応用数学小テスト 2 (中テスト)　2016 年 5 月 24 日 12:15–15:00 実施 (出題: 金川)

注意事項 (よく読んだ上で解答を始めること)

1. 鉛筆 (シャープペンシルおよび替え芯), 消しゴム, 時計のみ机上におく (関数電卓, 筆箱, 定規使用不可). **携帯電話は電源をオフにして鞄の底にしまうこと**. 鞄のチャックをしめて床におくこと. 不正行為には学類で定める罰則が課される.
2. 答案用紙 5 枚全てに要記名. 足りなければ申し出る. 使わなかった答案用紙も提出のこと. 用紙右上に **1/5, 2/5, ⋯ のように計何枚中何枚目かを明記**のこと.
3. **最後の "答えだけが正しい" ことは, 正答とはみなされない**. 考え方の筋道や式変形の根拠を, 論理的かつ正確に略さず記述する. **日本語での説明中に数式を挿入**する形で解答のこと (途中計算や式変形の根拠は省略不可). おかれている仮定 (題意) に注意しながら計算のこと. 記号の誤用からは減点する.
4. ある問題の解答において**導いた数式や証明済事項は, 他の問題の解答において, 証明を繰り返すことなく自由に用いてよい**. 独立採点とするので, 問題文中の数式も用いてよいが, 引用の際は, 答案の式番号と問題文中の式番号を区別のこと.
5. グラフを描く際には, 軸とグラフの交点の座標や軸の名称などを明記のこと. 綺麗な図でなくとも, 重要な特徴が示された概形ならばよい.
6. 以下の公式や定理を証明せずに用いてよい. これ以外の公式や定理を用いるのならば証明を略さないこと. ただし, **どの公式をどこでどのように用いたのかを明記**のこと.
   (a) 三角関数の直交関係式
   (b) Euler の公式
   (c) 実 Fourier 係数と複素 Fourier 係数を与える公式
   (d) Fourier 級数の収束定理
   (e) 偶関数と奇関数の積に成立する関係
   (f) たたみこみの定理 (たたみこみの Fourier 変換に関する定理)

問 1 [25 点] 区間 $-\pi \leq x < \pi$ で定義された実数値の 1 次関数 x を, 周期 2π の周期関数となるように x 軸全体に拡張して作られる関数 $f(x)$ が Fourier 級数に展開可能であって, 不連続点を除く全ての x に対して, Fourier 級数が $f(x)$ に収束する.

(1) $f(x)$ の概形を描け. [注意] 精密な図でなくとも, 重要な特徴が示されておればよい.

(2) $f(x)$ の実 Fourier 級数を求めよ. 総和記号を用いた表現を書き下した後に, 初めの 4 項を具体的に書き下せ.

(3) $f(x)$ の複素 Fourier 級数を求めよ. 総和記号を用いた表現を書き下した後に, 代表的な 4 項を具体的に書き下せ.

(4) (3) の複素 Fourier 級数 **"から出発"** して, (2) の実 Fourier 級数への帰着を証明せよ.

問 2 [10 点] 実数値関数を考える.

(1) Fourier 変換と逆 Fourier 変換の定義式を書け. [注意] 書くだけでよい. 各記号に説明を与えよ.

(2) (1) で書き下した数式と, 複素 Fourier 級数および複素 Fourier 係数の関係を, 数式を用いて 200 字前後で説明せよ (証明ではない). 題意は「Fourier 級数と Fourier 変換の違いは何か」であって, これがわかる記述ならば, 厳密な証明である必要はない.

問 3 [30 点] 次の 2 種類の実数値関数を考える.

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{A}$$

$$g(x) = e^{-ax^2} \quad (-\infty < x < \infty) \tag{B}$$

ここに, a は正の実数定数, x は実数変数であり, 以下の k は実数変数とする.

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の概形をそれぞれ描け. [注意] 精密な図でなくとも, 重要な特徴が示されておればよい.

(2) $f(x)$ の Fourier 変換 $F(k)$ を求め, $F(k)$ が実数値の偶関数であることを示せ.

(3) $g(x)$ の Fourier 変換 $G(k)$

$$G(k) = Ae^{-k^2/(4a)} \tag{C}$$

を導け. ここに, A は任意の実数定数であるが, A を決定する必要はない.

問 4 [5 点] 次式を証明せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(x-\eta)\mathrm{d}\eta \tag{D}$$

ここに, x, y, η は実数変数, f と g は実数値関数である.

問 5 [30 点] 実数変数 x の実数値関数 $f(x)$ が

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{E}$$

を満たすとする. $f(x)$ の Fourier 変換を $F(k)$ とおく. k は実数変数とする.

(1) $f(x)$ の 2 階導関数の Fourier 変換を, k と $F(k)$ だけを用いて表す式を導出せよ.

(2) 常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} - a^2 f = q(x) \tag{F}$$

の解のうち, 条件 (E) を満たし, かつ, $q(x)$ を積分の中に含むものを求めよ. ここに, $q(x)$ は既知の実数値関数, a は既知の実数定数である.

問 6 これまでの講義に対する感想や疑問点があれば書いて下さい.

以上