n の項のみを表現できている. 数字を見ると, $\pm k$ **と** $\pm n$ **が対称ではない**ことに注意を要するが, もちろん, 単なるおきかえによるものであって, 本質的問題ではない. [補足] もちろん, $n=2k+1$ などと置いてもよい.

[†285] [総和記号] $n=0$ **の場合もきちんと除外できており**, $k=0$ **でも発散しないので**, **もちろん**, $k\neq0$ **といった注意書きは不要**である ($k=0$ を含む).

[†286] 以下のように整理した:

$$=\cdots+(\text{第}-3\,\text{項})+(\text{第}-2\,\text{項})+(\text{第}-1\,\text{項})+(\text{第}\,0\,\text{項})+(\text{第}\,1\,\text{項})+(\text{第}\,2\,\text{項})+(\text{第}\,3\,\text{項})+\cdots$$
$$=(\text{第}\,0\,\text{項})+(\text{第}\,1\,\text{項}+\text{第}-1\,\text{項})+(\text{第}\,3\,\text{項}+\text{第}-3\,\text{項})+\cdots$$

[†287] [処方箋 1] 実は, (2.70) から実部・虚部にばらすのは面倒であって, n を k におきかえる前の **(2.69) から出発してみよ**. 問題 26 と同様に, 虚部がゼロとなることを示した後に, 実部を n の偶奇にしたがって場合わけして k を導入する. [注意] もし, (2.70) からばらそうとすると, 上手くゆかないはずであるが, これは決して誤りであることを意味しない. 級数の表現は人それぞれだからである.

[†288] [処方箋 2] 第 0 項すなわち $n=0$ の場合を考えることに注意せよ.

[†289] [意図] 問題 28 で前者を, 問題 25 で後者を, それぞれ既に確認している. このような具体例から一般化を目指す出題である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

(i) $f(x)$ が偶関数ならば, 虚部の被積分関数は奇関数ゆえにゼロとなり,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \left(= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \tag{2.73}$$

c_n は実数となる [†290][†291]. (ii) $f(x)$ が奇関数ならば, 実部の被積分関数は奇関数ゆえにゼロとなり, c_n は純虚数となる [†292]:

$$c_n = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \left(= \frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \tag{2.75}$$

問題 31. [複素数値関数][†293] 区間 $[-\pi, \pi)$ で定義された**複素数値関数** $e^{ix/2}$ を考え [†294], これが周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に拡張して作られる複素数値関数を $f(x)$ とおく. (i) $f(x)$ の複素 Fourier 係数が実数となることを示し, 以下の複素 Fourier 級数を導き [†295], 5 項を書き下せ [†296][†297]:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-2n}e^{inx} \tag{2.77}$$

---

†290 最右辺は, 偶関数の y 軸対称区間における定積分公式 (1.25) にしたがった.

†291 詳細に書いておこう:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数})\times(\text{偶関数})\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数})\times(\text{奇関数})\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数})\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{奇関数})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\text{偶関数})\,\mathrm{d}x = (\text{実数}) \end{aligned} \tag{2.74}$$

†292 [用語] 虚数, 純虚数, 複素数は異なる. いまさらではあるが注意せよ.

†293 内容はやや発展的であるが, 計算自体はたやすい.

†294 [記号] このように指数部が長い場合は, $\exp(ix/2)$ のように書くこともよいだろう. $\exp\theta = e^{\theta}$ である. ただし, 後者の場合は, 指数は添え字であって小さく書く必要がある.

†295 [重要] この場合は, 複素数値関数の複素 Fourier 級数であるので, 複素 Fourier 級数も複素数に他ならない. すなわち, 級数の虚部はゼロとならない.

†296 **実数値関数に対して導いた公式 (2.38) は複素数値関数に対しても適用できる**. これを示せ. [ヒント] 複素数値関数といっても, 実部と虚部はそれぞれ実数値関数に他ならない. すると ⋯

†297 [解の一部] やはり, $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ と並べることが重要である:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \left(\frac{2}{\pi}e^{ix} - \frac{2}{3\pi}e^{-ix}\right) + \left(\frac{2}{-3\pi}e^{2ix} + \frac{2}{5\pi}e^{-2ix}\right) + \cdots \tag{2.76}$$

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

(ii) (2.77) を利用し, 実数値関数 $\cos(x/2)$ と $\sin(x/2)$ の実 Fourier 級数を導け[†298][†299]:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1-4n^2}\cos nx\right] \tag{2.79}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n(-1)^n}{1-4n^2}\sin nx \tag{2.80}$$

[†298] [発展] 複素数の概念に頼ることなく [すなわち, 複素 Fourier 係数 (2.38) に頼ることなく], これらを導け. 実 Fourier 係数 (1.30)(1.31) に従って, 面倒な三角関数の積分計算を行い, 計算量を比較せよ.

[†299] [ヒント] 総和の範囲を自然数 n に整える. やはり, 以下のように総和記号を分解すればよい:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\right) a_n + a_0 = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\ell \equiv -n) \tag{2.78}$$

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 3　Fourier 級数の性質

Fourier 級数には, いくつかの重要な数学的性質がある. ここでは, 物理あるいは工学のための応用数学という観点から重要かつ主要な性質を精選し, 数学的厳密性と応用のバランスに留意しながら述べる [†300].

§ 3.1　Fourier 級数の収束定理

これまで, 与えられた関数がその Fourier 級数に収束するのかは問題としなかった. § 1.3 の初っ端で宣言したように, 大胆にも, 等号で結んできた.

収束性の一般的議論に現れる用語は難解かつ抽象的である反面, 知っておくべき**事実はあまりにも単純極まりない**. そこで, 厳密さを犠牲にしてでも, 先におおまかな結論を知ることに意味がある [†301]:

> $f(x)$ が **1 階微分可能**で, その不連続点が**無限個で "ない"** ならば, Fourier 級数は $f(x)$ に収束する. ただし, 不連続点においては, 真ん中 (右極限値と左極限値の平均値) に収束する.

つまりは, **大雑把に言って収束し, 注意すべきも不連続点だけ**といえる. Fourier 級数の懐は深く, 不連続点の存在すらも許容してくれて, 「平均値」というわかりやすい値に収束してくれるのである [†302].

理工学に現れる関数のほぼ全てが, この条件を満たしている [†303]. したがって, Fourier 級数に展開可能で, それは元の関数に収束する. したがって, なんとなくの理解で済ませたければここまででもよいのだが, 数学的に厳密に知りたければ, 以下で詳細に学ぼう [†304].

[†300] 実 Fourier 級数で議論を進めるが, 複素 Fourier 級数についても同様であるばかりでなく, 複素形の方が数式表現も簡潔となる. しかしながら, 複素数にどっぷりと浸かることを危惧する意味や, 複素形を不得手とする感想が多い意味で, 本資料では避ける.

[†301] このような態度で臨むことが許されるのは, Fourier 級数の特権といえる (Taylor 級数の議論では許されない). とにかく, 収束してしまうからである.

[†302] これは驚くべき事実である. **不連続点が 1 つでも存在すれば, 微分不可能であるがゆえに, Taylor 級数からは門前払いである**

[†303] 「工学で現れる関数のほとんどが ⋯ だから」と, 一見やさしい前置きをしてきたが, これは決して "難しいことは理解しなくてもよい" ことを意味しない. 以下の事項を理解するためには, さまざまな理屈への理解が必要不可欠であることに気づく. だからこそ, これまでも諸公式を丁寧に導いてきたのである. 「工学では ⋯ 」あるいは「"応用" 数学だから ⋯ 」などといって, 公式に数字を当てはめる操作だけでは, 数学は決して習得できない.

[†304] そもそも, 不連続点の取り扱いとは, 泥臭い数学 (応用数学) であって, 純粋数学者ではなくわれ

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 3.1.1　区分的に連続 (piecewise continuous)

具体的な数式が現れず, 高級感を漂わせる抽象的表現が続くが, **困難はない**[†305].

区間 $a \leq x \leq b$ で定義された関数 $f(x)$ が「区分的に連続」であるとは[†306], 以下を満たすことをいう:

(i) 有限個の不連続点しか持たない[†307].

(ii) それぞれの不連続点において**発散しない**. すなわち, 右側からの極限値と左側からの極限値が存在して[†308], ともに有限の値をとる[†309†310].

§ 3.1.2　区分的に滑らか (piecewise smooth)

「$f(x)$ が区分的に滑らか」であるとは[†311], **$f(x)$ とその 1 階導関数 $f'(x)$ が, ともに, 区分的に連続**であることをいう[†312]. $f(x)$ が区分的に滑らかならば, $f(x)$

われの主対象である. **工学で現れる関数に不連続点はつきもの**だからである (電気信号など).

†305 多数の目新しい用語が現れるが, § 3.1 では**用語とその意味を暗記する必要はない**. 試験では意味を与える (もちろん, 知っておくに越したことはない).

†306 **[(基礎) 連続関数]** ある区間 $[a, b]$ において, 1 本のつながった曲線で表現される関数を連続関数という (x, e^x, $\sin x$ など). ただし, この区間で無限大に発散する関数は連続関数とはいわない ($\tan x$ など).

†307 [噛み砕く] 有限個とは数えられる個数を指し, ものすごくざっくりいえば「たかだか数個」である. 有限個の対義語は無数 (無限大個) である. 数学の世界ならば「無限大」という概念は許されるが, われわれが目指す実際の応用において, 無数の不連続点を持つような関数に (基本的に) 遭遇するはずもない. したがって, 何の疑いもなく, (i) は満たされる.

†308 [極限値] たとえば, $f(x)$ の不連続点の 1 つを $x = x_0$ とおこう. 正の方向すなわち右側からの極限値 (右極限値) $f(x_0 - 0)$ と, 負の方向すなわち左側からの極限値 (左極限値) $f(x_0 + 0)$ は, 正の数 h を用いて, それぞれ,

$$f(x_0 - 0) \equiv \lim_{h \to 0} f(x_0 - h), \quad f(x_0 + 0) \equiv \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) \tag{3.1}$$

と定義される. [注意] $h > 0$ を保ちながら h がゼロへと近づく.

†309 [噛み砕く] 有限値をとるとは, その名のとおり, 発散しなければよいので,

$$|f(x_0 - 0)| < \infty, \quad |f(x_0 + 0)| < \infty \tag{3.2}$$

と数式表現される. やはり, 無限大の概念に (基本的に) 遭遇しないわれわれからは縁遠い.

†310 [注意] 収束性の議論は, †308†309 のような数式に頼るまでもなく議論することも可能である. それほどまでに, 用語の高級感とは裏腹に, 容易なのである. この意味で脚注に記した.

†311 **[(基礎) 滑らかな関数]** 関数とその 1 階導関数がともに連続な関数を意味する.

†312 [用語] これを Dirichlet (ディリクレ) 条件という. はじめて聞いた人名と想像するが, 今後, 諸君は, 後半の講義をはじめとして, Dirichlet には至る所で遭遇することとなる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

の Fourier 級数は, 以下のように収束する:

(i) 不連続な点 x_0 では, **右極限値と左極限値の平均値に収束**する:

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \tag{3.3}$$

(ii) それ以外の連続な点 x では, $f(x)$ に収束する.

これも, 驚くほどに易しい条件である. Fourier 級数は, **不連続点の存在を許容してくれる**のみならず, 大雑把にいえば, **たった 1 階だけ微分できれば収束してくれる**のである [†313†314].

§ 3.1.3 まとめ——Taylor 級数との比較——

Fourier 級数の収束性への理解を深めた結果, もはや, 「理工学に現れるほとんどの関数の場合は ⋯ 」などと振りかぶるまでもない. Fourier 級数とは, 元の関数にきわめて収束しやすく, それゆえに工学に利用しやすい. これを実感するには, Taylor 級数に対する厳しい収束条件と比較することが有効だろう [†315†316]. **Taylor 級数よりも, Fourier 級数の方が, はるかに収束しやすい** [†317].

最後に, ここでの定義を用いて収束定理を厳密に述べ直しておく [†318]:

[†313] [例] とがっていてもよい. [問] 具体的な関数を描いて確かめよ.

[†314] Fourier 級数の収束性の易しさは「微分に関する制約が極めて弱い」からといえる. 三角関数の積分だけで決まるのである.

[†315] [基礎] Taylor 級数は導関数 (微分) に支配される. すなわち, (i) 不連続点があっては門前払いであるし, (ii) **無限階の**微分可能性を前提とするのみならず, (iii) (i) と (ii) が満たされても, なお, 収束するとは限らない.

[†316] [注意] 果たして, 現実に, Taylor 展開はどこまで使えるのだろうかと懐疑的になるだろう. 決して, Taylor 級数を非難したいわけではなくて, 実用上は Taylor 級数は有限の項までで (すなわち有限階数の導関数までで) 打ち切る. そして, Fourier 級数には, 周期関数という大前提があることも忘れてはならない. ここでの論点は, Taylor 級数と Fourier 級数の是非ではなくて, 「収束性に関する条件の厳しさ」以上ではない.

[†317] **[重要]** 事実, これまでの多数の例題において, 不連続関数の Fourier 係数を, 積分計算によって, 当たり前のごとく求めてきたではないか. つまり, 関数がたかだか数個の不連続点を有しても, **積分範囲を分割して計算できる**のである. この意味で, **積分とは便利**なのである. そもそも, **Fourier 級数が不連続点を許容してくれるのは「微分ではなく積分に支配される級数だから」**である. 積分の操作自体が不連続性を許してくれるのである. **[そもそも]** 微分と積分の定義は独立である. 微分と積分が互いに逆の演算であることは結果である (**微分積分学の基本定理**: fundamental theorem of calculus).

[†318] [発展] 本資料では, 収束性については, 証明よりも事実が最重要であるとみなす立場をとった. 「区分的に滑らかな関数が Fourier 級数に展開可能であること」の証明は割愛するが, 意欲のあ

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

Fourier 級数の収束定理

周期関数 $f(x)$ が区分的に滑らかであるならば, $f(x)$ の Fourier 級数は, (i) 不連続点以外では収束し, 級数の和は $f(x)$ に等しい; (ii) 不連続点においては, 右極限値と左極限値の平均値に収束する.

問題 32. $y = \tan x$ は区分的に連続ではない. これを説明せよ.

問題 33. $y = \sqrt{|x|}$ は, 連続ではあるが, なめらかではない. これを説明せよ.

基礎 9. § 1.4 と § 2.3 で例示した全ての関数について, $f(x)$ のグラフを描き, 1 階導関数 $f'(x)$ を求め, たしかに, 区分的に滑らかであることを確認せよ.

§ 3.2　項別微分と項別積分

「項別微分は危険だが, 項別積分は許される」に集約される. 理由を考える.

以下では, 表記の簡潔さのために, 「区間 $[-\pi, \pi)$ で定義される実数値関数 $f_0(x)$ を周期 2π の周期関数となるように拡張された関数 $f(x)$」を, 単に「$f_0(x)$ を 2π で周期的拡張した関数 $f(x)$」とかく [†319]. $f(x)$ の実 Fourier 級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.33}$$

§ 3.2.1　項別微分すると痛い目を見る

x を 2π で周期的拡張した関数の Fourier 級数は次式で与えられた (問題 10):

$$x = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots \tag{3.4}$$

試験において「定数関数 1 を 2π で周期的拡張した関数の Fourier 級数を求めよ」と問われたとする [†320]. これまでの問題のように, 面倒な定積分をとおして Fourier

---

る者は教科書 p. 70 を参考に証明してみよ. また, 収束性に関連する重要事項のいくつかも述べなかった. [発展]「一様収束と平均収束」について, 「項別積分と項別微分の可能性」から調べてみよ.

[†319] 「試験においても, このような長い表現, 多数の仮定, そして前置きをかかねばならないのか」と思うかもしれない. 試験では, 表現を指示する, あるいは, 問題文で与えるので, 現時点において, どこまで書かねばならないかということは気にする必要はない. ただし, **何を仮定しているのかという意識は必要不可欠**である (これを見失うと, 高校レベルの三角関数の微積分でしかなく, 応用など途方もない).

[†320] この場合, 周期的に拡張すると, 全ての x に対して $f(x) = 1$ だから, その Fourier 係数は $a_0 = 2$ で $a_n = b_n = 0$ という特殊な例である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

係数を計算せねばならないだろうか．そんなことはない．**1 次関数 x^1 を微分すれば定数関数 $x^0 = 1$ になるから**である．そこで, 既知の Fourier 級数をうまく利用すれば, さまざまな Fourier 級数を効率よく求めることができそうな予感がする．

つまりは, (3.4) において, **「まずは x に関する微分演算を行い，つぎに n に関する総和をとる」という項別微分**が許されるならば, x の Fourier 級数の両辺を微分した結果は, 1 の Fourier 級数に他ならないはずである．実際に, (3.4) の両辺を x で項別微分すると, 次式をうる:

$$1 = 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots) \tag{3.5}$$

これは収束するだろうか．たとえば, 連続点 $x = 0$ を代入すると, 右辺は,

$$(\mathrm{RHS}) = 2(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots) \tag{3.6}$$

となり, **左辺の 1 には決して収束しないという予想外の結果**となった．

§ 3.1 の収束定理に立ち戻って考え直してみる．周期的に拡張された定数関数 1 は区分的になめらかであるから [†321], 連続点 $x = 0$ においては収束するはずであるし, 収束定理を満たしている．結局のところ, 原因は, **項別微分の仮定が誤りであったとしか思えない**．

ここで一般論に移る．$f(x)$ の Fourier 級数について, やはり項別微分が許されると仮定して, 両辺を x で微分すると,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)(a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{3.7}$$

となる [†322]．原因はもはや一目瞭然となった．**項別微分の演算によって，係数に n がかかる**ことに注意せねばならなかったのである．大きな n に対して収束するはずがないではないか [†323]．これによって, 収束性の条件は次のように厳しくなる [†324]:

[†321] 1 を微分するとゼロであるが, 1 もゼロも区分的に連続である (確かめよ)．したがって, 1 は区分的になめらかであるといえる．

[†322] やはり, 実 Fourier 級数だと, 符号の反転や, サインとコサインの反転への注意が煩わしい．複素形に不慣れである意味で, 本節は実数で書いているが, 余力のある者は複素形に書きなおしてみるとよい．

[†323] 収束性が悪くなるばかりか, 無限級数の項の数を多くとると, すなわち n を ∞ に近づける極限において, 発散する危険性すら想定される．

[†324] 有限個の部分和ならば, 項別微分は許される (証明略)．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

項別微分が許される条件 (証明略/**記憶不要**)

$f(x)$ **が連続かつ** $f'(x)$ が区分的に滑らかならば, 項別微分が許される.

これを覚える必要はない [†325]. それでも敢えて書いた理由は,「**Fourier 級数の収束条件よりも厳しくなった**」ことを実感してもらうためである. 注目すべきは, 項別微分は不連続点の存在を許してくれないこと, すなわち, **不連続関数をも無限級数に展開可能という, Fourier 級数の最大の特長を自己否定**してしまう点にある [†326].

そのように批判される項別微分であっても, もちろん, これが許される条件さえ満たしておれば役立つこともあるので, 一例を見ておこう:

問題 34. 関数 $|x|$ を周期 2π で周期的拡張した関数 $f(x)$ は, 項別微分が可能である [†327]. $f(x)$ の実 Fourier 級数の両辺を項別微分すれば, すでに問題 6 で求めた関数 $|1|$ の Fourier 級数 (1.58) と一致するはずである. これを示せ.

§ 3.2.2 項別積分は賢いのである

項別積分ならばどうか. 真逆である. 積分の演算によって, $1/n$ が係数に現れるがゆえに, **急激に収束する**. 大きな n を想像すれば, **項別微分は収束性を弱めるが, 項別積分は収束性を強める**ことがわかる. それゆえ, 項別積分は, Fourier 級数を求めるための有用な手段となることが期待される.

項別積分が許される条件 (証明略)

$f(x)$ が区分的に連続ならば, (それだけで) 項別積分が許される.

これを読めば項別積分の価値は明白である. 決して, 本条件の証明や, "連続" や " 区分的に" などといった細部に気を留めてほしいのではなく, むしろ,「**Fourier 級数の収束条件よりも緩くなった**」ことに驚いてほしいのである [†328].

実際の例をとおして, 項別積分の強力さを実感しよう.

[†325] 項別微分など (ふつうは) 使えないし, 使わない方がよいからである.

[†326] [まとめ] 収束条件は, $f(x)$ と $f'(x)$ が区分的になめらかであることであった.「区分的に」という堅い表現は, いうなれば, 不連続点の存在を許容するための前置きであった. しかしながら, 項別微分のために, $f(x)$ が連続関数であることを課されては, これまで Fourier 級数に展開してきた関数を思い起こしても, 少なくとも半分は不適となってしまうではないか.

[†327] $f(x)$ は連続関数であって, 1 階導関数 $f'(x)$ が区分的に滑らかだから (確かめよ), 項別微分が許される条件を満たしている.

[†328] [注意] ただし, いくら項別積分だけが可能であっても, 項別積分を適用したい Fourier 級数が収束せねば意味をなさないので, 結局は, $f(x)$ が区分的に滑らかである条件も必要となる. それでもなお, Fourier 級数の収束定理以上を課すものではないことに価値がある.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

問題 35. 1 次関数 x を 2π で周期的拡張した関数の Fourier 級数 (1.62) を項別積分して, 2 次関数 x^2 を 2π で周期的拡張した関数の Fourier 級数を求め, それが問題 12 で求めた (1.69) と一致することを確かめよ.

[解答] 1 次関数 x の不連続点は無限個ではない. したがって, x は区分的に連続であるがゆえに, 項別積分が可能である. それゆえ, 2 回もの面倒な部分積分をとおしてゼロから Fourier 係数を計算せずとも, (3.4) の両辺を x で 1 階積分するだけで, x^2 の Fourier 級数をうる. つまり,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \tag{3.8}$$

の不定積分を項別に実行して整理する[†329]:

$$\frac{x^2}{2} + c = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx \tag{3.9}$$

積分定数 c の定め方には色々考えられるが, 示したばかりの性質「級数の初項は級数の平均値と等しい (問題 13)」を利用しよう. いま, 左辺第 1 項の関数 $x^2/2$ の Fourier 級数を考えており, 区間は 2π だから, c は

$$c = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\pi\text{ではない}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6} \left(= \frac{a_0}{2} \right) \tag{3.10}$$

と定まり[†330], x の Fourier 級数の項別積分から, x^2 の Fourier 級数 (1.69) をうる:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9} \cos 3x + \cdots \tag{3.12}$$

このように, 項別積分とは便利な計算方法である. たとえば, つぎに「x^3 の Fourier 級数を求めよ」と問われたとして, 既知の x^2 の Fourier 級数の項別積分抜

---

†329 総和記号を使うことなく, 具体的に項を書き下して積分することも望ましい.

†330 積分定数 c は他の求め方もある (本質的に等価): (i) $c = a_0/2$ から決定する. すなわち, $x^2/2$ の Fourier 級数の初項を求める. (ii) 級数 (3.9) の両辺に $x = 0$ を代入すると,

$$c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \tag{3.11}$$

をうるが, 右辺は無限級数の和の公式 (3.13) から決定される (§ 3.3.1 で導く).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

きに, Fourier 係数を求めるための複数回の部分積分の計算は大変である. 逆に, x^1 の Fourier 級数の計算など, 別に, x^2 の項別微分に頼らずとも容易ではないか [†331]. その意味で, **収束性の問題を差し置いても, 本質的に, 項別微分よりも項別積分を使うことの方が多くかつ便利**なのである.

§ 3.3　無限級数の和の公式と Parseval の等式

§ 3.3.1　Fourier 級数からたくさんの無限級数公式が得られる

これまで, Fourier 級数に具体的な数値を代入することは行わなかったが, たとえば, 導いたばかりの (3.12) の両辺に $x=0$ を代入すると [†332], 面白いことがわかる. 自然数の逆数のべきの**無限級数の和の値が求まる**のである:

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12} \tag{3.13}$$

そもそも, 三角関数 $y=\sin x$ は, $x=0,\pm\pi/2,\pm\pi,\cdots$ といった規則的な点において, $y=0$ あるいは $y=\pm 1$ というわかりやすい値をとる周期関数である. この意味で, **三角関数から構成される Fourier 級数に適当な数値を代入すると, 有用な無限級数の和の公式 (和の値) の多数が, 特段の苦労なく導かれる**と予想される [†333].

たった "1 つ" の Fourier 級数から "多数" の無限級数和の公式が導かれる点が重要である. 実際に, 2 次関数 x^2 の Fourier 級数 (3.12) からは, 複数の無限級数公式が得られる [†334]. さっそく以下で試そう:

問題 36. 2 次関数 x^2 を 2π で周期的拡張した関数の実 Fourier 級数 (1.69) を眺め, **両辺に適切な数値を代入し**, つぎの無限級数の和の公式を導け [†335].

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{3.14}$$

[†331] **部分積分の回数と関連付けてみよ** (ここに本質の一つがある). べき関数 x^m の Fourier 係数を求めるための定積分の計算は, m が大きくなるにつれて大変になる.

[†332] $\cos n\times 0=1$ から逆算したのである.

[†333] これまで導いてきた相当数の Fourier 級数を眺めてみよう. 深く考えることなく, あてずっぽで数値を代入したとしても, 多数の無限級数和の公式が導かれそうだと感じないだろうか. 三角関数とは, それほどまでに, 規則正しく模範的な関数だからである.

[†334] $x=0$ を代入して導かれた (3.13) など**一例に過ぎない**.

[†335] [ヒント] コサイン関数が特徴的な値をとる x を代入する. ここでは, $x=\pi$ とおいてみた. あてずっぽうに代入したら, 導かれたにずぎないといってもよい.

問題 37. 問題 11 と問題 6 で求めた Fourier 級数を利用して, 次式を導け [†336].

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4} \tag{3.15}$$

問題 38. 以下の実数値関数を 2π で周期的拡張した関数 $f(x)$ を考える [†337].

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad(-\pi\le x<\pi) \tag{3.16}$$

$f(x)$ の複素 Fourier 級数を利用して, 次の無限級数の和の値を求めよ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-1\right]}_{\text{示すべき値 } (e \text{ も} \pi \text{も数値})} \tag{3.17}$$

[解] 複素 Fourier 級数はつぎのように求められる [†338]:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})(-1)^n}{2\pi(1+n^2)}e^{inx} \tag{3.18}$$

上式で $x=\pm\pi$ とおくと [†339],

$$f(\pm\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi(1+n^2)}(-1)^{2n}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} \tag{3.19}$$

ここで, 題意の総和記号の和の範囲をみると, やはり総和記号を分割せねばならないことに気づく. これまで同様に, 負の n を $n=-\ell$ とおけば, 総和の範囲も

[†336] [ヒント] (a) 関数 $|x|$ の級数で $x=0$ とおく (問題 11). (b) 関数 $|1|$ の級数で $x=\pi/2$ とおく (問題 6). [注意] 以後, 具体的に項を書き下さないが, 自身で書き下すことが望ましい.

[†337] [発展 (発展どころか基礎レベルだが, 双曲線関数の定義だけを暗記しても無意味)] 双曲線関数 $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$ を利用して書き直したり, 双曲線関数の微積分を用いることも望ましい.

[†338] これを実 Fourier 級数に書き換えておく練習も望ましい.

[†339] 思いつきではなく, 明確な動機がある. $e^{\pm in\pi}=\cos(\pm n\pi)=(-1)^n$ を思い返したのである. さらに, $(-1)^{2n}=[(-1)^2]^n=1^n=1$ にも注意.

$1 \leq \ell < \infty$ となる. 以下では, 総和記号の内部だけ取り出して変形する:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=0}^{0} \right) \frac{1}{1+n^2} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{1+(-\ell)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

ところで, $f(x)$ にも $x = \pm\pi$ を代入すると,

$$f(\pm\pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} \tag{3.21}$$

である. $f(\pm\pi)$ すなわち (3.21) と, 複素 Fourier 級数に $x = \pm\pi$ を代入したもの (3.19) の値は等しいので, 等号で結ぶと,

$$\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left(2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} + 1 \right) \tag{3.22}$$

これを変形すれば, 速やかに題意をうる[†340].

問題 39. 実数値関数

$$\begin{cases} 1 - |x|/2 & (0 \leq |x| \leq 2) \\ 0 & (-\pi \leq x < -2,\ 2 < x < \pi) \end{cases} \tag{3.23}$$

を 2π で周期的拡張した関数の実 Fourier 級数を利用して, 次式を示せ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2} \tag{3.24}$$

§ 3.3.2 Parseval の等式

無限級数和の公式を得るための手段は, Fourier 級数に値を代入する操作だけに限らない. 実は, もっと多様な無限級数の和の公式を導いてくれる強力な道具が

[†340] [ポイント] (i) これまで通りの総和記号の分割. (ii) 級数に題意に適した x を見出して代入.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

存在する．それが，次の **Parseval の等式**である[†341][†342]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \tag{3.26}$$

これは，実 Fourier 係数 a_0, a_n, b_n の値と，周期 2π の実数値の周期関数 $f(x)$ を関係付ける式である[†343][†344].

さて，実際に (3.26) を用いて，x^2 の Fourier 係数から，第 3 の無限級数の和の公式を導いてみよう．

問題 40. 2 次関数 x^2 を 2π で周期的拡張した関数の実 Fourier 係数 (1.69) を Parseval の等式に代入して，つぎの無限級数の和の値 (右辺) を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90} \tag{3.27}$$

[解] Parseval の等式に，問題 12 で求めた実 Fourier 係数 a_0, a_n, b_n を代入すれば，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x = \left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{n^2}\right]^2 \tag{3.28}$$

---

†341 もちろん，複素 Fourier 係数 c_n に対しても，Parseval の等式は成立する (書き換えてみよ):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \tag{3.25}$$

Parseval の等式に限らず，複素形の方が議論は簡潔だが，あえて実 Fourier 係数で進める．

†342 三角関数に対する三平方の定理に相当する．本資料では，Parseval (パーシバル，パーセバル，パーセヴァル) の等式の導出は行わず，天下りに受け入れて，用法を中心に学ぶこととする．実は，Fourier 変換に対しても，Parseval の等式に対応する数式が導かれるので，そこで，導出方法と物理的意味について触れる．[とはいえ導出は容易] 実 Fourier 級数 (1.33) の両辺に $f(x)$ を掛けて $[-\pi,\pi]$ で定積分を行い，Parseval の等式を導け．項別積分が許されると仮定する．

†343 **[補足 (今後)]** 被積分関数を，$[f(x)]^2$ でなく絶対値 $|f(x)|^2$ と書くことの方が多い．いまは実数値関数しか扱っていないので，$[f(x)]^2=|f(x)|^2$ であって，むしろ絶対値の方が突拍子もないという危惧から前者を採用した．しかし，以後，複素数値関数を扱う際には，区別が重要となり，$|f(x)|^2$ で議論を進めることとなる (複素共役が介入).

†344 [補遺 (教科書 2.7 節)] Parseval の等式およびこれと関連深い Bessel の不等式は，そもそも，Fourier 級数の範囲を (ある意味で) 逸脱して，誤差解析という分野で重要となる式に属する (実際，Fourier 級数の成書では，そのような観点からの導出が多い)．その準備としては，誤差に関連する新たないくつかの概念の導入を要する．すると，**「三角関数だけで Fourier 級数から Fourier 変換までを議論する」**という本講義における最重要目的を見失いかねないし，知識の飽和も危惧される．そこで，本資料では「Parseval の等式は無限級数の和を計算する道具である」という側面をとくに強調した．ハイレベルだから割愛したわけではない．全てを浅くやるのではなく，重要度の高い項目を精確に学ぶという講義方針に即して割愛しただけである．Parseval の等式の導出や，誤差解析との関連は，独学可能である (難しくはないが，容易には理解できない).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

左辺の定積分を計算して整理すれば, 速やかに題意まで変形できる.

問題 41. Fourier 係数 (問題 5 と問題 11) と Parseval の等式から次式を導け [†345][†346].

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96} \tag{3.29}$$

たとえば, $[-\pi,\pi)$ で定義された 2 次関数 x^2 を周期 2π で x 軸全体に拡張した周期関数の Fourier 級数展開は一通りである [†347]. しかしながら, **Fourier 級数から導かれる無限級数の和の公式は複数にわたる**のである. そのための道具の一つが Parseval の等式である.

§ 3.4 未講述事項

以上で, Fourier 級数に関する章を終えるが, **複素 Fourier 係数のすぐ先には Fourier 変換がある** [†348]. Fourier 級数は, 教科書の 2.1 節から 2.7 節までに相当するが, 割愛した項目と割愛理由や学習のすすめを以下に (脚注含め) 列挙する [†349]:

- 任意の周期への拡張 (2.3 節)[†350].
- Fourier 正弦級数および余弦級数 (2.4 節の一部)[†351]
- 強制振動 (2.6 節)[†352]
- 三角多項式, 誤差, Bessel の不等式, Parseval の等式の一部 (2.7 節の一部)

[†345] [重要・発展] よく見れば, **問題 37 で求めた (3.15) の (a) と, 本問題の (a) は全く同じ**である. それにもかかわらず, 前者は $|x|$ の **Fourier"級数"から**, 後者は異なる関数の **Fourier"係数"と Parseval の等式から**, それぞれ導かれている. [発展] これは何を意味するのだろうか.

[†346] [ヒント] 項の番号が偶数か奇数かで, 場合分けおよび置き換えを要する.

[†347] 周期的拡張には, y 軸対称的な拡張 (偶関数的拡張) 以外の拡張もありえるので, ここでは, 誤解を避ける意味で, 久しぶりに, 厳密かつくどい表現を採用した.

[†348] 次章から全く新しいことを学ぶわけではなく, むしろ, 本章までは前座にすぎない.

[†349] 割愛項目は試験には出題しないが, これらを学んでさらなる高みへと到達してほしい.

[†350] 計算が煩雑となることと, 周期 2π の議論だけで本質のほぼ全てが理解できるため省略した. ただし, 拡張自体は容易であって (座標軸の伸縮にすぎない), 実用上も重要である. **30 分で独学可能**であるので, 是非一度はやっておくべきである.

[†351] 計算を簡便に行うための節である. テクニック的な側面が強く, 優先順位を鑑みて割愛したが, 実質的には, 諸君が既に解いた問題の中に 2.4 節の考え方が盛り込まれていることに気づくだろう (用語には触れなかったが). 教科書と本講義資料を比較しながら考えてみてほしい.

[†352] 物理 (力学, 振動学) への応用を述べている. 振動工学などの講義にゆずる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 4　Fourier 変換

Fourier 級数の方法の大前提には, **周期関数**であることが課されていた．この制限には改めて注意を払うべきである[†353]．本節で学ぶ **Fourier 変換の最大の特長は非周期関数にも適用できること**, それは, “大胆にいえば”, いかなる関数にも適用できることにある．

複素 Fourier 係数の延長線上に「Fourier 変換」が位置付けられる[†354]．また, 複素 Fourier 級数の延長線上に「逆 Fourier 変換」というものが対応する[†355]．

Fourier 変換は, 常微分方程式 (解析学 III) や偏微分方程式 (後半) の解法において威力を発揮するが, その効用は微分方程式に留まらない．アンケート調査の結果分析や, 実験データの統計処理などを代表として, **Fourier 変換は理工学の全分野における必須スキル**といえる．この意味で, 応用数学の講義における最重要項目に位置づけられる[†356][†357]．

§ 4.1　概要——Fourier 変換を大雑把につかむ——

概要であるので, 厳密な前置きは避けて, 全体像を大雑把につかもう．Fourier 級数の発祥となった考え方 (§ 1.3.1) を精密に再考すると, Fourier 変換が自然と現れるのである．周期 2π の実数値の周期関数 $f(x)$ を考える．

[†353] [重要] たとえば, 無限区間 $(-\infty, \infty)$ で定義されたべき関数 x^m や指数関数 e^x などは, Fourier 級数に展開できるはずもない．「1 次関数 x の Fourier 級数を求めたではないか」と反論するかもしれないが, **あくまで, 有限の区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数に対して, 周期的拡張という形式的手段に頼って級数展開してきたにすぎない**．これから (本章) が, **真の意味での三角関数近似**である．

[†354] [注意]“級数”ではなく “係数”である．**「級数よりも係数が重要」**であると強調してきた．

[†355] “逆”Fourier 変換については, この場で意味不明でも構わない．対応関係があることだけ意識しておいてほしい．

[†356] [独り言 1] 徐々に脱落しかけている人がいるように見受けられますが, 復習がおろそかな人も, 複素 Fourier 級数を天下りに受け入れて (場合によっては暗記して), Fourier 変換に取り組んでください．**Fourier 変換が出来ない人, 意味を理解していない人は, 単位取得に限らず, 今後のさまざまな場面で極めて不利になる**といえます．

[†357] [独り言 2] 講義内容の飽和と消化不良が危惧されるため, 内容を精選し, 当初の講義計画 (シラバス) よりも削減しました．高意欲層からは不満かもしれませんが, そのような人は, 独学可能であることからご理解下さい．とはいえ, 本来の目的は, 応用数学の単位取得ではなくて, Fourier 変換などを理解し使いこなせることにありますので, その意味では終りはなく, ここで削減した内容は, 各自で必要に応じて独学する必要があります．講義は, あくまで助けでしかありませんが, 本講義で扱う Fourier 変換の基礎が身についておれば, その先の独学に困難はないでしょう．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

(i) 複素 Fourier 級数 †358

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \cdots + c_{-1}e^{-ix} \underbrace{+c_0 e^{0ix} + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix}}_{\text{飛び飛び (0 と 1 や 1 と 2 の間は?)}} + \cdots \tag{4.1}$$

とは, n について **1 ずつ飛び飛びの (離散的な) 和**を表した. 果たしてこれで満足できるだろうか. たとえば, 1 と 2 の間に何が詰まっているのか気にならないだろうか †359. つまり, **整数 n だけでなく, 全ての n に対する総和をとれないだろうか** †360. これを可能にしてくれるのが, **離散的な総和ではなくて連続的な積分**, すなわち,

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{気にしない}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.2}$$

である. 全ての番号を考えたいのだから, 積分範囲はもちろん $-\infty < k < \infty$ である. n を k に置き換えたり, 係数に $1/\sqrt{2\pi}$ が現れたのは, 本質ではないので現時点では気にしなくてよい. (4.2) の右辺を逆 Fourier 変換とよび, その被積分関数に含まれる $F(k)$ を Fourier 変換という †361.

(ii) 複素 Fourier 係数 c_n, たとえば c_2 とは e^{2ix} という三角関数が級数 (4.1) の中にどの程度含まれているかを教えてくれる数列であって, 次式から計算できた:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \quad \underbrace{(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)}_{\text{飛び飛び}} \tag{4.3}$$

近似の精度を考えると, やはり, 飛び飛びの n ではなくて, **全ての n に対して c_n を求めたい**. このとき, 係数は数列ではなくて連続関数となる. すなわち,

$$F(k) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{気にしない}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \quad \underbrace{(-\infty < k < \infty)}_{\text{全て考える!!}} \tag{4.4}$$

---

†358 もちろん, 実 Fourier 級数で議論してもよい (計算が大変だが).

†359 そもそも, **"全ての"三角関数**を用いて $f(x)$ を再現することが, Fourier の発想の真骨頂であった (§ 1.3.1).

†360 [重要] 総和記号は役立たずといってよい. いくら工夫しようが, 飛び飛びの n に対してしか総和を取ってくれないからである. それゆえ, **本質的に全ての総和を意味する積分記号に頼りたくなる**のは, 自然な感情である.

†361 いきなり "逆"変換といわれ, 奇妙に思うだろう. しかし, 現時点では一切気にする必要はない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

である[†362]. これが Fourier 変換である[†363†364]. たとえば, $F(2.5)$ **とは, 三角関数** $e^{2.5ix}$ **が** $f(x)$ **の中に [(4.2) 右辺の中に] どれだけ含まれているか**を教えてくれる.

現時点では, 細部にはこだわらず, **"全ての総和をとる (積分)"への拡張**を理解し, 全体像をなんとなく掴めばよい.

§ 4.2 準備——変換とは——

そもそも「変換」とは何だろうか. 高校までではあまり聞いた覚えがない[†365].

§ 4.2.1 関数

解析学や高校数学で学んだことの復習から始める. もし,

$$y = f(x) \tag{4.5}$$

と書かれていれば, 諸君は「x を定めた際に y が対応する」と解読するであろう.

このような, 変数と変数の対応関係 $f(x)$ こそを「関数」という[†366†367]. ここに, x は独立変数, y は従属変数という[†368†369].

[†362] やはり注意する: (i) n を k に書き換えたことに深い意味はない. (ii) 係数 $1/\sqrt{2\pi}$ は現時点では気にしなくてよい.

[†363] つまり, Fourier 変換とは, Fourier"級数"の拡張ではなくて, **Fourier"係数"の拡張**である.

[†364] x の全範囲 ($|x| < \infty$) で積分する理由は, すぐに明らかになる.

[†365] 振り返れば, 大学 1 年の数学まででは, あまり聞いたことがない言葉なのではないだろうか. 「線形変換」や「変数変換」は反例の 1 つだが, 意味合いは異なる. ここで扱うのは, 厳密には, 「積分変換」といわれる.

[†366] 関数 (function) ではなく, 写像 (mapping) といってもよい. x を箱 (函) に入れると y が対応してくれるという意味で, とくに古典では, 「関数」ではなく「函数」と書く書物も多い.

[†367] [厳密にいおう] y は集合 Y の要素, また, x は集合 X の要素であって, 数式では, $y \in Y$, $x \in X$ とかける. 集合 (set) の中には無数の要素 (element) が対応するが, 任意の (全ての) y および t に対して, 一通りの対応関係が定まるとき, これを関数という.

[†368] [イメージ] **独立変数とは人間が指定する (制御可能な) 変数**といえる. これに対して, **従属変数 (未知変数) とは, 求めるべき変数, あるいは, 自然にゆだねる変数**といえる.

[†369] 1 変数関数の場合, 独立変数と従属変数の区別は, 実は, さほど重要ではない. なぜならば, x が決まることはそれだけで y の対応を意味するからである. しかしながら, 2 変数関数の場合は取扱いが全く異なるといっても過言ではない. 多変数関数 (偏微分方程式) を扱う後半の講義 (第 3 章) では, 注意を要する.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 4.2.2　変換

では, **関数と関数の対応関係**は何か．これが「**変換**」である．これから学ぶ Fourier 変換や Laplace 変換は, 積分変換ともいい, 関数と関数を対応付ける道具なのである．

§ 4.3　Fourier 変換を導く

これまでの Fourier 級数の周期 2π を任意の周期に拡張し, それを基に, **周期を無限大**に近づける極限をとる．この極限は, **周期関数という束縛からの脱却, すなわち非周期関数への拡張**を意味する．そのとき, Fourier 級数は逆 Fourier 変換となり, その Fourier 係数として Fourier 変換が現れる．

§ 4.3.1　Fourier 級数を任意の周期へ拡張

Fourier 変換を導くに先立ち, 準備を行う [†370]．

これまで, 周期関数 $f(x)$ の周期は 2π に限定されていた．すなわち, 定義域は

$$-\pi \leq x \leq \pi \tag{4.6}$$

であった．これを $2L$ **という任意の周期へ拡張**したい (L は正の定数 [†371])．そこで, 両辺に $L/\pi\,(>0)$ をかけると,

$$-L \leq \frac{Lx}{\pi} \leq L \tag{4.7}$$

をうる．$Lx/\pi \equiv y$ とおくと, 新しい変数 y の定義域として,

$$-L \leq y \leq L \tag{4.8}$$

をうる．これによって, 独立変数は x から y へと変換された．このとき, 周期 2π

[†370] 結果だけを見ると, 一見複雑に感じるだろうが, 実際の計算は小手先に過ぎず中学生レベルである．

[†371] 負でも良いが, 以下をみればわかるように, 意味がない．

の関数 $f(x)$ は, 以下のように書ける †372:

$$f(x) = f\left(\frac{\pi y}{L}\right) = \tilde{f}(y) \tag{4.9}$$

さて, 複素 Fourier 級数を書き換えてみよう:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi y/L} = \tilde{f}(y) \tag{4.10}$$

続いて, 級数に含まれる複素 Fourier 係数も書き改める †373. 処方箋としては †374,

$$x = \frac{\pi y}{L} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\pi}{L}\mathrm{d}y \tag{4.11}$$

を c_n を与える (2.38) に代入し, f の定義域 (積分範囲) が $-\pi \leq x \leq \pi$ から $-L \leq y \leq L$ に変化した点に注意するだけである †375:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(y)e^{-in\pi y/L}\mathrm{d}y \tag{4.12}$$

指数を見ると複雑に感じても仕方ないが, $L = \pi$ **とおけば, これまでどおりの周期** 2π **の周期関数に対する複素 Fourier 級数およびその係数にきちんと帰着**する †376.

問題 42. (2.37)(2.38) を (4.12)(4.10) へと書き換えよ.

問題 43. 周期 2π の周期関数に対する複素 Fourier 級数 (2.37) および複素 Fourier 係数 (2.38) を書き換えるのではなく, 初めから周期 $2L$ の周期関数を考えて, (4.12)(4.10) を導け. まず, 実 Fourier 級数へと展開し, その実 Fourier 係数を与える式を導き, 複素形への拡張へと進み, (4.12)(4.10) の形へ整理せよ.

§ 4.3.2　複素 Fourier 係数から Fourier 変換へ

周期 $2L$ **の周期関数** $f(x)$ の複素 Fourier 級数 (4.10) に, 複素 Fourier 係数 c_n

---

†372 真ん中の引数の π も L も定数なので, 独立変数から影を潜めた. [厳密には] 同じ関数 f でも独立変数が異なるので, $\tilde{f}(y)$ と書いたのだが, 元通りに $f(y)$ と書いても間違いではない.

†373 もちろん, 実 Fourier 係数も同様である

†374 [発展 (厳密には)] $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\pi}{L}$ と書く方が好ましい (理由を考えよ).

†375 [基礎] **定積分であるので**, もちろん, 積分変数は, x や y である必要はなく何でもよい.

†376 この意味で, 覚えるよりも, いちいち変換した方が誤りがないだろう. すでに記憶済みの周期 2π の場合に帰着するかを常に確認すれば誤りはない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

を与える式 (4.12) を代入する [†377]:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\mathrm{d}x\right)}_{c_n} e^{in\pi x/L} \tag{4.13}$$

指数部が煩雑なため, 表記を簡潔にすべく, 数列

$$k_n \equiv \frac{n\pi}{L} \tag{4.14}$$

を導入して [†378][†379], 同時に数列の幅 (各項の差) を与える Δk も定義しておく [†380]:

$$\Delta k \equiv k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{L} \tag{4.15}$$

k_n を用いて, (4.13) を簡潔に書き換えよう [†381]:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta k}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-ik_n x}\mathrm{d}x\right) e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[g(k_n)\Delta k\right] e^{ik_n x} \tag{4.16}$$

ここに, $g(k_n)$ は k_n のみに依存する関数であって, 以下のように定義した [†382]:

$$g(k_n) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-ik_n x}\mathrm{d}x \tag{4.17}$$

周期関数からの延長線上という観点から, 非周期関数を直観的に理解しよう. **$L \to \infty$ なる周期をもつ関数が非周期関数**に相当する. なぜならば, 周期が無限大ならば, それはもはや周期関数とはみなせないからである [†383]. そこで, $L \to \infty$ の極限を考えると, $\Delta k \to 0$ に収束する. このとき, 周期 $2L$ の周期関数は, 非周期関数とみなされる.

[†377] [基礎] 最右辺の $e^{in\pi x/L}$ は, n の総和に関係するが, x の定積分には無関係である.

[†378] n に対する数列なので, n 依存性を明示すべく k_n と添え字をつけた.

[†379] [物理では] k_n は波数 (波長の逆数: 単位長さの間に含まれる波の個数) に相当する.

[†380] 最右辺の π/L には n を含まないので, Δk には添え字 n は不要である.

[†381] $L = \dfrac{\pi}{\Delta k}$ だから, 積分記号前の係数を $\dfrac{1}{2L} = \dfrac{\Delta k}{2\pi}$ と書き改めることができる.

[†382] x で積分するのだから, 積分後は k_n のみに依存する関数 g となる.

[†383] [例 1] **1 周期だけの正弦波があり, その隣にある正弦波までの距離が ∞ というイメージ**が相当する. [例 2] 宇宙空間から地上の人間を眺めようとでもしない限り, もはや, 周期性は見えるはずもない. [例 3] 周期が 50π の三角関数や方形波 (方形パルス) を想像してみよ.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

Riemann 積分の定義にしたがうと, $\varDelta k \to 0$ の極限において, k に関する総和は k に関する積分に書き換えられる [†384][†385][†386]:

$$\lim_{\varDelta k\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n)\varDelta k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(k)\mathrm{d}k \tag{4.18}$$

$\varDelta k \to 0$ の極限に連動して数列の概念は消滅し, n 依存性は消える. 上式では $g(k_n) \to g(k)$ となり, 指数関数は $e^{ik_nx} \to e^{ikn}$ と, 周期は $L \to \infty$ となる (次式).

(4.16) の左辺 [すなわち元の関数 $f(x)$] は, この極限 $\varDelta k \to 0$ の影響をうけない. したがって, $f(x)$ と (4.16) の最右辺を等号で結ぶことができる. 変形を進める:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{\varDelta k\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[g(k_n)\varDelta k\right]e^{ik_nx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(k)\,\mathrm{d}k\,e^{ikx} \qquad [\because \text{積分の定義 (4.18)}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x\right)e^{ikx}\mathrm{d}k \qquad [\because g(k)\ \text{の定義を代入}\ (L\to\infty)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x\right)}_{\text{Fourier 変換 } F(k)}e^{ikx}\mathrm{d}k \qquad \left[\because \frac{1}{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\mathrm{d}k
\end{aligned} \tag{4.19}$$

最下行からわかるように, $F(k)$ は非周期関数 $f(x)$ の複素 Fourier 係数に相当し,

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{4.20}$$

と定義した (おいた). この $F(k)$ を $f(x)$ の **Fourier 変換**という. また,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.21}$$

とは, $F(k)$ を逆 **Fourier 変換**すると $f(x)$ に戻ることを教えてくれている.

[†384] [Riemann (リーマン) 積分] 一言でいえば, 曲線 $y(x)$ と x 軸で囲まれた面積を, 無限個の長方形の総和として近似表現した後に, 長方形の幅をゼロに近づける極限として定義される積分であった (高校数学や解析学). [発展] あえて Riemann 積分といったのは, これ以外の積分もあるからである [Lebesgue (ルベーグ) 積分: 大学院生レベル].

[†385] [重要] 総和の範囲 $-\infty < n < \infty$ に完全に対応して積分範囲 $-\infty < k < \infty$ が定まった.

[†386] 総和記号内が込み入っており, この極限操作をわかりやすく見せるために $g(k_n)$ を導入したのであるが, もちろん, 頭の中で計算が容易な者は, おかなくてもよい.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

本資料では, **対称性**を意識して, 変換 (4.20) と逆変換 (4.21) の双方に係数 $1/\sqrt{2\pi}$ を付けることとする [†387].

問題 44. (4.13) から出発して, (4.20)(4.21) までを導け.

§ 4.4 定義

背景が理解できない者や面倒な者は, 以下を暗記することを妨げない [†388].

§ 4.4.1 Fourier 変換と逆 Fourier 変換

周期を持たない非周期関数 $f(x)$ を考える. $f(x)$ は実数変数 x に対する実数値関数とする. $f(x)$ の Fourier 変換 $F(k)$ は

$$F(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{4.20}$$

と定義される [†389]. 右辺を見ればわかるように, x **で積分しているから, その結果は** k **だけの関数となる**し, $F(k)$ **が複素数値関数**であることもわかる [†390]. ここに, k は実数変数 (実変数) であるとする [†391].

[†387] Fourier 変換に関する成書の半数ほどが, 以下の定義を採用している:

$$F(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}k, \quad f(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \mathrm{d}k \tag{4.22}$$

つまり, (4.19) の 2 行目から 3 行目に至る過程で, $1/(2\pi)$ を分割するか否かの判断が迫られるのだが, それは本質ではない. どちらでもよい.

[†388] 定理や公式はともかく, **定義は覚えるしかない**という考え方は, 決して否定されるものではないからである. とはいえ, Fourier 変換の定義に限って言えば, 確固たる理由づけがあるので, それを理解せずに丸暗記することはもったいないが.

[†389] [物理との対応] 変換前の変数 x は空間座標を意識し, 変換後の変数 k は波数 (波長の逆数) を意識している. 時間 t の場合は, k のかわりに角振動数 ω が対応して (次元を確かめよ), Fourier 変換を次式のように書くことが多い:

$$F(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \tag{4.23}$$

このように, 時間依存関数, 空間依存関数のどちらを考えているかで記号は異なる. **時間も空間も Fourier 変換できることが重要**である. 本資料は, 空間を意識した表現を採用する.

[†390] [基礎] Euler の公式 (2.4) を代入すれば, 虚部の存在に気づく.

[†391] [発展] もちろん, k を複素変数としてもよいし, $f(x)$ を複素数値関数としてもよいが, 本講義の範囲を逸脱する.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

また, 逆 Fourier 変換は, 次式で定義される:

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \mathrm{d}k \tag{4.21}$$

つまりは, Fourier 変換 $F(k)$ を k で積分すると, x だけの関数として元の関数 $f(x)$ に戻る. これを逆変換が保証してくれる.

§ 4.4.2　演算子 $\mathcal{F}$ による表現

Fourier 変換を表す演算子 $\mathcal{F}$ を用いて [†392], Fourier 変換を表現することもある. つまりは, 関数 $f(x)$ を Fourier 変換すると, 新たに k 依存の関数が対応することを,

$$\mathcal{F}[f(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x = F(k) \tag{4.24}$$

と表現する [†393]. なお, $\mathcal{F}[f(x)](k)$ の引数 (k) は, k 依存性を強調するためのものであって, 書かなくてもよい.

演算子 $\mathcal{F}$ を使うと, 逆 Fourier 変換は,

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} \mathrm{d}k = f(x) \tag{4.25}$$

と書ける. つまり, $\mathcal{F}^{-1}$ **が逆 Fourier 変換の演算子**である.

$f(x)$ を変換して逆変換すると, $f(x)$ に戻る. すなわち, 次式が成立する [†394][†395]:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(x)]] = f(x), \quad \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[F(k)]] = F(k) \tag{4.26}$$

---

†392 斜体 F よりもさらに傾けた筆記体の $\mathcal{F}$ を使う (残念ながら, 個人的にも書くことが難しい). F と $\mathcal{F}$ を区別して書いておれば問題はない. [余談] 関数 (Function) の F と Fourier の $\mathcal{F}$ が同じであるがゆえに (ある意味) 面倒なのである.

†393 表現 $F(k)$ が活きる場面と $\mathcal{F}[f(x)](k)$ が活きる場面の双方が存在する. 煩雑に感じるだろうが, 使い分けは現時点で気にする必要はない. 関数 $f(x)$ の変換として, k を独立変数とする関数が対応することを知っておけばよい.

†394 これを見ると, 演算子 $\mathcal{F}$ による表現の有用性に気づくだろう.

†395 [応用] 逆 Fourier 変換は, 工学のみならず**日常生活にありふれており**, その応用例は枚挙に暇がない. われわれに最も身近な例は, 病院における**レントゲン撮影などの CT** (Computed Tomography: コンピュータ断層撮影) や **MRI** (Magnetic Resonance Imaging: 核磁気共鳴画像法) などの**画像再構成** (image reconstruction) であろう. 超音波を用いた材料の非破壊検査, 地震波のトモグラフィなどは, 逆 Fourier 変換そのものであって, それゆえ重要といえる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

問題 45. [線形性] Fourier 変換が線形演算であること, すなわち,

$$\mathcal{F}[af(x)+bg(x)] = a\mathcal{F}[f(x)] + b\mathcal{F}[g(x)] \tag{4.27}$$

の成立を示せ. ここに, a と b は実数定数, $f(x)$ と $g(x)$ は実数値関数である.

§ 4.4.3 Fourier 変換の意味と複素 Fourier 係数との対応

$-\infty < x < \infty$ で定義される非周期関数 $f(x)$ をも全ての三角関数の線形結合で表現する操作が逆 Fourier 変換であって, 複素 Fourier 級数の延長線上にある †396.

逆 Fourier 変換に含まれる各三角関数成分の係数 $F(k)$ **こそが Fourier 変換**であって, 離散的な複素 Fourier 係数の連続関数への拡張である †397. $F(k)$ **は,** $f(x)$ **の中に** e^{ikx} **(すなわち** k **成分) がどれだけ含まれているかを教えてくれる** †398.

§ 4.4.4 Fourier 変換の前提と方針

§ 3.1 で詳述したように, 関数 $f(x)$ の Fourier 級数が収束するための条件は, $f(x)$ が区分的に滑らかであることであった †399. そもそも, Fourier 係数を求めるための積分計算の前提として, $f(x)$ が絶対可積分であることも課された †400.

実は, **Fourier 変換が存在するための条件はこれと同一である** †401. 天下りに述べておこう:

---

†396 離散的な総和を連続的な積分に拡張したものが逆 Fourier 変換である.

†397 複素 Fourier「係数」は数列であって, 離散的な値をとった.

†398 周期関数から**非周期関数に拡張されたがゆえに, 対象は振動や波に限定されない**し, 振動や波を見ているわけでもない. しかしながら, ある現象を疑似的に波とみなして, 三角関数の各成分が占める割合を知ることは極めて有益なのである. 実際に, どう見ても波には見えない現象であっても, 当たり前のように Fourier 変換の手法が用いられている.

†399 [復習] 大雑把にいうと, $f(x)$ および $f'(x)$ の不連続点がたかだか数個であって, 全ての不連続点で発散しないことを意味する.

†400 [絶対可積分 (†114)] 関数 $f(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で絶対可積分であるとは, 積分値が確定すること, すなわち, 次式を満たすことをいう:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \tag{4.28}$$

†401 **Fourier 級数の延長線上にあるのだから, ある意味で当然**ともいえる. 予想の範疇である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

Fourier 変換の存在条件

$-\infty < x < \infty$ で定義される関数 $f(x)$ に対して, 全ての x において,

(i) $f(x)$ が絶対可積分である

(ii) $f(x)$ が区分的に滑らかである

という 2 条件が満たされるならば, $f(x)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}[f(x)]$ が存在する.

その都度, これらに気を留めながら変換の計算を実行せねばならないのかと問われたとして, 勿論それが理想ではあるが, そうではなくともよい†402†403.

§ 4.5 基礎的な関数の変換

例題形式で, 基礎的な非周期関数の Fourier 変換を計算してゆこう. その計算は, 実 Fourier 係数を求める計算よりも, はるかにたやすいことに気づくだろう†404.

§ 4.5.1 定数関数

問題 46. [方形波] 全ての x に対して定義される関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-a \leq x \leq a) \\ 0 & (-\infty < x < a,\ a < x < \infty) \end{cases} \tag{4.29}$$

の概形を描き†405, その Fourier 変換 $F(k)$ を求めよ.

†402 [発展だが重要] Fourier 変換の存在条件や実際の計算過程を眺めると, 多くの数学的制約および仮定を課しているように見えるかもしれない. しかしながら, 結論からいうと, **Fourier 変換の理論は極めて広範の関数に適用できる** (その証明は本講義の範囲を超えるので省略). 少なくとも, 本講義のレベルでは, 収束性に注意を払う必要性は低い.

†403 [発展だが重要] Fourier 変換を工学や物理などに応用することを目指すわれわれの立場からは, Fourier 変換の方法が適用可能かの考察は後回しにして, **まずは Fourier 変換を利用して式変形を行うのがよい**. 解答が得られた後で, それが正しいかを検討すればよい. [補足] これは Fourier 級数についても同様である. 級数が収束するか否かの考察は後回しにして, まずは Fourier 級数に展開してみる. 解答を得た後で収束性を確認すればよいし, 事実, それで上手くいったはずである (§ 1–§ 3).

†404 三角関数を複素数に拡張したおかげに他ならない (Euler の公式の効用).

†405 [もちろん] 非周期関数であるので, 周期的拡張などは不要である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

[解] 変換の定義式 (4.20) に代入し, 素直な定積分を実行すればよい [†406][†407][†408]:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{2\pi}F(k)}_{\text{掛けておく}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} e^{-ikx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{i}{k}(e^{-ika} - e^{ika}) \underbrace{=}_{\text{Euler}} \frac{2\sin ak}{k}
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

したがって, 求めるべき Fourier 変換は

$$
F(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin ak}{k} \tag{4.31}
$$

と求まる. ここに, k は実数変数であって, $F(k)$ **は実数値関数**となった [†409].

問題 47. (4.31) が偶関数であることを数式を用いて示せ [†410][†411].
[略解] 奇関数 k^{-1} と奇関数 $\sin ak$ の積だから, 偶関数である.

§ 4.5.2 指数関数

問題 48. 次の指数関数の Fourier 変換を求め, その概形をフリーハンドで描け. a は正の定数とする.

$$
f(x) = e^{-a|x|} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{4.32}
$$

---

†406 Fourier 級数の時と同様, やはり, 予め両辺に $\sqrt{2\pi}$ を掛けておくとよい. 計算ミスを防ぐための技法にすぎないが.

†407 [§ 2.1.4] たとえ e^{-ikx} のように虚数単位が入っていようとも, 実数値関数と同様に, $e^{-ikx}/(-ik)$ と積分してよかった (証明略).

†408 [§ 2.1.3] 最後には, Euler の公式を用いて, $\sin ak = i(e^{-ika} - e^{ika})/2$ とまとめた (この公式は覚えるよりもその場で導く方が良い).

†409 [発展] Fourier 変換は, 一般に複素数値関数であるにもかかわらず, 虚部が消えて, 実数値関数が現れたことは重要である. 問題 30 との関連から, この原因を考察せよ.

†410 その後に, コンピュータを用いて実際にグラフを描いて, 偶関数であることを確認してみよ. このように, **どこまでが人間の頭だけで出来るかを考えることが重要**である.

†411 (4.31) のグラフを手で描くことは困難である. それでも, いくつかの基礎的な情報は数式からわかるだろう. 本問題もその 1 つに位置づけられる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

[解] x の正負に応じて被積分関数が変化する点に注意して, 計算を進めればよい:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-ik)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+ik)x}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{a-ik}\left(1-\lim_{x\to-\infty} e^{ax}e^{-ikx}\right) - \frac{1}{a+ik}\left(\lim_{x\to\infty} e^{-ax}e^{-ikx} - 1\right) \\
&= \frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} = \frac{a+ik+a-ik}{(a-ik)(a+ik)} = \frac{2a}{a^2+k^2}
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

注意すべきは極限操作だけであって, 以下の極限にしたがった [†412†413†414]:

$$
\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^{-ax} = 0 \tag{4.36}
$$

したがって, 以下の実数値関数をうる:

$$
F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+k^2} \tag{4.37}
$$

[グラフ] フリーハンドで描くことができる (横軸に k を, 縦軸に $F(k)$ をとれ)[†415].

[†412] [注意] たとえば $0 \le x < \infty$ のように, 変数 x の定義域を明示する際には, x は "0 以上" なのか "0 より大きい" のかなどを明示できる. その一方で, $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x$ なる積分の表現の意味するところは, とくに無限大を扱う際にわかりにくいので注意を要する. すなわち, あくまで $x \to \infty$ **の極限であって, 決して** $x = \infty$ **なる等号では "ない"**.

[†413] 指数関数のグラフを描いて, これが満たされることを確かめよ. a が正であることに注意せよ.

[†414] **[重要]**「なぜ e^{-ax} の極限だけでよいのか」とか,

$$
\lim_{x\to\infty} e^{-ax}e^{-ikx} = 0 \tag{4.34}
$$

が満たされねばならないのではないかと思うかもしれない. たしかにその通りである. しかし, **(4.36) だけでゼロに収束してくれるから十分**なのである. そもそも, 少し考えれば,

$$
\lim_{x\to\infty} e^{-ikx} = \lim_{x\to\infty}\cos kx - i\lim_{x\to\infty}\sin kx \tag{4.35}
$$

の実部と虚部の極限 (三角関数の極限) は収束しないから, これ以上考える労力が無駄である.

[†415] [用語] これを Lorentz (ローレンツ) 型関数とよぶことがある. 見慣れない形と錯覚するかもしれないが, $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ と同一である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

問題 49. **[Fourier 変換と偶奇性—問題 30 の拡張—]** 実数値関数を考えるとき, 偶関数の Fourier 変換は実数値をとり, 奇関数の Fourier 変換は純虚数値をとる. これらを示せ. [ヒント] Fourier 変換の定義 (4.20) に Euler の公式 (2.4) を適用する [†416].

問題 50. 実数値関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (0 \le x < \infty) \\ 0 & (-\infty < x < 0) \end{cases} \tag{4.38}$$

の Fourier 変換 $F(k)$ は, 以下の**複素数値関数**で与えられることを示せ [†417][†418]:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{a^2+k^2} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{k}{a^2+k^2} \tag{4.40}$$

さらに, (4.40) の実部が偶関数であること, 虚部が奇関数であることを, 計算によって示せ [†419].

§ 4.6　導関数の変換

微分可能な関数 [†420] $f(x)$ の Fourier 変換を $F(k)$ とする [†421]:

$$\mathcal{F}[f(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \equiv F(k) \tag{4.20}$$

[†416] 本性質は, 複素 Fourier 係数に対して証明済みである (問題 30). その改題であるが, そもそも, **Fourier 変換は複素 Fourier 係数の延長線上にあるのだから, この性質が受け継がれることは**当然といえる (定義式をもう一度眺めてみよ).

[†417] **実部は (4.37) と同じ**であることに気づく. なぜだろうか.

[†418] 実部と虚部にわけて表現するならば,

$$\mathrm{Re}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}, \quad \mathrm{Im}[F(k)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{k}{a^2+k^2} \tag{4.39}$$

ともかける. [基礎] 複素数 $z = x + iy$ の実部を $\mathrm{Re}[z] = x$, 虚部を $\mathrm{Im}[z] = y$ とそれぞれかく (この表記を用いる際には, 虚数単位 i は含めない).

[†419] [発展] 余力がある者は, コンピュータを用いて実部と虚部のグラフを描いて, 実際に, それぞれ偶関数と奇関数であることを確かめよ. さらに, これらの関数の主要な特徴を見出してみよ.

[†420] [発展] 厳密にいうと「区分的に滑らかで絶対可積分な関数」を仮定する (§ 4.4.4).

[†421] ここは, Fourier 変換の演算子 $\mathcal{F}$ による表現が活きる箇所といえる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

これを用いて, 1 階導関数 $f'(x) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ の Fourier 変換

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{4.41}$$

を部分積分を用いて計算することができる [†422]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f'(x)] &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(e^{-ikx} \right)' \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[f(x) e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\text{ゼロ (後述)}} - (-ik) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x}_{F(k)\ \text{の定義}} \\
&= ik\mathcal{F}[f(x)] = ikF(k)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

すなわち, **導関数の変換は $F(k)$ の ik 倍**になる. ただし, 第 1 項の極限においては, $f(x)$ が x の遠方で十分速く収束すること

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \tag{4.43}$$

を仮定し [†423][†424], これを根拠に第 1 項をゼロとみなした. 繰り返すが, この仮定の妥当性に現時点で固執しすぎるのではなく, **最終的に答えが得られてから収束を検証すればよい** [†425].

$f(x)$ の x に関する微分の演算は, $f(x)$ の Fourier 変換 $F(k)$ に ik を掛ける操作に変換された. **導関数の変換と聞くと, 一見, 面倒な微分の操作を行う必要を感じさせるが, そのようなものは不要であって, 機械的に ik を掛けるだけでよい** [†426].

---

†422 [†167] 部分積分の公式を万一忘れても, 一瞬で再現できることを示した (むしろ, その都度導いてもよいだろう).

†423 「本当か」と思うかもしれないが, 普通に考えて, これが満たされねば, 無限大の区間での定積分ができるはずがない. さもなくば発散する.

†424 先ほどと同様に, 可能ならば

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) e^{-ikx} = 0 \tag{4.44}$$

が満たされればよいのだが, 複素指数関数 (三角関数) e^{-ikx} の極限が不定であるため, ここを考えることは放棄して, $f(x)$ だけに制約を課す.

†425 そもそも, ある x に対して $f(x)$ が発散するのならば, 可積分であるはずがないし, Fourier 変換を計算できるはずもない.

†426 三角関数を複素指数関数に拡張したときと似た性質だが (§ 2.1.3), **当たり前といえる**. やっていることは, (複素) 指数関数の微積分に他ならないからである. 何より, Euler の公式 (2.4) のおかげであることを忘れてはならない. そして, この性質が, (とくに高階の) **微分方程式を解くときに威力を発揮**することも予想できるはずである.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

この掛け算は小学生でもできるという意味で[†427], 面白い性質であるばかりでなく, Fourier 変換を応用する上で強力な道具となる[†428][†429].

問題 51. (4.42) を導け.

問題 52. 2 階導関数 $f''(x) = \mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}x^2$ の Fourier 変換を $F(k)$ を用いて表せ[†430].
[解] 以下のように計算できて, 元の関数の変換 $F(k)$ の $(ik)^2 = -k^2$ 倍となる[†431]:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f''(x)] &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f'(x)e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{(-ik)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \\ &= ik\mathcal{F}[f'(x)] = (ik)^2\mathcal{F}[f(x)] = -k^2F(k) \end{aligned} \tag{4.45}$$

ここでは, 1 階導関数 $f'(x)$ が x の遠方で十分速く収束することを仮定した:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0 \tag{4.46}$$

導関数の Fourier 変換——$(ik)^n$ を掛ければよい——

n 階導関数の Fourier 変換は次式で与えられる:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n F(k), \quad ただし, \lim_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0 \tag{4.47}$$

「Fourier 変換の導関数」$F'(k) = \mathrm{d}F/\mathrm{d}k$ は,「導関数の Fourier 変換」$\mathcal{F}[f'(x)](k)$ とは**全く異なる**ことを注意しておく (確かめよ)[†432].

---

†427 累乗の代数計算ならば中高生レベルといえるが, **単なる掛け算**であるので, 小学生レベルまで簡略化された. これも驚くべき事実である. **複素数のおかげ**である.

†428 現時点では, 導関数の Fourier 変換の恩恵が想像しづらいかもしれない. しかし, Laplace 変換においても類似の処方箋で行うこととなるし, 何より, 微分方程式の解法への応用を考える上で極めて重要である.

†429 繰り返すが, 収束性は, 微分方程式の解を求めた後で容易に確かめることができるし, その方が効率もよい.

†430 [発展] もちろん, $f(x)$ が 2 階まで微分可能でなければならないし, $f'(x)$ が絶対可積分かつ区分的に滑らかな関数でなければならない.

†431 k は実数変数なので, 複素数 $F(k)$ の実部と虚部がそれぞれ k 倍されるという意味である. [注意] $F(k)$ は一般に複素数値関数だが, その独立変数 k が実数である点には注意を要する.

†432 演算子による表記 $\mathcal{F}[f(x)](k)$ と $F(k)$ を併用すると, 混同を招くことが多い. しかし, このような誤解を避ける目的においては, 演算子 $\mathcal{F}$ の記号を用いた方が誤解が少なくなるばかりでなく, むしろ有効に働く. 実際に, 導関数の変換においては, $F(k)$ の表記は使いづらい (いうまで

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 4.7　Gauss 関数の変換 (1)

ここからは, Fourier 変換の発展事項のいくつかを述べる．発展とはいっても, 工学や物理という重要な応用先から見れば全てが基礎事項であって, とくに**工学応用のために欠くことのできない有用な道具ばかり**である [†433].

§ 4.7.1　Gauss 関数

指数関数 e^{-ax} の x を 2 乗にしたものを Gauss 関数 (Gaussian: ガウシアン) という:

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{4.48}$$

ここに, a は正の定数である．理工学の多様な分野で活用される一般常識に属するので, その概形も含めて**知っておくべき**である [†434].

問題 53. Gauss 関数の概形を, フリーハンドとコンピュータで描け．[ヒント] $x = 0$ で最大値 1 をとることを確かめよ．[注意] $e^{-a|x|}$ **と** e^{-ax^2} **が似ていると思ってはならない**．$x = 0$ 周りを見ると, 前者は鋭く尖っているが, 後者はなめらかである．似ているといえるのは, $x \to \pm\infty$ においてゼロに収束するふるまいである．

§ 4.7.2　Gauss 関数の変換

天下りにいうと, Gauss 関数 (4.48) の Fourier 変換は次式で与えられる．これを示そう．

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/(4a)} \tag{4.49}$$

もなく, 1 階導関数 $f'(x)$ の変換を $F'(k)$ と書くのは全くの誤りである)．むろん, 諸君が使う使わないは自由である．

[†433] 紙数と講義時間と難易度の関係上, 残念ながら, 多くの項目を割愛せざるを得なかった．割愛項目の中でも, とくに, Dirac のデルタ関数は重要である (Laplace 変換の際に触れたいと思っている).

[†434] [補足] **正規分布関数** (normal distribution function) とよばれることもある (その場合, 少々形が違うが, 係数が異なる程度であって, 本質的に等価である)．たとえば, 確率統計の講義でも学ぶであろう．**試験の得点は (ふつうは) 正規分布にしたがう**．データの解析において欠かせない関数といえるが, 極論, 人類は全員がデータの処理に携わっている．その意味で**人類にとって必須の関数**であって, 事実, 諸君が今後の勉強や研究の至る所で当たり前のように遭遇するだろう．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

問題 54. Gauss 関数 (4.48) の Fourier 変換を求めよ. [解] まず, (4.48) の Fourier 変換 $\sqrt{2\pi}F(k)$ を定義する:

$$\sqrt{2\pi}F(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{4.50}$$

この先の道筋は全員が回りくどいと感じるだろう. しかし, Gauss 関数の重要性を鑑みて, 我慢して式変形についてきてほしい.

この段階で, いきなり (4.50) の**両辺を k で微分する**という技巧的な方法をとるのである. (i) 左辺は単に $F(k)$ の 1 階導関数となる:

$$\sqrt{2\pi}\frac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k} \tag{4.51}$$

(ii) 右辺も k で微分する [†435][†436]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} e^{-ikx} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-ax^2} e^{-ikx} \mathrm{d}x \tag{4.52}$$

最右辺の xe^{-ax^2} に注目すると, 次の基本的な関係がわかる [†437]:

$$xe^{-ax^2} = \left(-\frac{1}{2a}\right)\frac{\mathrm{d}e^{-ax^2}}{\mathrm{d}x} \tag{4.54}$$

[†435] [厳密には] 書物によっては, 2 つ目の積分において, 常微分の記号 d ではなく偏微分の記号 ∂ を使うものもあるが (x と k の 2 変数関数の k に関する微分であるがゆえに), 今回は気にしない.

[†436] k についての微分と x についての積分の順序は交換可能である.

[†437] 以下の点に注意を要する:

$$\frac{\mathrm{d}e^{-ax^2}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^{-ax^2}}{\mathrm{d}(-ax^2)}\frac{\mathrm{d}(-ax^2)}{\mathrm{d}x} = -2axe^{-ax^2} \tag{4.53}$$

これを高校生のように暗算で済ませたり, 当たり前と思わずに, **合成関数 (composite function) の導関数の公式 (証明を復習してみよ)** に従ったことが重要である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

これを (4.52) に代入すれば, 部分積分できそうだという予想がつき, 実行する:

$$
\begin{aligned}
(4.52) &= -i\left(-\frac{1}{2a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}e^{-ax^2}}{\mathrm{d}x}e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{i}{2a}\left(\underbrace{\left[e^{-ax^2}e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\text{ゼロ (後述)}} -(-ik)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{-ikx}\mathrm{d}x}_{\sqrt{2\pi}F(k)\ \text{の定義}}\right) \\
&= \frac{i}{2a}ik\sqrt{2\pi}F(k) = -\frac{k\sqrt{2\pi}}{2a}F(k)
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

ここで, 2 行目第 1 項の極限においては, 次式が “当たり前に” 成立する [†438]:

$$
\lim_{x\to\pm\infty} e^{-ax^2} = 0 \tag{4.56}
$$

さらに, 2 行目第 2 項の積分は, $F(k)$ の定義に $\sqrt{2\pi}$ を掛けたものに他ならないことを用いた [式 (4.50)].

左辺 (4.51) と右辺 (4.55) を等号で結ぶと, **変数分離形**の 1 階常微分方程式

$$
\sqrt{2\pi}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}k} = -\frac{k\sqrt{2\pi}}{2a}F(k) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}k} = -\frac{k}{2a}F \tag{4.57}
$$

が得られる [†439]. さっそく一般解を求めよう [†440]. 置換積分の公式にしたがって [†441],

$$
\int\frac{\mathrm{d}F}{F} = -\frac{1}{2a}\int k\,\mathrm{d}k \tag{4.59}
$$

[†438] “当たり前” の意味は, グラフを見れば (あるいは見ずとも) 一目瞭然だからである. ただし, $a > 0$ に注意を要する. これまでと同様に, 虚部 e^{-ikx} は振動しているので考える意味もなく, 実部がゼロに収束してくれるだけで十分であった (復習せよ).

[†439] [基礎] 変数分離形 (variable separable) の微分方程式の定義とその解法を復習せよ.

[†440] [解析学 III] 一般解, 特殊解 (特解), 特異解の定義を復習せよ.

[†441] $\mathrm{d}F$ や $\mathrm{d}k$ などをひとかたまりにみなして掛けたり割ったりする操作に慣れ過ぎているかもしれない. そうではなくて, 厳密にいうと,

$$
\int\frac{1}{F(k)}\frac{\mathrm{d}F(k)}{\mathrm{d}k}\mathrm{d}k = \int\frac{\mathrm{d}F}{F} \tag{4.58}
$$

と変形するのである. つまり, 積分記号と一体に変形する置換積分法 (integration by substitution) に従っている.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

となるが, 不定積分を具体的に実行する [†442]:

$$\ln F = -\frac{k^2}{4a} + C_0 \tag{4.60}$$

ここに, C_0 は積分定数 (任意定数) である [†443]. F について解くと, 一般解をうる:

$$F(k) = e^{C_0} e^{-k^2/(4a)} = C e^{-k^2/(4a)} \tag{4.61}$$

ここに, 新しい任意定数を $C \equiv e^{C_0}$ とおきかえた. C さえ決まれば, Gauss 関数の Fourier 変換は "完全に"確定する. [続きは § 4.11]

問題 55. [Gauss 関数とその変換の概形の類似性] まだ, 任意定数 C が含まれているが, それでも, $F(k)$ **がどのようにふるまうかの情報を得るためには十分な結果な**のである. $C > 0$ と仮定して, $F(k)$ の概形を描き, それが Gauss 関数 $f(x) = e^{-ax^2}$ の概形と本質的に同様であることを確かめよ [†444] **元の関数ときわめてよく似た形**をしている点が重要である [†445].

§ 4.8　たたみこみとその変換

　たたみこみ積分とは [†446], その名のとおり, 積分によって定義される関数である. 本科目や Fourier 変換のみならず, Laplace 変換や微分方程式の解法の全般において

---

†442 [記号] ln の底は Napier 数 e と定義する. 書物や分野によって対数の表記が異なるので, 面倒ではあるが, 単に, **底が何か (e か 10 かなど)** をその都度注視すればよいだけである.

†443 [基礎] **"1 階"方程式だから "1 個"の任意定数**が現れたのである. そもそも, なぜ積分定数がでてくるのか. 「不定積分だから」だけで終わってはならない. 「微分方程式 "だけ"だから」と考えよう. これは一般解であって, 特殊解ではない. [さらに] 邪魔な任意定数を消去するためにはどうすべきか. 1 階方程式ならば, 1 個の初期条件 (あるいは境界条件) が必要である. 設定して任意定数を消去してみよ.

†444 「係数が込み入っている」や「独立変数が違う」などの声が聞こえてきそうであるが, それらは本質ではない. **細部の差異を除けば, いずれも** $e^{-\xi^2}$ **なる関数ではないか**. このように, **未知の関数に遭遇した際に, そのふるまいを何となくでも掴みたいときには, 大雑把な見方も重要**なのである.

†445 このように, 変換が元の関数と似ていることは重要な性質である.

†446 [用語] 単に, たたみこみや, 合成積 (convolution) ということもある.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

多用されるばかりでなく, **工学の道具として欠かせない関数の 1 つ**である †447†448.

§ 4.8.1 たたみこみ積分の定義

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみこみ $h(x)$ は, 次式で定義される †449:

$$h(x) \equiv (f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \tag{4.62}$$

ここに, $*$ はたたみこみ積分を明示する演算子である †450†451. 右辺は y に関する定積分であるから, たたみこみ積分 $h(x)$ は x だけの関数である †452.

問題 56. "たたみこみの順番は問題にならない" こと, すなわち, 次式を示せ †453:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(x-\eta)\mathrm{d}\eta \tag{4.64}$$

---

†447 この段階では, たたみこみの定義や諸公式を見てもわかりづらく, 何に役立つのかも意味不明で, 退屈であろう. しかしながら, 研究レベルにおいても多用される必要不可欠な「応用のための」道具であるから, 準備しておかねばならない.

†448 [応用] 側近の科目でいうならば, 電気回路やシステム制御工学などで多用されるだろう. また, 音響学, 光学, 画像処理なども典型的な応用先である.

†449 **定義なので記憶**せねばならない. なお, Laplace 変換の章でも, この定義を用いるが, 少々形が異なる.

†450 [記号] $(f * g)(x)$ ではなく, $f(x) * g(x)$ と書いてもよい. どちらかというと, 前者の方が簡潔な表現である. また, x 依存性を表す引数 (x) は省略してもよい. さらに, この演算子 $*$ を使いたくなければ使わなくともよい. Fourier 変換の演算子 $\mathcal{F}$ と同様の立ち位置と思ってよい.

†451 [記号] $f(x) * g(x)$ を省略して, 単に, 次式のように書いてもよい:

$$h(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \tag{4.63}$$

†452 変数 y について $(-\infty, \infty)$ で定積分するのだから, 積分後には y の依存性は消えている. この意味で, y ではなく他の記号を用いてもよい. 定積分なので, 結局は y は消えるからである. しかし, **x を他の記号にすり替えることは厳禁**である.

†453 たたみこみの演算子を用いると, 「$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$ を示せ」と言い換えられる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

[ヒントと略解] 重要なことは, **左辺の定積分において x が定数とみなされること**である [†454]. そこで, $\eta = x - y$ と変数変換する [†455]. これに伴って以下に注意する: (i) $\mathrm{d}\eta = -\mathrm{d}y$ となる [†456]. (ii) z の積分範囲は $z \to -\infty$ から $z \to \infty$ までであったので, **η の積分範囲は $\eta \to \infty$ から $\eta \to -\infty$ に負号が逆転する**. (i) と (ii) を左辺に代入して, 2 つの負号の相殺を考慮すれば, 題意の等号が示される.

§ 4.8.2　たたみこみの定理 (たたみこみの変換)

極めて強力な公式であるので, 結論からいおう. **「2 つの関数の Fourier 変換の積 (の $\sqrt{2\pi}$ 倍) は, それらの関数のたたみこみの変換に等しい」**.

これを数式で表現する. $f(x)$ の Fourier 変換を $F(k)$, $g(x)$ の Fourier 変換を $G(k)$ とするとき, $f(x)$ と $g(x)$ のたたみこみとして作られる関数 $h(x)$ の Fourier 変換 $H(k)$ は, 次式で与えられる [†457][†458]:

$$H(k) = \sqrt{2\pi} F(k) G(k) \tag{4.66}$$

ひとまずは, (4.65) を証明しよう. その後に, 次節で常微分方程式の解法への応用を体感し, たたみこみの強力性を実感してもらうこととする [†459].

問題 57. (4.65) を証明せよ.

[†454] [基礎だが重要] もちろん $f(x-y)$ と書かれているのだから, 関数 f は独立変数 x にも独立変数 y にも依存する. しかしながら, **被積分関数 (integrand) としてみると, 積分はあくまで y だけに関して実行される** (決して重積分ではない). したがって, **x は積分に関与しないのだから, 「"被積分関数として"ならば」x を定数 "のように"扱うことに問題はない**.

[†455] [記号] ギリシャ文字のイータ (eta) η とは, アルファベットの y に対応して使われることが多い. 同様に, 後出のグザイ (クサイ, xi) ξ は, x に対応して用いられる.

[†456] 積分の中では x が定数とみなされるからである.

[†457] 演算子 (operator) を用いるならば, 次式のようにも書ける:

$$\mathcal{F}[(f*g)(x)](k) = \mathcal{F}[f(x)*g(x)](k) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)](k)\mathcal{F}[g(x)](k) \tag{4.65}$$

念のため, 引数の (k) を略さず書いているが, 自明と思えば略してもよい.

[†458] 書物によっては, $\sqrt{2\pi}$ がないものもあるが, それは, 単に, Fourier 変換の定義における積分前の係数 $1/\sqrt{2\pi}$ の整え方が異なるからであって, 本質とは程遠い.

[†459] [応用例] $f(x)$ と $g(x)$ の変換がわかっており, つぎに $h(x) = f(x)*g(x)$ の変換を求めたいとする. そのためには, まず, $h(x)$ を求めねばならない. しかし, たたみこみの定義に従った積分計算が困難であることが想定される. そうだとしても, $h(x)$ を知らずともその変換 $H(k)$ は計算できるのである. つまり, $h(x)$ を求めるための面倒なその積分を回避して, 単に, $f(x)$ と $g(x)$ の変換 (および $\sqrt{2\pi}$ を) を掛けるだけで $H(k)$ が得られるのである. ここに, たたみこみの変換の恩恵の 1 つがある.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

[証明][460] $h(x)$ の Fourier 変換 $H(k)$ にあらかじめ $\sqrt{2\pi}$ をかけて, 変形してゆく:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sqrt{2\pi}H(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x}_{\sqrt{2\pi}H(k)\ \text{の定義}} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)*g(x)}_{h(x)\ \text{の定義}} e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{x} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{y} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right] e^{-ikx}\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

ここで休止し, 式変形の方針を立てよう[461]. **題意から推測すると,「$f(x-y)e^{-ik(x-y)}$ および $g(y)e^{-iky}$ なる 2 つの塊が欲しい」と望む**だろう. そこで, e^{iky} を持ち込むことを検討するが, これには支障はなさそうである. なぜならば, 上記 2 つの塊に含む指数関数は, $1 = e^{iky}e^{-iky}$ を満たしているからである. 式変形を進めよう:

$$
\begin{aligned}
(4.67) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right] e^{-ikx} \underbrace{e^{iky}e^{-iky}}_{\text{掛けて }1} \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{y} \underbrace{g(y)e^{-iky}}_{\text{順序交換}} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}}_{x} f(x-y)e^{-ik(x-y)}\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

x 積分と y 積分の順序を交換し[462][463], e^{iky} を利用して, **うまく Fourier 変換の定義に近づけた**.

(4.68) の 2 行目の大括弧内の積分において, **積分に関与しない変数 y は定数とみなされる**ので, $x-y \equiv \xi$ とおくと, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\xi$ と変換され, 積分範囲は, x も ξ

[460] 詳細に書くのでややしつこいと思うかもしれない. 諸君は必ずしもこのとおりに理解する必要はない.

[461] [解析学 II] (4.67) は**重積分** (multiple integral), 正確には 2 重積分 (double integral) である.

[462] 積分記号の外に出さなければ, 順序は問題とはならない.

[463] もちろん, 初見では「このような順序交換をどうやって思いつけるのか」と思うだろうが, あえて大雑把にいうならば, **試しにどんどん入れ替えてみて最後に辻褄をあわせる**のである. 繰り返すが, **講義を聴いて (読んで) すぐさま理解できる内容ではありえない**と断言する. 復習と自習が必須であって, 他人が書いた式変形を見て覚えても力はつかない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

も, $-\infty$ から ∞ までで変わらない. 変形をすすめる:

$$
\begin{aligned}
(4.68) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ik\xi}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky}\mathrm{d}y}_{y\ \text{定積分後に}\ k\ \text{の関数}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-ik\xi}\mathrm{d}\xi}_{\xi\text{定積分後に}\ k\ \text{の関数}} \\
&\equiv \sqrt{2\pi}G(k)\sqrt{2\pi}F(k) = 2\pi F(k)G(k) = \sqrt{2\pi}H(k) = (4.67)\ \text{左辺}
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

したがって, 両辺を $\sqrt{2\pi}$ でわれば, 題意 (4.65) をうる. [証明終]

§ 4.9 常微分方程式の境界値問題の解法への応用

たたみこみ積分 (§ 4.8) と導関数 (§ 4.6) の Fourier 変換を利用する問題を解こう. 一言でいえば, **Fourier 変換は空間変数の変換に適用**されることが多い. 積分範囲の ∞ から想像されるように, **無限に広がった空間**を考える際に応用がきく [†464].

§ 4.9.1 "非斉次の" 2 階定数係数線形常微分方程式の解法

問題 58. Fourier 変換の方法を用いて, 非斉次の 2 階定数係数線形常微分方程式 [†465]

$$
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - a^2 f = q(x) \tag{4.70}
$$

を解け. ただし, 境界条件は

$$
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0 \tag{4.71}
$$

[†464] Fourier 変換は, 区間 $|x| < \infty$ の定積分で定義された. したがって, 無限に広い空間で定義される関数の変換 (空間座標 (空間変数) の変換) に応用される. その一方で, Laplace 変換は $0 \leq t < \infty$ で定義されるので, 時間の変換に有効となる.

[†465] **[基礎・解析学 III] 常微分方程式の分類**ができるだろうか. (i) 線形と非線形, (ii) 斉次 (同次) と非斉次 (非同次), (iii) 定数係数と変数係数, (iv) 常微分方程式 (**ODE**: Ordinary Differential Equation) と偏微分方程式 (**PDE**: Partial Differential Equation), (v) 階数 (1 階, 2 階, n 階など). これらの分類は, 微分方程式を解けるか否か以前の問題であって, 理工系の一般常識であるので, 速やかに復習すべきである.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

とする[†466][†467]. ここに, $f(x)$ は実数変数 x に依存する未知の実数値関数 (求めるべき変数), $q(x)$ は x には依存するが**既知**の関数 (非斉次項あるいは任意関数), a は正値をとる**既知**の実数定数である.
[解] **両辺を Fourier 変換**する[†468][†469]:

$$(-k^2 - a^2)F(k) = Q(k) \tag{4.72}$$

ここに, $Q(k) = \mathcal{F}[q(x)](k)$ であって, 左辺第 1 項の変換には 2 階導関数の変換公式 (4.45) を用い, その際に**境界条件 (4.71) を適用**した[†470]. $F(k)$ について解く:

$$F(k) = -\frac{1}{a^2+k^2}Q(k) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathcal{F}[e^{-a|x|}](k)\mathcal{F}[q(x)](k) \tag{4.73}$$

2 つ目の等号に面食らうだろうが, この変形の動機は, $e^{-a|x|}$ **の Fourier 変換**

$$\frac{1}{a^2+k^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathcal{F}[e^{-a|x|}](k) \tag{4.74}$$

を思い出したのである [式 (4.37)][†471]. 係数が少々煩雑になるのは仕方がない[†472].

---

†466 [用語] 微分方程式と境界条件の組み合わせを微分方程式の**境界値問題** (boundary value problem) という. 同じ意味で, **初期値問題**や**初期値境界値問題**という言い回しも多用される (とくに数値解析の分野). 実は, **常微分方程式の初期値問題**は, この後で学ぶ Laplace 変換に支配されると言っても過言ではない.

†467 [重要] なぜ境界条件が “2 本” あるのか. それは, “2 階” 方程式だからである. 身近な 2 階常微分方程式を例示して, もしも境界条件が 1 本あるいは 3 本ならば, 解が定まらないことを確かめてみよ.

†468 この方法は**丸暗記する価値**すらある.

†469 [基礎] **Fourier 変換は線形演算**であるので, 各項を独立に変換することが可能である (証明済みであるが, 改めて確認せよ).

†470 [復習] 導関数の変換公式 (4.45) の前提に何があったのかを復習せよ.

†471 こう書かれると,「いちいち諸関数の Fourier 変換の結果までも覚えねばならないのか」と思うだろうが, そうではない. 網羅的に覚える必要などない. しかしながら, **「指数関数の Fourier 変換が $1/(1+x^2)$ に似ていた」程度のイメージ**は忘れないでほしい. **変換の概形が元の関数の概形と似ている**ことも知っておくべきである. [補足] 試験対策のためにという意味ならば, もちろん, 記憶は不要である.

†472 もちろん, 係数は本質とは程遠い. **煩雑な係数ではなくて, どのような関数か**だけに注意を払ってほしい.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

さて, 解としての $f(x)$ を求めるべく, 両辺を逆 Fourier 変換する [†473]:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)](x) &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathcal{F}^{-1}\left[\underbrace{\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}\right]\mathcal{F}[q(x)]}_{\text{変換の積}}\right] \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\mathcal{F}\left[e^{-a|x|} * q(x)\right]}_{\text{たたみこみの変換}}\right] \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|}q(y)\mathrm{d}y}_{\text{たたみこみの定義}}\right]\right] \\
&= -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|}q(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

2 行目では, **変換の積の $\sqrt{2\pi}$ 倍がたたみこみの変換に等しい性質** (4.65) を思い出し, 4 行目では, 変換の逆変換は元の関数に戻る性質を用いた.

したがって, 境界値問題 (4.70)(4.71) の解は次式で与えられる [†474]:

$$
f(x) = -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|}q(y)\mathrm{d}y \tag{4.76}
$$

この解が境界条件 (4.71) を満たしていることは, 容易に確認できる [†475]. [証明終]

§ 4.9.2　意義と要点

常微分方程式を Fourier 変換で解くことの意義と要点を列挙しておこう:

(i) 昨年度までの諸君ならば, 非斉次項の存在をみて「まずは非斉次項の特殊解 (特解) を求めねばならない」と思ったはずである [†476]. しかし, 本手法ならば, **非斉次方程式を "そのまま" 解く**ことができる. つまり, 非斉次方程式の特殊解や斉次方程式の一般解という, **さまざまな解をそれぞれ求めて和をとる労**

[†473] **変換を逆変換すると元の関数に戻る**性質を思い返す ($\mathcal{F}^{-1}$ と $\mathcal{F}$ の相殺): $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[F(k)]] = f(x)$

[†474] 境界条件を既に代入した解であるがゆえに, もちろん, **任意定数は含まない** (確かめよ). なお, 2 階方程式の一般解は 2 個の任意定数を含む.

[†475] 実際に, $x \to \pm\infty$ の極限を取って, 境界条件を満足していることを確かめよ.

[†476] [用語] 非同次項と非斉次項は同義 (inhomogeneous term) であるが, 同次形の微分方程式との区別のため, あえて, 非斉次とよぶこととする.

力から解放される[†477].

(ii) 非斉次項が $q(x)$ と一般的に与えられているので[†478], 多くの者が定数変化法で解くはずであるが, いささか計算量が多い[†479]. これを避けて, わずか数行で解を求められる.

(iii) 微積分を行う必要がなく[†480], 代数的な計算で閉じてしまう. その際に, たたみこみ積分が有用となる.

(iv) $-\infty < x < \infty$ という無限空間で定義される未知変数 $f(x)$ がしたがう微分方程式の境界値問題の解法において, Fourier 変換は強力な道具となる[†481†482].

§ 4.10　Plancherel の等式とエネルギースペクトル

§ 4.10.1　変換のたたみこみは元の関数の積の変換

たたみこみについて, 次式も成立する:

$$[\mathcal{F}[f(x)] * \mathcal{F}[g(x)]](k) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)g(x)](k) \tag{4.77}$$

すなわち, **「2 つの関数の積の Fourier 変換 (の $\sqrt{2\pi}$ 倍) は, それぞれの関数の Fourier 変換のたたみこみに等しい」**[†483]. 初学者にとっては, 表現が難解に見え

[†477] 「非斉次方程式の一般解は斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解の和」という長ったらしい定理を知る必要がない (復習として, これを示せ). これは, Laplace 変換を常微分方程式の"初期値"問題の解法でも同様である.

[†478] 非斉次項がたとえば $q(x) = \sin x$ のように具体的に与えられていたならば, 未定係数法 (method of indeterminate coefficients) に頼る者もいるだろう.

[†479] むろん, 定数変化法 (method of variation of constants) は汎用的な解法である. しかし, 1 階方程式ならば計算量は多くはない一方で, 2 階方程式を解くための計算量はそれなりに多く, これを毎日のように書き下すことは耐えきれないと感じるはずであろう.

[†480] 具体的な微積分という意味である. もちろん積分記号は現れているし, 導関数の変換公式を用いているが, それらは形式的なものといってよい.

[†481] この点は偏微分方程式の解法においても同様である. **無限空間で定義される関数に遭遇したならば, 瞬時に Fourier 変換を思い浮かべるべきである.**

[†482] [発展] 変数係数の微分方程式ならば, Fourier 変換で解けるか. 解けないか. 検討せよ.

[†483] 見にくければ, 次のように書いてもよいだろう:

$$(F * G)(k) = F(k) * G(k) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)g(x)](k) \tag{4.78}$$

これ以外にも, 自身の理解しやすい形に書き換えればよい. 表現は問題ではない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

るのは致し方ない. 慣れるより仕方がない[†484].

ここから Plancherel の等式が導かれる (次節).

問題 59. (4.77) を証明せよ. [証明] 右辺から変形して左辺に至ることを示す:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{RHS}) &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f(x)g(x)](k) \equiv \underbrace{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{相殺}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)e^{i\ell x}\mathrm{d}\ell\right]}_{G(\ell)\text{ を逆変換して }g(x)\text{ に戻す}} \mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

ここで, $G(\ell)$ を逆 Fourier 変換すると $g(x)$ に戻ること, すなわち逆変換の定義

$$
g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)e^{i\ell x}\mathrm{d}\ell \tag{4.80}
$$

を代入した[†485][†486]. あとは, x と ℓ の積分順序の交換だけで対処できる:

$$
\begin{aligned}
(4.79) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}e^{i\ell x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\ell \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-\ell)x}\mathrm{d}x\right]}_{\text{変換 }F(k-\ell)\text{ の定義}}\mathrm{d}\ell \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} G(\ell)F(k-\ell)\mathrm{d}\ell \equiv F(k)*G(k)}_{\text{たたみこみの定義}} = (\mathrm{LHS})
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

一見複雑に見えるが, **逆変換と変換の定義に忠実に従う**以上ではない[†487]. [証明終]

[†484] 同様の意味で, 講義を聴いただけで理解できることはありえない. 講義は理解の助け以上ではない. 復習によって, **自分の手で式変形を一行一行確かめねば理解はありえない**. 今回, 復習していない者は, 今現在, 全く持って訳が分からなくなっているはずであるが, たとえ復習していたとしても, 容易に理解できる内容ではない. **改めて復習が全てであることを強調しておきたい**.

[†485] 逆変換の場合, 指数関数 $e^{\pm ikx}$ の負号が付かない場合であることに注意せよ (e^{ikx}). つまり, 複素 Fourier“係数”ではなく, **複素 Fourier“級数”を逆 Fourier 変換と関連付けるのである**.

[†486] 最後に出てくる変数 k との差別化のために, 積分変数に ℓ を用いたが, 定積分によって積分変数の記号は消えるので, もちろん k を用いてもよい.

[†487] とはいっても, 慣れるまでは大変である. とくに, **逆変換と変換の差異, x と k の差異, どのような変数で定積分して積分後の変数は何になるのかなどには, 十分な注意を要する**.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 4.10.2 Plancherel の等式

実数値関数 $f(x)$ とその Fourier 変換 $F(k)$ の間に, Plancherel (プランシュレル) の等式が成立する [†488][†489]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)]^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|F(k)|^2\mathrm{d}k \tag{4.82}$$

2 乗に着目すべきであって, (4.82) の成立の前提に, $f(x)$ に対して絶対可積分かつ 2 乗可積分が課される [†490]. $|F(k)|^2$ を**エネルギースペクトル**というが, その由来と Plancherel の等式の物理的意味は深入りせずに, 脚注に記すにとどめる [†491][†492].

たとえ $f(x)$ が実数値関数であっても, **一般に Fourier 変換は複素数値関数**

[†488] [用語] Fourier 級数に対する Parseval の等式 (3.26) と本質的に等価な位置付けである. 用語を区別せずに, Plancherel の等式を, 広い意味での Parseval の等式に含めることもある.

[†489] [発展] 実は, $f(x)$ は実数値関数に限定されず, 複素数値関数でもよい. 複素数は実数を包含するがゆえに (虚部がゼロの場合が実数なので, 実数とは複素数の特別な場合に属する), $f(x)$ が複素数値関数の場合であっても, (4.82) の成立を示すことができるし (証明せよ), これまでの議論を拡張することもできる. ただし, 複素数値関数 $f(x)$ を扱う場合は, 単なる括弧 [ ] ではなく, 絶対値記号 | | を用いて, 左辺を $|f(x)|^2$ と書かねばならない (理由を考えよ).

[†490] [発展だが重要] $-\infty < x < \infty$ で定義される関数 $f(x)$ が可積分 (integrable) であるとは,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty \tag{4.83}$$

の成立が要請された. すなわち, **積分値が発散せずに確定**せねばならなかった. (4.82) の成立の前提には, 絶対可積分のみならず, 以下の 2 乗可積分の成立も要請される:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)]^2\mathrm{d}x < \infty \tag{4.84}$$

[†491] 重要でないという意味ではなく, あくまで, 紙数と講義時間の都合上である.

[†492] [発展・応用] $f(x)$ というからには, 空間 x 軸上で定義された関数を連想するだろう. たとえば, **波を対応づけて, $f(x)$ を波の振幅** (amplitude) と思えばよい. しかし, データを解析する際には, 必ずしも空間座標が便利とは限らず, 波数 (wavenumber: 波長 λ の逆数であって, 単位長さあたりに含まれる波の個数) $k = 2\pi/\lambda$ [rad/m] の方が便利なことが多い. **現実の空間座標 x から, 波の空間 (Fourier 空間) の座標 k への変換が Fourier 変換**なのである. **$F(k)$ とは, おのおのの波数成分が, $f(x)$ の中にどの程度含まれているか**を教えてくれる. [エネルギー] 振幅の 2 乗 $[f(x)]^2$ はエネルギーに他ならない. それを全区間 $|x| < \infty$ で積分したものは波の全てのエネルギーである. **全エネルギーは, 空間座標 x で記述しようが, 波数 k で記述しようが, 不変に決まっている**. すなわち, $|F(k)|^2$ の $|k| < \infty$ での積分値と等しい. これが (4.82) の意味するところである. [時間と空間—角周波数と波数—] 独立変数 x を時間 t におきかえると, 波数 k のかわりに角周波数 (角振動数: angular frequency) ω [rad/s] が対応する. 本資料では, Fourier 変換の慣例にしたがって $f(x)$ を用いているが, 時間を引き合いに出す方が応用上はわかりやすいだろう. ついでながら, Fourier 変換の対象は波に限定されない. [注意] 本脚注は, あくまで, ざっくりとした意味を述べたに過ぎない. 物理への応用数学 (applied mathematics) という観点から, より高みを目指してほしい.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

になる (虚部がゼロの場合も含め). だからこそ, (4.82) において, $F(k)$ **の 2 乗を** $|F(k)|^2$ **と絶対値で書く**必要がある (決して $[F(k)]^2$ と書いてはならない). 具体的な関数 $F(k)$ を (4.82) に適用するときには, まず, 複素数 $F(k)$ の複素共役 $\overline{F(k)}$ を計算して, 絶対値 $|F(k)|^2 = F(k)\overline{F(k)}$ を求めてから, 右辺の積分に代入する.

問題 60. Plancherelの等式 (4.82) を証明せよ. [証明] ポイントは2点である: (4.77) において, **(i)** $f(x) = g(x)$ **の場合を考えて, (ii)** $k = 0$ **とおいてみる** [†493].

(4.77) 左辺は, 単純に $f(x)$ の 2 乗となる [†494]:

$$\mathcal{F}[f(x)f(x)](0) = \mathcal{F}[[f(x)]^2](0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 e^{-0ix}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 \mathrm{d}x \tag{4.85}$$

(4.77) 右辺は, たたみこみの定義より,

$$F(k) * F(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(k-\ell)F(\ell)\mathrm{d}\ell \tag{4.86}$$

であるが [†495], これに $k = 0$ を代入する [†496]:

$$(4.86) = \int_{-\infty}^{\infty} F(-\ell)F(\ell)\mathrm{d}\ell \underbrace{= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\ell)}F(\ell)\mathrm{d}\ell}_{F(-\ell)=\overline{F(\ell)}} \underbrace{= \int_{-\infty}^{\infty} |F(\ell)|^2\mathrm{d}\ell}_{\text{絶対値!!}} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2\mathrm{d}k \tag{4.87}$$

2 つ目の等号において, Fourier 変換の複素共役 $\overline{F(k)}$ が $F(-k)$ に等しい性質

$$\begin{aligned}\overline{F(k)} &\equiv \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{e^{-ikx}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-k)x}\mathrm{d}x \equiv F(-k)}_{F(-k)\text{ の定義}}\end{aligned} \tag{4.88}$$

[†493] [考え方] 題意 (4.82) を見て, つぎのように発想した: (i)“同じ”関数の 2 乗を表現したかったからである. (ii) 指数関数を含まないので, 指数関数を除去するために何をすればよいかを考えた.

[†494] 引数 (0) は $k = 0$ を意味する.

[†495] ℓ は積分変数なので定積分によって消える. もちろん, 他の記号でも良い.

[†496] 最右辺では, Fourier 変換の記号の慣例にならって $\ell = k$ と置き直したが, 定積分なので, もちろん ℓ のままでも問題ない (本質ではない).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

を用いた[†497]. いくつかの注意を脚注に記す[†498][†499][†500]. [証明終]

§ 4.10.3　定積分の計算への応用

Fourier 級数に対する Parseval の等式 (3.26) は, (離散的な) 無限級数の和の値を与えてくれた (§ 3.3.2). 同様に, **Fourier 変換に対する Plancherel の等式 (4.82) は, (連続的な) 定積分の値を知る手がかり**となる.

問題 61. 次式を示せ (左辺の定積分の値を計算せよ).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{(1+k^2)^2} = \frac{\pi}{2} \tag{4.89}$$

[解] 被積分関数の $1/(1+k^2)$ を見て, **またしても $e^{-|x|}$ の変換であると予測する**[†501]. そこで, $f(x)=e^{-|x|}$ とおいて, (4.82) の左辺に $f(x)$ を代入し, 右辺にはその Fourier 変換 $F(k)$ を代入する.

変換 $F(k)$ はすでに求めている. (4.37) に $a=1$ を代入すると, $e^{-|x|}$ の変換は

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+k^2} = F(k) \tag{4.90}$$

であった. これは実数値関数であるので (虚部がゼロとなった), その複素共役も形はかわらない. したがって, (4.82) の右辺は,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 \mathrm{d}k &= \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\overline{F(k)} \mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+k^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+k^2} \mathrm{d}k \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{(1+k^2)^2} \end{aligned} \tag{4.91}$$

---

†497 2 つ目の等号において, 複素共役の演算記号が e^{-ikx} のみにかかったのは, これ以外が全て実数 (実定数および実数値関数) だからである (確かめよ).

†498 そもそも, x と k は実数変数, $f(x)$ は実数値関数, $F(k)$ **は複素数値関数**であった. つまり, **Fourier 変換 $F(k)$ を考える場合のみ, 複素数の議論の介入**に注意しておくだけでよい.

†499 [復習] $\overline{e^{-ikx}} = e^{ikx}$ を Euler の公式に基づいて証明せよ (出題済).

†500 [復習 (基礎)] $z\overline{z} = |z|^2$ を示せ. ここに, $z = x + iy$ は紛れもなく複素数であるが, **絶対値 $|z|^2 = x^2 + y^2$ は実数**である.

†501 $1/(1+k^2)$ が偶関数であることも, 偶関数 $e^{-|x|}$ を予想させる要因の一つである. もちろん, 実際には, $e^{-|x|}$ の変換を求めて (あるいは参照して), 予想を確信に変えればよい.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

と変形できる．一方で, (4.82) 左辺の定積分は速やかに計算できる:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|x|}\mathrm{d}x=\underbrace{2\int_{0}^{\infty}e^{-2x}\mathrm{d}x}_{\text{偶関数}}=1 \tag{4.92}$$

したがって, 等号で結べば, 題意の定積分の値をうる．[証明終]

§ 4.11　Gauss 関数の変換 (2)

§ 4.7 で Gauss 関数の Fourier 変換を求めたが [式 (4.61)], 任意定数 C の決定にまでは至らなかった．C を求めるための手段として, 以下の 2 通りが挙げられる: (i) Plancherel の等式 (4.82) の利用, (ii) Jacobian を用いた Gauss 積分の計算 †502.

(ii) は既習であるので, ここでは (i) の方法にしたがう.

§ 4.11.1　Gauss 積分に含まれる任意定数

まずは, 微積分の考え方から, Gauss 積分の値を任意定数を含めて決定する．その後, Plancherel の等式を用いて, (4.61) で残されたままの任意定数 C を決定する.

問題 62. Gauss 積分に関する次式を導け．ここに, D は任意定数とする.

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{D}{\sqrt{a}} \tag{4.93}$$

ただし, 次の極限に関する性質を用いてよい:

$$\lim_{x\to\pm\infty}xe^{-ax^2}=0 \tag{4.94}$$

[証明] Gauss 積分は a だけの関数とみなせるので †503, これを $G(a)$ とおく:

$$G(a)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\mathrm{d}x \tag{4.95}$$

---

†502 解析学 II で既習の Jacobian (Jacobi 行列式) を利用すれば, Gauss 積分の値を技巧的に計算することができる．復習も兼ねてやっておくとよい．[処方箋] (i) Gauss 積分の 2 乗を考えて, あえて 2 重積分の問題に落とし込む．(ii) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と極座標変換する．(iii) 変数変換の Jacobian を計算し, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ により積分変数を変換する (この式は厳密ではない．積分記号および被積分関数とセットでなければならない)．(iv) 定積分は容易に実行できる．(v) 平方根をとる.

†503 x に関する定積分の後に残るのは, a 依存性のみである.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

部分積分によって,

$$G(a) = \underbrace{\left[xe^{-ax^2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{極限\ (4.94)} - \int_{-\infty}^{\infty} x(-2ax)e^{-ax^2}\mathrm{d}x = 2a\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\mathrm{d}x \tag{4.96}$$

をうるが, $x^2e^{-ax^2}$ の積分計算は大変である. そこで, $G(a)$ を a で微分すると, $x^2e^{-ax^2}$ をうまく抜き出せる:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\mathrm{d}x \tag{4.97}$$

したがって, G に対する変数分離形の微分方程式が導かれる:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}a} = \frac{G}{2a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}G}{G} = -\frac{\mathrm{d}a}{2a} \tag{4.98}$$

不定積分によって, 一般解は速やかに求めることができる (D_0 は任意定数):

$$\ln G = -\frac{1}{2}\ln a + D_0 = \ln a^{-1/2}\ln D = \ln\frac{D}{\sqrt{a}} \tag{4.99}$$

したがって, 以下の題意をうる. [証明終][†504]

$$G(a) = \frac{D}{\sqrt{a}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x \tag{4.100}$$

§ 4.11.2　Gauss 積分と Gauss 関数の変換の確定

問題 63. Gauss 関数 $f(x) = e^{-ax^2}$ の Fourier 変換 $F(k) = Ce^{-k^2/(4a)}$ に含まれる任意定数 C を定め [†505], 変換を確定させせよ.
[証明] ここで Plancherel の等式 (4.82) が活躍する. Gauss 関数 $f(x)$ とその Fourier 変換 $F(k)$ を, それぞれ, (4.82) の左辺と右辺に代入すると, 先ほど定義した関数 $G(a)$ を用いて整理される. 左辺は,

$$(\mathrm{LHS}) = \int_{-\infty}^{\infty}[f(x)]^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-ax^2}\right]^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2}\mathrm{d}x \underbrace{= G(2a)}_{G\ を利用} \tag{4.101}$$

[†504] 実は, 任意定数は $D = \sqrt{\pi}$ である. しかし, 以下で述べる方法は, D を定める操作を抜きにして, Gauss 積分の値を確定させせるものである.

[†505] C は D とは異なる任意定数であった.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

であって [†506], 右辺は次のように変形できる [†507]:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{RHS}) &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 \mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} C^2 \left[e^{-k^2/(4a)} \right]^2 \mathrm{d}k \\
&= \underbrace{C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(2a)} \mathrm{d}x}_{\text{積分変数おきかえ}} \underbrace{= C^2 G(1/2a)}_{G\text{ を利用}}
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

左辺と右辺を等号で結び, 求めたばかりの関数形 $G(a) = D/\sqrt{a}$ を使うと,

$$
G(2a) = C^2 G(1/2a) \implies \frac{D}{\sqrt{2a}} = C^2 D\sqrt{2a} \implies C = \frac{1}{\sqrt{2a}} \tag{4.103}
$$

となるが, ここで $C > 0$ であることを仮定した [†508].

したがって, Gauss 関数の Fourier 変換が確定した [†509]:

$$
\mathcal{F}[e^{-ax^2}](k) = F(k) = Ce^{-k^2/(4a)} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/(4a)} \tag{4.104}
$$

問題 64. Gauss 積分の値を求めよ. [解] § 4.7 における Fourier 変換の定義 (4.50) および変換の結果 (4.61) において, $k = 0$ とおくと, 次式をうる:

$$
\begin{aligned}
F(0) = C = \frac{1}{\sqrt{2a}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-0ix} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x}_{\text{Gauss 積分 } G(a)} = \frac{G(a)}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
\tag{4.105}
$$

ここで, **先述の $C > 0$ が明らかとなった** [†510].

以上より, Gauss 積分の値が確定する [証明終] [†511]:

$$
G(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{4.106}
$$

[†506] $(e^a)^b = e^{ab}$ に注意.

[†507] 2 行目において, 積分変数を k から x に置き換えたが, 定積分であるので, もちろん置き換えなくともよい.

[†508] この仮定の正当性はすぐ後に示される.

[†509] a に適当な正の数を代入し, 再度, $F(k)$ の概形を描いてみよ.

[†510] **全ての x に対して $e^{-ax^2} > 0$ であるがゆえに, Gauss 積分 $G(a)$ は正値**である (Gauss 関数の概形を描いてみよ). したがって, これと等号で結ばれる C も正値に他ならない.

[†511] つまり, 任意定数は $D = \sqrt{\pi}$ であった (直接は用いなかったが).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 4.12　おわりに

以上で, Fourier 変換の章を終えるが,

- Dirac のデルタ関数とその変換
- 可積分性に対する検討
- エネルギースペクトル, スペクトル解析
- 離散 Fourier 変換, 高速 Fourier 変換 (FFT: Fast Fourier Transform)
- 物理と工学への応用例 †512

などを代表として, 未講述事項も多いことが心残りである †513. 偏微分方程式 (後半の講義) を解くための道具として活用する際に, 適宜, 復習してほしい.

最後に, 一般的な表記を示し †514, 1 題を与えておこう:

問題 65. [演習] 次式を示せ.

$$\mathcal{F}\left[x^2 e^{-|x|}\right](k) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{1-3k^2}{(1+k^2)^3} \tag{4.109}$$

ただし, 次の極限の性質が成立する:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0 \tag{4.110}$$

---

†512 健康診断のレントゲン撮影は, Fourier 変換に他ならない. [注] 厳密には, 2 次元の逆 Fourier 変換である.

†513 逆にいえば, 最も容易かつ最も重要な事項だけを講述したので, その先は諸君が独学されたい.

†514 [発展] 3 次元空間座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ および時間 t を独立変数とする 4 変数関数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ の Fourier 変換は, 角振動数 ω および波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ を用いた 4 重積分として

$$F(\boldsymbol{k}, \omega) \equiv \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, f(\boldsymbol{x}, t) \exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)] \tag{4.107}$$

とかける. また, 画像処理などの応用上よく使われる 2 次元 Fourier 変換

$$F(k_x, k_y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(k_x x - k_y y)] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.108}$$

を挙げておく (いずれも積分記号外の定数を省略した).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 5　Laplace 変換

常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 f = q(t) \tag{5.1}$$

の一般解を求めよと問われたならば, 諸君はどのように対応するだろうか †515. ほぼ全員が定数変化法に従って実直な計算を行うだろう †516. しかしながら, その計算量はどれほどのものであったか †517†518. 膨大な計算が招く計算ミスを確実に回避できるだろうか. どん臭くて退屈な計算だとは思わないだろうか.

Laplace (ラプラス) 変換を学ぶ目的とは, 実に明確である †519. **Laplace 変換は, このような定数係数の線形常微分方程式の初期値問題を †520†521, 「簡便に, 系統的に, 要領よく解く」ためのバイパス**なのである.

Fourier 級数 (§ 1–§ 3) の延長線上に Fourier 変換 (§ 4) が定義されたが, **そのストーリー性は Laplace 変換 (§ 5) の場合も変わらない**. Fourier 変換を修正したものが, Laplace 変換に相当するのである. そこで, やはり Fourier 変換から出発して, Laplace 変換を定義しよう †522.

---

†515 ω は定数, $q(t)$ は任意関数とする.

†516 [定数変化法 (解析学 III)] まず, 斉次方程式あるいは同次方程式 (右辺をゼロとおいた方程式) の一般解を求める. つぎに, 非斉次 (非同次) 方程式の特殊解 (特解) を求めるにあたり, 斉次方程式の一般解に含まれる任意定数を変数とみなし, それを決定する方法であった (復習せよ).

†517 1 階方程式ならば計算量は多くはないが, 2 階方程式はどうであったか. 実際に解いてみよ.

†518 この場合, 右辺の非斉次項が, $\sin t$ のように具体的に与えられていないがゆえに, 未定係数法に頼ることもできない.

†519 Fourier 級数や Fourier 変換を学ぶ目的よりも明確といえるだろう.

†520 [基礎] "定数係数" の "線形" "常微分" 方程式の定義を述べよ. 変数係数とはどのような場合か. 偏微分方程式とは何か (後半). 非線形の微分方程式とは何か (発展). [注意] 変数係数の方程式, すなわち, 係数が $\omega(t)$ のように独立変数 t 依存性を有する方程式には, Laplace 変換の方法は適用できない.

†521 [初期値問題 (後述)] **初期値問題とは微分方程式と初期条件を組み合わせたもの**である. Fourier 変換が空間座標の変換 (積分変数変換) に有用であって, 境界値問題に威力を発揮する一方で, Laplace 変換は時間の変換に有用であって, 初期値問題の解法に有効である.

†522 Laplace 変換と Fourier 変換を関係づけずに別々の変換として定義する書物もあるが, われわれの目的は, そのような無機質な知識をバラバラに得ることにはない (そのような知識は Google にでも聞けばよいだろう).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 5.1　定義

独立変数 t に依存する関数 $f(t)$ を考える[†523]. Laplace 変換の慣例にならって, 独立変数には, 空間を連想させる x のかわりに, 時間を思わせる t を用いる[†524]. **関数 $f(t)$ の定義域は** $0 \le t < \infty$ である[†525].

§ 5.1.1　Laplace 変換の定義

指数関数 e^{-ct} のグラフを描けば, 例えば**実数定数** c が正ならば, $t \to \infty$ の極限において**速やかにゼロに収束**することがわかる[†526]. Laplace 変換とは, 指数関数のこの性質を利用した Fourier 変換といえる.

天下りにいうと, $\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}$ の Fourier 変換が Laplace 変換に相当する[†527]:

$$\mathcal{F}[\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}e^{-ikt}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{0}}_{\text{注意}}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{5.4}$$

t の定義域ゆえに, **積分範囲の下限がゼロであることに注意**せよ[†528]. ここに,

$$s \equiv c + ik \tag{5.5}$$

[†523] [基礎] 独立変数と従属変数の定義を述べよ. これが答えられないならば, 高校生以下である.

[†524] [補足] これに即して, Fourier 変換も, 次式のように書き改める:

$$\mathcal{F}[f(t)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t = F(k) \tag{5.2}$$

ここに, k は角周波数 (角振動数: angular frequency) である (次元は rad/s もしくは 1/s). これまでと同じ記号 k を用いたが, たとえば Ω のように周波数を思わせる記号を用いてもよいだろう.

[†525] いいかえれば, いま考えている $f(t)$ は, 負の t に対して次式を満たす:

$$f(t) = 0 \quad (t < 0) \tag{5.3}$$

[†526] 次節で具体的に Laplace 変換を計算する中で, この指数関数の意義が明らかとなる.

[†527] $\sqrt{2\pi}$ を掛けたのは, 単に, 規格化のためである. 少し先読みすれば, この意図に気づくだろう.

[†528] Fourier 変換の場合のように $-\infty$ からではない. そして, **このゼロこそが Laplace 変換を特徴づける**といっても過言ではない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

は**複素変数**であって, 実数変数 c および実数変数 k を用いて定義される [†529][†530].

つまり, **Laplace 変換とは Fourier 変換のある種の修正版**である:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \equiv F(s) \tag{5.7}$$

$f(t)$ の Laplace 変換の表現には次の 2 通りがある: (i) 演算子 $\mathcal{L}$ を用いて $\mathcal{L}[f(t)](s)$ と書く [†531]. (ii) $F(s)$ と書く [†532].

Laplace 変換とは, 実数値関数 $f(t)$ から**複素関数** $F(s)$ への対応関係に他ならない [†533][†534][†535].

問題 66. Laplace 変換が線形演算であること [†536], すなわち, 次式を示せ.

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)](s) = a\mathcal{L}[f(t)](s) + b\mathcal{L}[g(t)](s) \tag{5.8}$$

ここに, a と b は実数定数, $f(t)$ と $g(t)$ は実数値関数である.

---

†529 [基礎] c および k が実数でないならば, このように実部と虚部にわける操作が意味をなさない. 理由を考えよ.

†530 しかし, 以後は, c と k よりも, $\mathrm{Re}(s)$ と $\mathrm{Im}(s)$ という表現, すなわち,

$$s = \mathrm{Re}(s) + i\,\mathrm{Im}(s), \quad ここに,\ \mathrm{Re}(s) = c,\ \mathrm{Im}(s) = k \tag{5.6}$$

を用いることが多い. 多数の記号が現れる煩雑さを防ぐためである.

†531 [記号] $\mathcal{L}[\ ]$ と書いても, $\mathcal{L}(\ )$ と書いてもよい (書物による). [ ] を用いた理由の 1 つは, $\mathcal{L}[f(t)](s)$ を見ればわかるように, Laplace 変換の引数 (s) および f の引数 (t) の括弧 ( ) との差別化のためである. [記号] 演算子 $\mathcal{L}$ には斜体よりもさらに傾けた, 筆記体の L を用いることが慣例だが, 大文字斜体の L と区別されておれば問題はない.

†532 現時点では, どのように使い分ければよいかが不明であろうが, 心配の必要はない. とくに, 微分方程式の解法を学ぶ中で, 使い分けを明確化できるだろう.

†533 [複素関数] 複素関数 (complex function) を数式表現するならば, $w = f(z)$ とかける (従属変数 $w = u + iv$ は, 独立変数 $z = x + iy$ の関数. ここに, z と w はともに複素変数で, x, y, u, v は全て実数変数). すなわち, **複素変数と複素変数の対応を定める写像が複素関数**である. [基礎] 複素関数と複素変数は異なる.

†534 [実数値関数, 複素数値関数, 複素関数 (§ 2.1.1)] Fourier 変換 $F(k)$ は, 実数変数 k に依存する複素数値関数であった. **Laplace 変換 $F(s)$ は, 複素変数 s に依存する複素関数**である. 複素関数と複素数値関数は異なるが, その差異が理解できているだろうか.

†535 複雑に聞こえるだろうが, 演算だけならば, 「複素関数」という言葉に恐れる必要はない.

†536 [用語] いいかえれば, $\mathcal{L}$ は線形演算子 (linear operator) といえる.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 5.1.2　逆 Laplace 変換 (Bromwich 積分)

$\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}$ の Fourier 変換は, 次式で与えられた[†537]:

$$\mathcal{F}[\sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct}](c+ik) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ct}e^{-ikt}\mathrm{d}t = F(c+ik) = F(s) \tag{5.9}$$

ここで, **“逆”Fourier 変換の定義** (§ 4.4) を思い返すと, 次式をうる:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(s)](t) = \sqrt{2\pi}f(t)e^{-ct} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ikt}\mathrm{d}k \tag{5.10}$$

両辺に e^{ct} を掛けて, 上式を $f(t)$ について解く:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ikt}\mathrm{d}k\, e^{ct} \tag{5.11}$$

このままだと, **積分変数が k である一方で, F の引数が s であるがゆえに, 統一感がない**. とはいえ, s と k の間には, $s = c + ik$ の関係があるので, これに従って整理すればよいだけであって, 積分変数を k から s に変換しよう. このとき, (i) k についての積分であるがゆえに, **被積分関数においては c が形式的に定数とみなされ**, $\mathrm{d}s/\mathrm{d}k = i$ とかける. (ii) k の積分区間 $(-\infty < k < \infty)$ に即した s の積分区間は $(c - i\infty < s < c + i\infty)$ である (確かめよ). 以上より,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{ikt}\frac{\mathrm{d}s}{i}e^{ct} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{5.12}$$

となる. これを逆 Laplace 変換といい[†538], 演算子 $\mathcal{L}^{-1}$ で表現することもできる[†539]:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{5.13}$$

積分変数が複素数 s であることからわかるように, これは, **複素積分**に他ならない[†540][†541]. 積分区間, すなわち, **積分経路は複素数平面 (Gauss 平面) 上の虚軸**

[†537] ここでは, s が現れないため, 引数を, (s) ではなく, わざと $(c+ik)$ と書いた. もちろん, $(s = c + ik)$ のように書いてもよい.

[†538] [用語] Laplace 逆変換といってもよい.

[†539] [用語] 最右辺を Bromwich (ブロムウィッチ) 積分ということがある.

[†540] 積分変数が複素数であるものを, ちょうど履修中の複素積分 (complex integral) という. 複素積分のほとんどの場合では, 複素変数にアルファベットの z を用いるため, s と書かれると, うっかり気づきにくい.

[†541] [しかし] 逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}[F(k)](x)$ は実積分であった. $F(k)$ が複素数であっても, 積分変数

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

に平行な直線であって,

$$\mathrm{Re}(s) = c, \quad (\text{ただし}, -\infty < \mathrm{Im}(s) = k < \infty) \tag{5.14}$$

である (図示せよ). 本講義では, (5.13) にはこれ以上は踏み込まず, 複素積分としての逆 Laplace 変換を具体的に計算することはしない [†542].

§ 5.2 初等関数の変換

Laplace 変換の計算自体は, Fourier 変換の場合よりも容易に感じるはずだろう [†543]. 注視すべきは, Fourier 変換の時と同様に, 収束性だけといえる. いくつかの初等関数の変換を計算し [†544], Laplace 変換の演算に慣れよう.

§ 5.2.1 定数関数 (Heaviside の単位階段関数)

Laplace 変換の具体例の 1 つ目として, $f(t) = 1$ を変換してみよう [†545]:

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty 1 \times e^{-st}\mathrm{d}t = -\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left(\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-st}}_{\text{ゼロ (後述)}} - 1\right) = \frac{1}{s} \tag{5.15}$$

このように, 積分計算自体はたやすい [†546].

しかしながら, Fourier 変換の場合と同様に, **積分が収束するための条件に注意**

---

k が実数であったからである. これを確かめよ.

†542 理由の一つは, 「複素関数」の講義で並行履修中のためである. また, 後述のように, 逆 Laplace 変換の計算は, Bromwich 積分としての複素積分の計算を避けて求められる場合も多いからでもある. 本講義で扱う逆 Laplace 変換は, そのような場合に限定する.

†543 容易か否かは教員ではなく諸君が判断すべきものである. Laplace 変換を学び終えた後に, Fourier 変換の計算を振り返り, 本当に容易か, 容易ではないではないか, などを確認すべきである.

†544 [発展・用語] 初等関数とは何か. この対義語の特殊関数とは何か.

†545 変換後に現れる s 依存性を強調すべく, あえて, 引数 (s) をしつこく省略せずに書き記すこととするが, 慣れた者は適宜省略してもよい.

†546 Fourier 変換と同じく, 複素指数関数 e^{-st} の積分である. ここに, t は実数だが, 係数 s は複素数である. 複素指数関数は, 実数の指数関数と同様の微積分の演算が許されたことを思い返そう (§ 2.1.4 における拡張).

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

せねばならない. すなわち, 上の変換 (5.15) が成立するのは,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} \underbrace{= \lim_{t\to\infty} e^{-(c+ik)t}}_{\text{複素数 } s \text{ の定義}} = \lim_{t\to\infty} e^{-ct}e^{-ikt} \underbrace{=0}_{\text{仮定 (願望)}} \tag{5.16}$$

と収束してくれるときに限られる. そのためには, 次式が要請される †547:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-ct} = 0 \quad (\text{あるいは, } \lim_{t\to\infty} e^{-\mathrm{Re}(s)t} = 0) \tag{5.17}$$

それゆえ, 変換後の変数 s の実部 $\mathrm{Re}(s) = c$ は, 正でなければならない †548:

$$c = \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{5.18}$$

これが収束するための条件である (重要).

ついでながら, 定数関数と関連深い, **Heaviside (ヘビサイド) の単位階段関数** $H(t)$ を定義しておく †549†550†551:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{5.19}$$

---

†547 Fourier 変換の場合と同様に, s の虚部 $\mathrm{Im}(s) = k$ は三角関数を作るがゆえに, 極限値が不定である. しかし, e^{-ct} さえゼロに収束してくれれば, 問題とならなかった (復習し, 理由を述べよ). [基礎] s が複素数であることを忘れてはならない.

†548 c や k といった多数の記号による煩雑さを避けるべく, 以後, 表現 $s = c + ik$ を避けて, $\mathrm{Re}[s]$ および $\mathrm{Im}[s]$ を積極的に用いる. 慣れない者は, 面倒でも, 実部と虚部に分ける操作を怠らないこと.

†549 高級な関数に聞こえるが, 定数関数と実質的に等価であるので恐れる必要はない. たとえば, 電気回路で, 時刻 $t = 0$ からスイッチを入れる時に用いられる. 事実, Heaviside とは電気工学者である. 本講義に限らず, **Heaviside 関数は多用されるので記憶する**ことをすすめる.

†550 [発展] 出題範囲外であるが, Heaviside の単位階段関数と関連深い Dirac のデルタ関数についても調べよ (教科書).

†551 定数関数の変換を, Heaviside 関数 $H(t)$ の変換とみなしてもよい. すなわち, $\mathcal{L}[1](s) = \mathcal{L}[H(t)])(s)$ である. これを示せ. この同一視を保障してくれるのは, t の定義域に他ならない.

§ 5.2.2　1 次関数

$f(t) = t$ の Laplace 変換を行う:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t](s) &= \int_0^\infty te^{-st}\mathrm{d}t = \left[-t\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s^2}\underbrace{-\frac{1}{s^2}\lim_{t\to\infty} e^{-st} - \frac{1}{s}\lim_{t\to\infty} te^{-st}}_{\text{ゼロ (後述)}} = \frac{1}{s^2}\end{aligned} \tag{5.20}$$

最右辺のように極限値が収束するためには, 定数関数の場合と同様に,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\mathrm{Re}(s)t} = 0 \tag{5.21}$$

が要求される. すなわち, やはり次式が満たされねばならない †552†553:

$$\mathrm{Re}(s) > 0 \tag{5.22}$$

諸君がこの先, 2 次関数や n 次関数の変換を求める必要に迫られたとしても, その計算に困難はないことは想像がつくだろう †554.

§ 5.2.3　指数関数

a **を実数定数とするとき**, $f(t) = e^{at}$ を Laplace 変換の定義に代入する †555:

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{a-s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t} - 1\right) = \frac{1}{s-a} \tag{5.23}$$

---

†552 本当にこれだけで十分だろうか. たとえば, $\mathrm{Im}(s)$ や t にも注意を払う必要はないのか. 答えは「十分である」. この理由を確かめよ.

†553 te^{-st} の極限については, t が無限大に近づくよりも速やかに $e^{-\mathrm{Re}(s)t}$ がゼロに収束してくれるから問題はない. **[重要]** $y = t$ **と** $y = e^{-t}$ **のグラフを描き, 極限** $t \to \infty$ **におけるそれぞれのふるまいを観察せよ.** t **が無限大に発散するよりも速やかに** e^{-t} **がゼロに収束すること**を確かめよ.

†554 計算量は, 次数の増加 (t^n の n の増加) とともに増加するが, 単に部分積分の回数が増えるだけである. 計算の処方箋が変わらないことが本質である. [発展] 個別に, 2 次関数, 3 次関数と順次計算せずとも, 一度に t^n を計算してもよい.

†555 [基礎] このような一般的な公式を作ろうとしている際に (あるいは, 一般的な議論が求められている際に), a を用いることなく, e^t **の変換を計算してしまうようでは, てんでダメである** (言われれば当然と思うだろうが, 言われなければ気づけないものである). 初めに一般的な e^{at} を計算しておき, 後から $a = 1$ や $a = 4$ を代入するのである.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

積分が収束するための条件は次式である．定数関数や 1 次関数の場合と形が違うことに注意せよ [†556][†557]:

$$a - \mathrm{Re}(s) < 0 \quad \text{すなわち，} \mathrm{Re}(s) > a \tag{5.24}$$

§ 5.2.4　三角関数

「$\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ の **Laplace 変換を求めよ (**ω **は実数定数)**」と問われたならば，どのように対応するだろうか．

深く考えずとも，$\cos\omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ のように Euler の公式 (2.4) を代入して，力任せに計算してもよい．しかしながら，そもそも，サインとコサインを個別に計算することは賢いやり方といえるだろうか．**Euler の公式から逆算して，**$e^{i\omega t}$ **の変換を求めた後に，実部と虚部に分ける方が賢い**．つまりは，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{i\omega t}](s) &= \mathcal{L}[\cos\omega t + i\sin\omega t](s) \\
&= \mathcal{L}[\cos\omega t](s) + i\,\mathcal{L}[\sin\omega t](s) \\
&= \mathrm{Re}(\mathcal{L}[e^{i\omega t}])(s) + i\,\mathrm{Im}(\mathcal{L}[e^{i\omega t}])(s)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

であるがゆえに [†558]，まず $\mathcal{L}[e^{i\omega t}](s)$ を求めてから，その実部と虚部をとればよいのである [†559]．実行する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{i\omega t}](s) &= \int_0^\infty e^{i\omega t} e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(i\omega - s)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s - i\omega} = \frac{s + i\omega}{(s - i\omega)(s + i\omega)} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

したがって，複素数の相等より，三角関数の変換をうる [†560]:

$$\mathcal{L}[\cos\omega t](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[\sin\omega t](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{5.27}$$

積分が収束するための条件は，定数関数と 1 次関数の場合と同様である (確か

[†556] なぜ形が変わったのか．明白である．指数関数だからである．これを深く考えよ．

[†557] [発展] 定数 a が複素定数であってもよい．その場合には，$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$ が要請される．

[†558] **この演算は Laplace 変換の線形性ゆえに許される**．Laplace 変換が線形演算であることを示せ．

[†559] 計算量の意味でも，このやり方が賢いといえるだろう．

[†560] **[注意] 決して虚数単位** i **を含めてはならない**．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

めよ)[561]:

$$\mathrm{Re}(s) > 0 \tag{5.28}$$

§ 5.3　導関数の変換

常微分方程式の解法への応用を目指す上では, 導関数の Laplace 変換が準備として欠かせない[562]. 処方箋は, 導関数の Fourier 変換の場合 (§ 4.6) と変わらないが, **Laplace 変換の場合には, 結果に初期条件が含まれる**ことに注意を要する.

§ 5.3.1　1 階と 2 階の導関数の変換

実際に, 1 階導関数を Laplace 変換しよう:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)](s) &\equiv \underbrace{\int_0^\infty f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t}_{\text{瞬時に部分積分を発想}} = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - (-s)\underbrace{\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t}_{\mathcal{L}[f(t)]=F(s)\ \text{そのもの}} \\ &= sF(s)\underbrace{-f(0)}_{\text{存在に注意}}\underbrace{+\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st}}_{\text{ゼロ (後述)}} = sF(s) - f(0)\end{aligned} \tag{5.29}$$

ただし, $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ とおいた[563]. $f(0)$ とは $f(t)$ の $t = 0$ における値, すなわち, 初期の値であり, 初期条件という[564]. **導関数の Laplace 変換には初期条件を含む. これが, 導関数の Fourier 変換との決定的な差異**である.

計算としては, このように部分積分を用いるだけであるが, 最右辺まで変形できるのは, 以下の収束条件を満たすときに限ることに注意せよ:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0 \tag{5.30}$$

---

[561] 「指数関数の場合は, 指数の a が収束条件に寄与したではないか」や「今回も実質的には指数関数であるから, 指数の ω が関与しないのか」などと思うかもしれない. この疑問には, 「**a は実部である反面, ω は虚部である**」と答えておこう.

[562] 微分方程式とは未知変数の導関数を含む方程式である. したがって, 導関数の変換が不明ではどうしようもない. 準備しておかねばならない.

[563] 慣れるまでは表現に注意せよ. 演算子 $\mathcal{L}$ による表現が有効な場面も, $F(s)$ なる表現が有効な場面もある.

[564] 定義域 $0 \le t < \infty$ を思い返そう. 初期条件とは, 初期時刻 $t = 0$ に, たとえば温度がどのような値か, 質点がどこにあるかなどを意味する.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

2 階導関数も, 同様の手順で Laplace 変換できる (**実際に導け**)[†565]:

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{5.32}$$

積分が収束するためには, (5.30) に加えて,

$$\lim_{t\to\infty} f'(t)e^{-st} = 0 \tag{5.33}$$

も必要となる (理由を考えよ).

このように, $t \to \infty$ の極限が消えてくれることが本質である [†566].

§ 5.3.2 導関数の Fourier 変換と Laplace 変換

導関数の Laplace 変換は, 導関数の Fourier 変換と何が異なるのだろうか [†567].

(i) $f(0)$ や $f'(0)$ などの**初期条件を含む**点が顕著な差異である.

(ii) ならば, なぜ初期条件を含むのか. それは, 積分範囲が $0 \le t < \infty$ すなわちゼロから積分が始まるからである. これが本質である.

(iii) 初期条件を含むことのメリットは [†568], 常微分方程式の**初期値**問題を解く際に明らかとなる [†569].

[†565] 基本中の基本であるが,

$$f'(0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \tag{5.31}$$

である. 微分してから代入するのである. 当たり前と思うかもしれないが, 軽視していると**多変数関数で誤る**.

[†566] なぜ収束性に気を留めねばならないのか. 明白である. 導関数の変換が簡潔な形でないならば, 微分方程式の解法への応用が困難だからである.

[†567] [注意] **決して「Laplace 変換の導関数」ではない. 「導関数の Laplace 変換」が正しい.** 前者と後者の数式表現は異なる. 実際に書き下せ.

[†568] 初期条件とは, 初期時刻における物体の位置などを意味する既知の値である. そのような有益な情報は, むしろ, 含まれていた方がよいと喜ぶべきであろう.

[†569] Fourier 変換は常微分方程式の "境界値" 問題に応用された. ところで, 導関数の Fourier 変換には, 境界条件を含んだだろうか.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

§ 5.4　たたみこみの変換

Laplace 変換の場合も, 関数 $f(t)$ と $g(t)$ の**たたみこみ (合成積)** が定義される [†570][†571]:

$$h(t) = f(t) * g(t) \equiv \underbrace{\int_0^t}_{\text{注意}} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.34}$$

問題 67. $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ を示せ (たたみこみの順番は問題とならない).

§ 5.4.1　たたみ込みの変換と合成法則

Laplace 変換のたたみこみの場合も, **合成法則 (たたみこみの定理)** が成立する [†572]:

$$H(s) = F(s)G(s) \quad \text{あるいは,}\ \mathcal{L}[h(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s) \tag{5.35}$$

極めて簡潔な結果だとは思わないか. すなわち, **2 つの関数のたたみこみの Laplace 変換はおのおのの関数の Laplace 変換の積に等しい**. したがって, Laplace 変換の積の逆 Laplace 変換は, たたみこみに等しい [†573][†574][†575]:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[h(t)](s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s)](t) \tag{5.36}$$

[†570] **積分範囲が Fourier 変換の場合と異なるが**, 特別にそれを区別する用語はない. したがって, 用語ではなくて式で語ればよい. たたみこみの積分区間は, Fourier 変換の場合は $(-\infty, \infty)$, Laplace 変換の場合は $[0, t]$ である.

[†571] 積分変数の記号 τ はギリシャ文字の "t"au (タウ) の小文字である. 物理や数学では, t の代替によく使われる.

[†572] **[注意] Fourier 変換の合成法則の場合は, $\sqrt{2\pi}$ がついたことを思い返そう** (§ 4.8).

[†573] 極めて複雑に見えるがゆえに, すぐさま理解できるものではないが, よく考えれば理解は容易である. 自身の理解にあいまいさがないかを検討せよ.

[†574] 引数の (s) や (t) を省略しても問題はない. しかしながら, あえてしつこく略さずに全て書いている. 初学者ならば, 慣れるまでは略すべきではない.

[†575] **$\mathcal{L}^{-1}$ と $\mathcal{L}$ の組み合わせで打ち消しあう**とイメージするとよい.

§ 5.4.2　合成法則の証明

証明の方法は書物に応じて多数が挙げられる．本資料では, (5.19) で定義した **Heaviside の単位階段関数** $H(t)$ **だけを用いる**賢い方法を紹介しておく †576.

結論からいうと, **積分区間を** $(-\infty, \infty)$ **に拡張したい**．そこで, $H(t)$ を用いて, たたみこみ $h(t)$ を, われわれにとって都合のよいように書き換える †577．$H(\tau)$ を被積分関数に挿入すると, 積分区間の下限が 0 から $-\infty$ に拡張される †578:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-\tau)H(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.38}$$

さらに, $H(t-\tau)$ をも挿入すると, 積分区間の上限が t から ∞ に拡張される:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau)f(t-\tau)H(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.39}$$

ポイントは積分区間を恣意的に広げたことであって, 以下に注意せよ: **(i)** $H(t)$ **は 1 であるがゆえに,** $f(t)$ **や** $g(t)$ **に掛けても影響がない †579. (ii) それでいて, 積分区間を** $(-\infty < \tau < \infty)$ **へと拡張できる効用を有する** †580.

それでは, $h(t)$ の Laplace 変換をとろう．$H(t)$ を賢く使って, 積分範囲を我が

---

†576 諸君は諸君のやりやすい証明を選べばよい．もっとも知識が少なくて済むといえる方法がここで紹介する証明である．代表的な手法は, Jacobian を駆使するものである．

†577 [注意] たたみこみ h と Heaviside 関数 H を混同しないこと．**H は h の Laplace 変換ではない．**

†578 「ゼロの積分は積分区間に依存しない」性質の利用に他ならない:

$$\int_{1}^{3} 0\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{5} 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = \cdots \tag{5.37}$$

†579 つまりは, 元の関数に影響を及ぼさずに, 積分区間の恣意的な変更だけに使える道具なのである．

†580 **[重要・考え方] 本当に理解できているだろうか．**以下の筋道である: まず, 積分は τ に関して行われることに注意する．式 (5.38) では, $H(\tau)$ とは, $0 < \tau$ において 1 を, $\tau < 0$ においてゼロをとる．したがって, $-\infty < \tau < 0$ においては, $H(\tau)$ は被積分関数に影響を与えない．それゆえ, 積分区間を拡張することが許される．具体的には, τ の積分範囲の下限を 0 から $-\infty$ へと拡張できる．式 (5.40) では, 式 (5.38) と同様に, $H(t-\tau)$ は, $t > \tau$ において 1 を取るが, $t < \tau < \infty$ においてゼロである．したがって, $H(t-\tau)$ の挿入によって, 積分区間の上限を, t から ∞ へと拡張可能である．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

物のように操るのである:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[h(t)](s) &\equiv \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty H(t-\tau)f(t-\tau)H(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right] e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^\infty H(t) \int_{-\infty}^\infty H(t-\tau)f(t-\tau)H(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\, e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty H(t-\tau)f(t-\tau)H(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\, e^{-st}\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{5.40}$$

2 行目では, t の積分範囲を, $0 \le t < \infty$ から $-\infty < t < \infty$ へと拡張すべく, $H(t)$ を挿入した. しかしながら, 3 行目においては $H(t)$ が消えている. この理由を述べる: 被積分関数に $H(t-\tau)$ が含まれているので, $t-\tau > 0$ すなわち $t > \tau$ だけが積分に寄与する. 同時に, $H(\tau)$ も被積分関数に含まれているので, $\tau > 0$ だけが積分に寄与する. あわせると, $t > \tau > 0$ すなわち $t > 0$ である. したがって, $t > 0$ 以外からは積分への寄与がない. ゆえに, 実は, $H(t)$ は必要がないと再判断して消したのである [†581].

引き続いて, たたみこみの定理の結果を眺めながら, いかにしてこれに近づけるかに頭を使おう. **Laplace 変換の定義を思い返すと, 指数関数を持ち込む必要が**ある. そこで, e^{-st} を以下のように変形して, $f(t-\tau)$ と $g(\tau)$ の双方に指数関数が掛かることを狙う [†582]:

$$e^{-st} = e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau} \tag{5.41}$$

すると

$$\begin{aligned}
(5.40) &= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty H(t-\tau)f(t-\tau)H(\tau)g(\tau)e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^\infty H(\tau)g(\tau)e^{-s\tau} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^\infty H(t-\tau)f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}\mathrm{d}t\right]}_{t\text{ の定積分後に}\tau\text{が変数として残る}}\mathrm{d}\tau
\end{aligned} \tag{5.42}$$

大括弧内は t に関する定積分であるがゆえに, **被積分関数内では τ は形式的に定**

[†581] それでいて, 積分範囲の (都合のよい) 拡張は, $H(t)$ の挿入によって自然と達成されたのである.

[†582] 「このような技巧的な式変形を独力で発想せねばならないのか」と思うかもしれないが, そのようなことはない. ここまでを読めばわかるように, とにかく, **自身に都合のよいように変形し, その正当性の検証を繰り返しているだけ**である. 全くもって闇雲な式変形は問題外だが, 何らかの方針に基づいた式変形ならば, ある程度は突飛でもよいのである. そうすれば, 検証は大変かもしれないが, 数回の試行錯誤で答えに到達するだろう. 逆に言えば, 人が行った式変形を覚えるだけでは, そのような力が身につくことはありえない. たとえ単位を取得できても, その先には何もない.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

数とみなされる[†583]. そこで, $t-\tau=\theta$ とおいて積分変数の変換を行う. すなわち, $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\theta=1$, および, t の積分区間が θ の積分区間と同じになることに注意すれば,

$$
\begin{aligned}
(5.42) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)g(\tau)e^{-s\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(\theta)f(\theta)e^{-s\theta}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)g(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta)f(\theta)e^{-s\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \underbrace{\int_{0}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \int_{0}^{\infty} f(\theta)e^{-s\theta}\mathrm{d}\theta}_{H\ \text{を消すと積分区間の下限がゼロへ (理解せよ)}} \\
&= \mathcal{L}[g(t)](s)\mathcal{L}[f(t)](s) = G(s)F(s)
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

これで証明が完了した. Heaviside 関数という道具だけを頼りにして, 巧みに積分区間を変更して題意に近づけた[†584]. **可能な限り一般化してから, 題意に近づけようと簡単化を図った**. このような筋道は, 証明における常套的手段である[†585].

§ 5.5　常微分方程式の初期値問題の解法への応用

まずは抽象的な例題から入り, 解法の骨格を学ぼう.

問題 68. 常微分方程式

$$f''(t)+\omega^2 f(t)=q(t) \tag{5.44}$$

を初期条件

$$f(0)=a, \quad f'(0)=b \tag{5.45}$$

[†583] **被積分関数としては形式的に定数とみなされる**だけに過ぎない. **[注意!!] 演習や中テストの答案を見る限り, 完全な定数と勘違いしている者が多い. τ は紛れもなく変数である** (減点要因).

[†584] Jacobian を用いたり, 幾何学的に考える方がやりやすい者もいるだろう. 何らかの方法で証明ができればそれでよい. 多数の公式を記憶し駆使することが性に合うものもいれば, 少数の公式で済ませたい者もいるだろう. ゴリゴリとした計算を得手とする者, 発想を頼りにする者もいるだろう. とはいえ, 大学以上においては, **単なる物知りは役立たない**場面が多いが (Google が教えてくれるので).

[†585] 初見では, はじめの一歩が受け入れがたくとも, 我慢するより仕方ない.

のもとで解け [†586][†587]. ここに, ω, a, b は実数定数で, $q(t)$ は任意の実数値関数である. [解] **両辺を Laplace 変換する** [†588].

- 左辺第 1 項: 2 階導関数の Laplace 変換を利用して,

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - as - b \tag{5.46}$$

  と書ける. ここで, 初期条件 (5.45) を代入した.

- 左辺第 2 項 [†589]:

$$\mathcal{L}[\omega^2 f(t)](s) = \omega^2\mathcal{L}[f(t)](s) = \omega^2 F(s) \tag{5.47}$$

  1 つ目の等号は, Laplace 変換の線形性ゆえにである.

- 右辺: Laplace 変換を $Q(s) \equiv \mathcal{L}[q(t)](s)$ とおいた.

以上を踏まえて整理しよう:

$$s^2F(s) - as - b + \omega^2 F(s) = Q(s) \tag{5.48}$$

$F(s)$ について解いて, **逆 Laplace 変換しやすく書き換え**ておく:

$$\begin{aligned} F(s) &= a\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{b}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega}Q(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ &= a\mathcal{L}[\cos\omega t](s) + \frac{b}{\omega}\mathcal{L}[\sin\omega t](s) + \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\left[\int_0^t q(t-\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right](s) \end{aligned} \tag{5.49}$$

ここで, 分母の形を見て, 三角関数の Laplace 変換 (5.27) を思い返し, これを代入

---

†586 このような, 微分方程式と初期条件の組み合わせを "常微分方程式の**初期値問題** (initial value problem)" という. これは, 力学や振動工学でいうところの強制振動 (非減衰系) の方程式に他ならない.

†587 [基礎] 初期条件が 2 個用意されているのは, 微分方程式の階数が 2 階だからである. たとえ 2 個でなくともそれだけで批難されるものではない. しかしながら, 初期条件が 2 個でないならば, 微分方程式の一般解に含まれる任意定数は定まらないし, 初期値問題の解も定まらない (確かめよ).

†588 **この手順だけは暗記する価値がある**. 逆に言えば, これを知らねば何もできないし, これさえ知っておれば何でもできる.

†589 ここで, 決して, $F(s)$ の定義に即した定積分計算を始めてはならない. **微積分を避けて, 四則演算で済ませることが真髄であるのに, 真面目に微積分を行うなど愚の骨頂**である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

しやすいように形を整えた[†590]. 右辺第3項の変形を補足しておく:

$$Q(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \mathcal{L}[q(t)](s)\mathcal{L}[\sin\omega t](s)$$
$$\underbrace{=}_{\text{たたみこみの定理 (合成法則)}} \mathcal{L}[q(t)*\sin\omega t](s) \underbrace{= \mathcal{L}\left[\int_0^t q(t-\tau)\sin\omega\tau \mathrm{d}\tau\right](s)}_{\text{たたみこみの定義}} \tag{5.50}$$

逆 Laplace 変換によって, $f(t)$ を求めることができる[†591]:

$$\begin{aligned} f(t) &= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)](s)](t)}_{\mathcal{L}\text{ と }\mathcal{L}^{-1}\text{で相殺}} = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[a\mathcal{L}[\cos\omega t](s) + \frac{b}{\omega}\mathcal{L}[\sin\omega t](s) + \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\left[\int_0^t q(t-\tau)\sin\omega\tau \mathrm{d}\tau\right](s)\right](t) \\ &\underbrace{=}_{\text{線形性}} a\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[\cos\omega t](s)\right](t) + \frac{b}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[\sin\omega t](s)\right](t) + \frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left[\int_0^t q(t-\tau)\sin\omega\tau \mathrm{d}\tau\right](s)\right](t) \end{aligned} \tag{5.51}$$

誤魔化しのないようにここまでを書いた結果, 表現の煩雑さを避けられなかった[†592]. かみ砕くならば, $\mathcal{L}^{-1}$ **と** $\mathcal{L}$ **の組み合わせで打ち消される**と思えばよい. すると,

$$f(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t q(t-\tau)\sin\omega\tau \mathrm{d}\tau \tag{5.52}$$

問題 69. 以下の問に答えよ.

(i) 初期値問題の解 (5.52) が確かに初期条件を満たしていることを確かめよ.

(ii) 定数変化法 (解析学 III) を用いて初期値問題の解を求め, (5.52) との一致を確かめよ[†593].

(iii) 非斉次項が $q(t) = \sin\omega t$ のように具体的に与えられているならば, 定積分を

[†590] 技巧的に b/ω と変形したのだが, これを b/s **と変形するのは愚の骨頂である** (理由を考えよ). s **は特別扱い**なのである. 決して, 分母に何を用いてもよいというわけではない.

[†591] やはり, しつこく引数の (t) を省略せずに書いているが, 自明な者は略してもよい (理解不十分な者が略すべきではない. そのような者がたいてい単位を落とす).

[†592] 引数の (s) や (t) は, 金川もしつこいと感じている. 諸君が自明といえるのならば, 省略してもよいが, 初学者が安易に省略するのは好ましくない. このような軽微な箇所への注意なくして, 大きな問題を解くことはできない.

[†593] 単に一致を確かめて満足してもらうための設問ではない. 計算量や難易度を比較して, おのおのの解法の優位性を整理することが意図である.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

具体的に計算することができる．自身で, $q(t)$ にいくつかの関数を与えて, 積分計算を実行せよ．

§ 5.5.1　Laplace 変換による解法のまとめ

一言でいえば, **微積分を代数的に扱える (四則演算で閉じる)** ことが最大の利点である．手順は, **"変換して逆変換する"** だけであるが [†594], 以下のように整理される:

(i) 両辺を Laplace 変換する．導関数の変換と初等関数の変換を駆使する．これによって, 微分が四則演算に落とされることが重要である．導関数の変換において, 初期条件を代入する [†595].

(ii) $F(s)$ について解く．その計算は, 四則演算に過ぎない．多くの場合は, **部分分数分解を用いる**ことが多い [†596].

(iii) 逆変換を行い, $f(t)$ を求める．その際に, たたみこみの変換と初等関数の変換を用いる [†597].

さらに, 注意事項を挙げておこう:

- たたみこみについては, 定義を覚えよ．たたみこみの定理は, 証明し, 理解し, 運用できるようにせよ．**たたみこみの定義と定理を混同してはならない**.
- Laplace 変換による解法の場合, 発想やアイデアは一切不要である．**「変換して逆変換する」**, これに尽きるし, これさえ覚えておけばよい [†598]．そして, 斉次方程式や非斉次方程式などを気にせず, 常微分方程式と初期条件の組み合わせ (常微分方程式の初期値問題) を満たす解を系統的に求めることができることも, 変換による方法の利点である．

[†594] [重要] **この 9 文字は一生忘れないと言えるほどに単純な操作**である．もちろん, Laplace 変換の定義などは, 忘れて当たり前だが, 定義に立ち戻るだけで全てが再現できるだろう．

[†595] これによって一般解に含まれる任意定数などを気にする必要がなくなる．

[†596] 試験においては, 計算量の多い部分分数分解を問うことはしない．単なる計算問題は, 高校生でもできる無意味なものにすぎない．

[†597] 本講義においては, **初等関数の変換を記憶する必要はない**．むしろ, その場で導け．

[†598] この意味で, 多数の解法とテクニックに支配された解析学 III とは全く異なるのである．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

- 初等関数の変換の公式は, すぐさま導けるので覚える必要はない. 実用上の観点からいえば, Laplace 変換表がたいていの書物に載っているので, これを利用すればよい [†599].

§ 5.5.2 練習問題

問題 70. 次の常微分方程式の初期値問題を Laplace 変換を利用して解け [†600]:

(1) $f'(t) - f(t) = -t,\ f(0) = 1$

(2) $f''(t) + f(t) = 3\cos 2t,\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0$

(3) $f'(t) + 3f(t) = 10\sin t,\ f(0) = 0$

(4) $f''(t) + 2f'(t) - 3f(t) = 0,\ f(0) = 1,\ f'(0) = 2$

[略解] (1)(2) について示しておこう:

(1) 両辺を Laplace 変換すると,

$$[sF(s) - 1] - F(s) = -\frac{1}{s^2} \tag{5.53}$$

をうる. ここで, 初期条件 $f(0) = 1$ を代入し, 1 階導関数の変換および 1 次関数の変換を用いた [†601].

$F(s)$ について整理しよう. 部分分数分解を用いて,

$$F(s) = \frac{1}{s-1}\frac{s^2-1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \tag{5.54}$$

逆 Laplace 変換によって,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right](t) = 1 + t \tag{5.55}$$

[†599] [方針] 試験の観点からいえば, 何ら暗記する必要はない. Laplace 変換の諸公式を導くための計算量はわずかなものばかりであって, その都度導けばよい. ただし, **たたみこみの定理だけは(証明を理解した上で) 覚えておくべきだろう** (証明の道筋が複雑だからである).

[†600] [解] (1) $f(t) = 1 + t$, (2) $f(t) = 2\cos t - \cos 2t$, (3) $f(t) = 3\sin t - \cos t + e^{-3t}$, (4) $f(t) = \dfrac{5}{4}e^{t} - \dfrac{1}{4}e^{-3t}$.

[†601] 試験ではこれを既知としてはならない. そもそも, 覚えることに価値などない. 一瞬で導けるのだから, その都度導くこと.

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

これが初期値問題の解である．初期条件を満たすことは容易に確かめられる (確かめよ)．

(2) 両辺を Laplace 変換する．2 階導関数の変換および余弦関数の変換を用いる:

$$[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)] + F(s) = \frac{3s}{s^2+2^2} \tag{5.56}$$

初期条件を代入し, 整理する:

$$[s^2F(s) - s] + F(s) = \frac{3s}{s^2+4} \tag{5.57}$$

$F(s)$ について整理しよう．部分分数分解を用いて,

$$F(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4} \tag{5.58}$$

逆 Laplace 変換によって,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1^2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right](t) = 2\cos t - \cos 2t \tag{5.59}$$

2 個の初期条件を満たすことを確かめよ．つまり, 1 階導関数をも求めて代入せよ．

§ 5.5.3 簡単な積分方程式

問題 71. つぎの積分方程式を解け [602][603]:

(1) $f(t) - t - \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$

(2) $\int_0^t f(t-\tau)e^{2\tau}\mathrm{d}\tau = \sin t$

(3) $\int_0^t e^{t-\tau}f(\tau)\mathrm{d}\tau = \cos 2t - f(t)$

[ヒント] たたみこみに注目して, 両辺を変換するだけである．以下に略解を示す [604]．

---

[602] 微分方程式とは, 未知変数 (従属変数) の導関数あるいは微分係数を含む方程式であった．**積分方程式とは, 未知変数を被積分関数の中に含む方程式**である．

[603] [解] (1) $f(t) = e^t - 1$, (2) $f(t) = \cos t - 2\sin t$, (3) $f(t) = \cos 2t - \dfrac{1}{2}\sin 2t$.

[604] 解答ではない．試験では, 計算過程を略さないこと．

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

(1) 両辺を Laplace 変換する[†605]:

$$F(s) - \frac{1}{s^2} - \frac{F(s)}{s} = 0 \tag{5.60}$$

これを $F(s)$ について解く[†606]:

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} = \mathcal{L}[e^{-t}](s) - \mathcal{L}[1](s) \tag{5.61}$$

逆変換して $f(t)$ を求め, 確かに題意の積分方程式を満たしているかを確かめよ.

(2) たたみこみの定理を利用して[†607], 左辺を変換すると,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{2\tau} f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right](s) \underbrace{= \mathcal{L}[e^{2t} * f(t)](s)}_{\text{たたみこみの定義}} \underbrace{= \mathcal{L}[e^{2t}](s)\mathcal{L}[f(t)](s)}_{\text{たたみこみの定理}} = \frac{F(s)}{s-2} \tag{5.62}$$

右辺を変換すると,

$$\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1} \tag{5.63}$$

以上より, $F(s)$ について解く (これを逆 Laplace 変換せよ):

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} - 2\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[\cos t](s) - 2\mathcal{L}[\sin t](s) \tag{5.64}$$

(3) 左辺の変換は, たたみこみの定理によって,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{t-\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right](s) = \mathcal{L}[e^t * f(t)](s) = \mathcal{L}[e^t](s)\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{F(s)}{s-1} \tag{5.65}$$

---

†605 [基礎] たたみこみの定義とたたみこみの定理に注意せよ. すなわち,

$$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t 1 \times f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t 1(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau = 1(t) * f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) * \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right](t)$$

のように眺めよ. そして, たたみこみの定理から逆 Laplace 変換を求めよ.

†606 部分分数分解を利用する.

†607 定理は理解してから使うこと. 中テストを見る限り, たたみこみの定理を理解せぬまま用いている答案が多い. **この式変形を単に覚えるだけでは確実に失敗する.**

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp

右辺を変換すると,

$$\mathcal{L}[\cos 2t + f(t)](s) \underbrace{= \mathcal{L}[\cos 2t](s) + \mathcal{L}[f(t)](s)}_{\text{変換の線形性}} = \frac{s}{s^2+2^2} + F(s) \tag{5.66}$$

以上を整理して, $F(s)$ について解く (これを逆 Laplace 変換せよ):

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2} = \mathcal{L}[\cos 2t](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin 2t](s) \tag{5.67}$$

参考文献

本講義資料執筆にあたり, 以下の文献を主に参考にした:

- 船越満明, キーポイント フーリエ解析, 岩波書店
- E. クライツィグ, 技術者のための高等数学 3 フーリエ解析と偏微分方程式, 培風館
- 畑上, 工学基礎フーリエ解析とその応用, 数理工学社
- 小暮陽三, なっとくするフーリエ変換, 講談社
- 大石進一, 理工系の数学入門コース フーリエ解析, 岩波書店
- 竹内 淳, 高校数学でわかるフーリエ変換, 講談社

kanagawa♠kz.tsukuba.ac.jp