応用数学 中間試験問題　2016 年 6 月 7 日 12:15–15:00 実施 (出題: 金川)

注意事項

1. 鉛筆 (シャープペンシルおよび替え芯), 消しゴム, 時計のみ机上におく (関数電卓, 筆箱, 定規使用不可). **携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまうこと**. 鞄のチャックをしめて床におくこと. 不正行為には学類で定める罰則が課される.
2. 答案用紙 4 枚全てに要記名. 足りなければ申し出ること. 使わなかった答案用紙も提出のこと. 答案用紙右上に **1/4, 2/4,** $\cdots$ **のように計何枚中何枚目かを明記**のこと.
3. **最後の "答えだけが正しい" ことは, 正答とはみなされない**. 考え方の筋道, 式変形の根拠, 途中計算を, 論理的かつ正確に略さず記述する. **日本語での説明中に数式を挿入**する形で解答のこと. おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと. 記号の誤用からは減点する.
4. ある問題の解答において**導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 証明を繰り返すことなく自由に用いてよい**. 独立採点とするので, 問題文中の数式も用いてよいが, 引用の際は, 答案の式番号と問題文中の式番号を区別のこと.
5. 以下の公式や定理を証明せずに用いてよい (**中テストと異なる!!**). これ以外の公式や定理を用いるのならば証明を略さないこと. **どの公式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと.

   (a) 三角関数の直交関係式, (b) Euler の公式, (c) 偶関数や奇関数の積に成立する関係.

問 1 [27 点] 絶対可積分かつ項別積分が可能な周期 2π の周期関数 $f(x)$ を考える. $f(x)$ は実数変数 x に依存する実数値関数である. $f(x)$ が Fourier 級数 (実 Fourier 級数および複素 Fourier 級数) に展開可能であって, $f(x)$ の Fourier 級数が, 全ての x において $f(x)$ に収束する場合を考える. [注意] 問題文中に与えられていない記号を用いる際には定義のこと. 題意に即して解答のこと.

(1) 実 Fourier 係数を $f(x)$ から求める公式をすべて導け.
[注意] 項別積分などの仮定をどこで用いたのかを述べよ.

(2) $f(x)$ の実 Fourier 級数が, 複素 Fourier 級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{A}$$

の形に整理できることを証明すると同時に, 複素 Fourier 係数 c_n を実 Fourier 係数を用いて定義せよ. [ヒント] n に注意せよ.

(3) c_n を $f(x)$ から求める公式を導け.

(4) 複素 Fourier 級数 (式 (A)) の虚部はゼロとなる. これを証明せよ.

問 2 [20 点] 複素 Fourier 係数の先にある Fourier 変換そしてその先の Laplace 変換を定義したい. [注意] 小問 (1)(2)(3) で, f と F の定義がそれぞれ異なることに注意せよ.

(1) 周期 $2L$ の実数値の周期関数 $f(x)$ を考える. $f(x)$ の複素 Fourier 級数, および, 複素 Fourier 係数を $f(x)$ の定積分から与える公式を導け. ここに, L は正の実数定数, x は実数変数である. [ヒント] 問 1 の結果を利用するとよい.

(2) (1) の結果から出発して, Fourier 変換 $\mathcal{F}[f(x)](k) = F(k)$, および, 逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}[F(k)](x) = f(x)$ の定義式を導け (定積分で表現せよ). ここに, $f(x)$ は実数値の非周期関数 (x は実数変数), $F(k)$ は複素数値関数である (k は実数変数).

(3) (2) で導いた Fourier 変換の定義を用いて, Laplace 変換 $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ の定義式を導け (定積分で表現せよ). ここに, $f(t)$ は $t \geq 0$ で定義される実数値関数 (t は実数変数), $F(s)$ は複素関数である (s は複素変数).

(4) (2)(3) を用いて, 次式を導け. 記号の定義は (3) と同一である.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)-i\infty}^{\mathrm{Re}(s)+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{B}$$

問 3 [12 点] つぎの実数値関数 $f(x)$ を考える. ただし, x は実数変数, a は正の実数定数である.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\infty < x < 0) \\ e^{-ax} & (0 \leq x < \infty) \end{cases} \tag{C}$$

(1) $f(x)$ の概形を描け. [注意] 精密な図でなくともよいが, 軸との交点の座標などは示せ.

(2) $f(x)$ の Fourier 変換 $F(k)$ を求めよ. [注意] 定積分の計算に含まれる極限 $x \to \infty$ および $x \to -\infty$ におけるふるまいを言及のこと.

(3) (2) で求めた $F(k)$ の虚部は奇関数となる. これを証明せよ.

問 4 [41 点] Laplace 変換を利用して, 常微分方程式

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = q(t) \quad (t > 0) \tag{D}$$

の解のうち,

$$f(0) = a, \quad f'(0) = b \tag{E}$$

を満たすものを求めたい. ここに, $f(t)$ は実数変数 t に依存する実数値関数, a, b, ω は全て実数定数, $q(t)$ は任意の実数値関数, ダッシュ記号 $'$ は t に関する微分演算を意味する.

(1) $f''(t)$ の Laplace 変換を, 式 (E), $F(s)$, s だけを用いて表現する式を導き, その適用範囲を記せ. ここに, $F(s)$ は $f(t)$ の Laplace 変換である (s は複素変数).

(2) $\sin\omega t$ および $\cos\omega t$ の Laplace 変換を与える公式を導き, その適用範囲が

$$\mathrm{Re}(s) > 0 \tag{F}$$

であることを証明せよ.

(3) 一般に, 実数値関数 $f_1(t)$ の Laplace 変換と実数値関数 $f_2(t)$ の Laplace 変換の積は, $f_1(t)$ と $f_2(t)$ のたたみこみ (合成積) の Laplace 変換に等しい. これを証明せよ.

(4) (1)(2)(3) を道具として, 式 (D)(E) を満たす解を導け.

以上